MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA PROMOTION CIVIQUE

EDUNOTE
Portail Integré de Réussite Scolaire

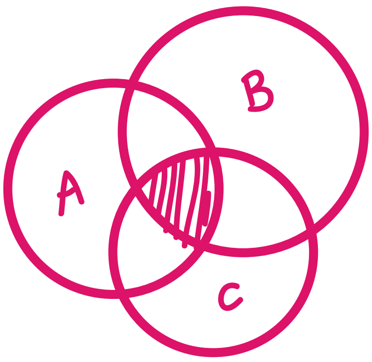
Maths
1 ère L

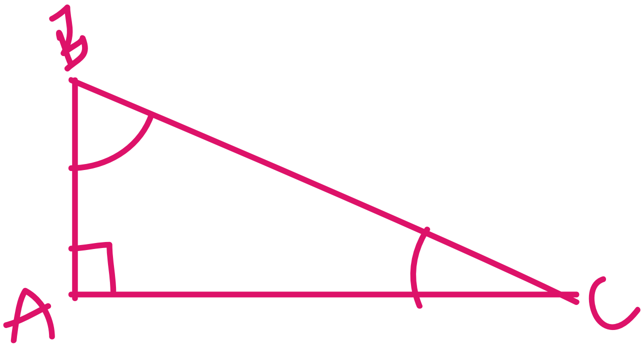
SUPPORT OFFICIEL DE L'ENSEIGNEMENT
À DISTANCE AU TCHAD

✓ ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

✓ ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

✓ EXERCICES CORRIGÉS





Inscrivez-vous
www.edunote.org

Appelez le Call center
Pédagogique au
1317

Scannez puis Téléchargez
le Livre en Pdf

unicef pour chaque enfant
EDUCATION CANNOT WAIT a global fund for education in emergencies
UNFPA
Centre National des Curricula
TECHNIDEV Institut des Technologies Innovantes pour le Développement

Avant – Propos

Ce support d'enseignement à distance de Mathématiques destiné aux élèves des classes de Première L de l'Enseignement Secondaire Général au Tchad a été conçu dans le cadre du programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Toutes propositions tendant à l'amélioration du document seront les bienvenues.

Bonne lecture

Equipe éditoriale

Le support d'enseignement à distance de Mathématiques destiné aux classes de Première L (1ère L) a été réalisé par une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants, en particulier :

MM. :

- MANDO FERDINAND, Professeur certifié de Mathématiques ;
- ALIYABA ZOUA, Professeur licencié de Mathématiques ;
- AHMAT HANSAN YERIMA, Professeur licencié de Mathématiques

Sous la supervision de NGARADOUM FABIEN,
Professeur certifié de Mathématiques

Saisie et mise en page
NODJIKOUAMBAYE MBAINAIDA,
Chef de Division Bibliothèque au CNC

Assistance technique :
MAHAMAT ABBA MAHAMAT,
Professeur de Mathématiques
Coordination :
Dr. ABOUBAKAR ALI KORE,
Directeur Général du Centre National des Curricula
KHALID FADOUL DOUTOUM,
Directeur Général de TECHNIDEV.

PREFACE

Chers élèves, enseignants, parents et parties prenantes de l'école tchadienne,

Conformément au **protocole d'accord de partenariat du 02 septembre 2016** ayant pour objet le renforcement des capacités en technologies de l'information et de la communication dans les établissements secondaires, liant l'Etat Tchadien représenté par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique (MENPC) et l'Institut TECHNIDEV, ce dernier est amené à expérimenter des approches innovantes intégrant le numérique et visant à améliorer l'efficacité interne du système éducatif tchadien. **Le résultat attendu de cette convention (MENPC/ TECHNIDEV) étant l'accès à une éducation et la réussite pour tous.**

C'est dans ce cadre que le programme Soutien Scolaire Intégré est développé et mis en œuvre par TECHNIDEV, avec pour objectif de :

- Prendre en charge tous les élèves en difficultés scolaires dans une discipline inscrite au programme officiel et ce, conformément au niveau de l'élève ;
- Contribuer à améliorer les notes en classe de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à assurer le passage en classe supérieure de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à améliorer le taux de réussite au BAC de tous les candidats bénéficiaires ;
- Contribuer au maintien des filles à l'école.

TECHNIDEV tient à exprimer ses remerciements aux cadres du MENPC, aux partenaires (ECW et UNICEF), les experts, les inspecteurs, les enseignants et les animateurs pédagogiques et à toutes celles et tous ceux qui ont contribué d'élaboration de ce guide.

Le présent guide pédagogique décline les stratégies d'une prise en charge de l'élève soucieux de la qualité de son éducation et de sa réussite, adhérant au projet et respectant les conditions spécifiques de sa mise en œuvre.

L'enseignant, spécialisé en techniques d'évaluation et de remédiation et en éducation par le numérique, dispose d'un outil lui permettant d'agir avec une méthode axée sur les résultats en terme de développement des compétences des élèves.

Pour les parents, c'est un instrument de suivi quotidien des activités d'apprentissage de l'enfant par rapport à la progression dans le programme.

J'invite les élèves, les enseignant (e)s et les parents à une exploitation judicieuse de ce guide pour une contribution efficace dans la mise en œuvre de programmes de Soutien Scolaire Intégré (SSI) et partant, la redynamisation de l'école tchadienne.

<u>KHALID FADOUL DOUTOUM</u>

Directeur Général de TECHNIDEV

INTRODUCTION

Le présent guide a été réalisé dans le cadre de programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants a contribué à son élaboration.

Ce guide, destiné principalement aux enseignants et aux élèves, a pour but de contribuer à l'amélioration et le renforcement des capacités de l'élève et ce, d'abord par l''identification de ses difficultés suivi un accompagnement stratégique basé sur une approche par compétences. Il s'adresse aux élèves du CM à la Terminale et s'appesantit principalement sur les matières fondamentales que sont le Français et les Mathématiques. Chaque Guide traite un trimestre spécifique conformément au programme de l'enseignement proposé par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique du Tchad.

Dans ce contexte, le guide met en évidence les principales compétences jugées incontournables pour la réussite de l'élève et suggère aux enseignants des stratégies et méthodologies appropriées pouvant servir à mettre en place une meilleure prise en charge individuelle de l'élève.

Dans son architecture, le guide présente de la manière suivante :

Partie 1 (destinée en premier lieu à l'enseignant) : La Fiche de programmation trimestrielle, la Fiche de Progression et la Fiche de développement de compétences du trimestre mis en exergue par ledit Guide ainsi qu'un chronogramme de prise en charge individuelle de l'élève par l'enseignant.

Partie 2 (destinée aux élèves) : Elle déroule les différentes compétences que l'élève doit développer, ainsi que des épreuves et applications favorisant l'acquisition de ces compétences. Des tableaux d'évaluation des élèves sont consacrés à la fin de chaque épreuve.

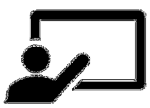
Table des Illustrations

 = Important pour l'élève

 = Relire plusieurs fois

 = Astuces et consignes

 = Compétence acquise

 = Exercice d'application

 = Compétence en cours d'acquisition

 = Exercices d'approfondissement

 = Compétence non-acquise

Partie destinée à l'enseignant

Trimestres	CB1	CB2
Trimestre I	☞ **Chapitre 1 :** Fonctions numériques d'une variable réelle : généralités ☞ **Chapitre 2 :** Limites et dérivation	☞ **Chapitre 1** : Equations et inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$ ☞ **Chapitre 2** : Fonctions polynômes et fonctions rationnelles
Trimestre II	☞ **Chapitre 3 :** Etudes de quelques fonctions	☞ **Chapitre 3** : Système d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ☞ **Chapitre 4** : Analyse combinatoire
Trimestre III	☞ **Chapitre 4** : Suites numériques	☞ **Chapitre 5** : Statistiques

OBJECTIF INTERMEDIAIRE D'INTEGRATION(OII) $1^{ère}$ L

Au terme de la classe de première L, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives permettant de développer des capacités d'organisation et de raisonnement dans un langage correct; de mobiliser des connaissances mathématiques essentielles dans des contextes variés et transversaux.

1^{re} L : CB1 : Analyse

Au terme de la classe de première L, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir les fonctions d'une variable réelle et les suites numériques.

1^{re} L : CB2 : Algèbre -Statistiques et dénombrement

Au terme de la classe de première L, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir :

- les calculs dans $\mathbb{R}$;
- les séries statistiques ;
- le dénombrement.

Fiche de programmation horaire du 1er trimestre

1er Trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombre d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
1er Octobre au 31 Décembre	CB1	1	Fonctions numériques d'une variable réelle : généralités	5H	2H	2H	8H	33H
		2	Limite et dérivation	5H	2H		8H	
11 semaines	CB2	1	Equations, inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$	5H	2H	2H	8H	
		2	Fonctions polynômes, fonctions rationnelles	5H	3H		9H	

FICHE DE PROGRESSION DU 1er TRIMESTRE

Trimestre	Période	Contenus	
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre-Statistique-Probabilité
1	1er Octobre au 10 Novembre	- Fonctions numériques d'une variable réelle : généralités	- Equations et inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$
	11 Novembre au 31Décembre	- Limite et dérivation	- Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Première L Premier trimestre

Compétence de Base 1

Première S/E–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les généralités sur les fonctions numériques, les limites et la dérivation.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
- Fonctions numériques d'une variable réelle : généralités	- Définir une fonction numérique. - Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité et en déduire l'ensemble d'étude de fonctions. - Effectuer les opérations sur les fonctions. - Construire les courbes représentatives des fonctions associées à une fonction $f : x \mapsto f(x-a)$; $x \mapsto f(x)+b$; $x \mapsto -f(x)$; $x \mapsto \|f(x)\|$; $x \mapsto f(-x)$; $x \mapsto f(kx)$. - Déterminer les éléments de symétrie (centre ou axe de symétrie) d'une courbe. - Déterminer les extrema (minimum, maximum,	- Définition d'une fonction numérique. - Détermination de l'ensemble de définition puis l'étude de la parité et déduction de l'ensemble d'étude de fonctions. - Opérations sur les fonctions. - Construction des courbes représentatives des fonctions associées à une fonction $f : x \mapsto f(x-a)$; $x \mapsto f(x)+b$; $x \mapsto -f(x)$; $x \mapsto \|f(x)\|$; $x \mapsto f(-x)$; $x \mapsto f(kx)$. - Détermination des éléments de symétrie (centre ou axe de symétrie) d'une courbe. - Détermination des extrema (minimum, maximum, minorant, majorant) d'une fonction.

	- Limite et dérivation	minorant, majorant) d'une fonction. - Déterminer de façon intuitive la limite d'une fonction en un point, en $+\infty$ et en $-\infty$. - Calculer la limite d'une fonction en un nombre x_0(éventuellement à gauche, à droite) en$+\infty$, en$-\infty$ en utilisant les opérations sur les limites. - Définir une fonction dérivable en un nombrex_0. - Utiliser la définition pour démontrer qu'une fonction est dérivable en un nombre x_0. - Calculer le nombre dérivé (éventuellement à gauche, à droite) d'une fonction en un nombre x_0. - Déterminer l'approximation affine locale d'une fonction en un nombre x_0. - Déterminer une équation de la tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction et la construire. - Etudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle : fonction dérivée d'une fonction. - Etudier la dérivabilité de la somme, du produit, du quotient et d'une fonction associée à une fonction.	- Détermination de façon intuitive de la limite d'une fonction en un point, en $+\infty$ et en $-\infty$. - Calcul de la limite d'une fonction en un nombre x_0(éventuellement à gauche, à droite), en$+\infty$, en $-\infty$ en utilisant les opérations sur les limites. - Définition d'une fonction dérivable en un nombre x_0. - Utilisation de la définition pour démontrer qu'une fonction est dérivable en un nombrex_0. - Calcul du nombre dérivé (éventuellement à gauche, à droite) d'une fonction en un nombre x_0. - Détermination de l'approximation affine locale d'une fonction en un nombre x_0. - Détermination d'une équation de la tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction. - Construction de cette tangente. - Etude de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle : fonction dérivée d'une fonction. - Etude de la dérivabilité de la somme, du produit, du quotient et d'une fonction associée à une fonction. - Etude du sens de variation d'une fonction en

		- Etudier le sens de variation d’une fonction en utilisant sa dérivée. - Déterminer les extrema d’une fonction en utilisant sa dérivée.	utilisant sa dérivée. - Détermination des extrema d’une fonction en utilisant sa dérivée.

- **Première S/E–CB2 :** L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les équations et inéquations du second degré dans ℝ, les fonctions polynômes et rationnelles.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
- Equations et inéquations du second degré dans ℝ. - Fonctions polynômes-Fonctions rationnelles	- Résoudre les équations et inéquations du second degré. - Résoudre des problèmes se ramenant aux équations et inéquations du second degré. - Factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à deux connaissant une au moins de ses racines. - Etudier les signes d'une fonction polynôme après l'avoir factorisée. - Simplifier une fonction rationnelle. - Etudier les signes d'une fonction rationnelle.	- Résolution des équations et inéquations du second degré. - Résolution des problèmes se ramenant aux équations et inéquations du second degré. - Factorisation d'un polynôme de degré supérieur ou égal à deux connaissant une au moins de ses racines. - Etude de signes d'une fonction polynôme après l'avoir factorisée. - Simplification d'une fonction rationnelle. - Etude de signes d'une fonction rationnelle.

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHE DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCE

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du premier trimestre

Leçon : Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle

SEQUENCE 1

Définition d'une fonction numérique à variables réelles

Objectifs

Définir une fonction numérique

Définition

A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$.

Une fonction numérique à variables réelles f est une relation qui à chaque élément x de l'ensemble de départ A associe au plus un élément y = f(x) de l'ensemble d'arrivée B.

x est appelé antécédent de y = f(x) par f et y = f(x) est l'image de x par f.

Une fonction numérique à variables réelles f peut être définie par :

– *une formule explicite.*

Exemples

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 2x + 1$

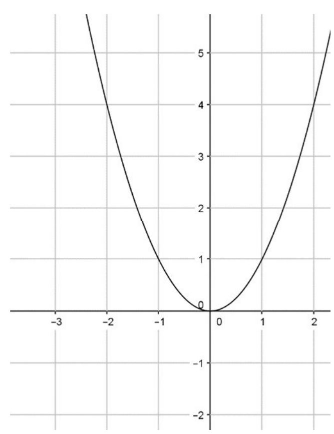
2) $g(x) = \sqrt{x-2}$

– *un tableau de valeurs.*

Exemple

x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16

– *une représentation graphique dans un repère (O, I, J).*



SEQUENCE 2

Ensemble de définition d'une fonction numérique à variables réelles

Objectifs

Déterminer l'ensemble de solution d'une fonction numérique à variables réelles

Définition

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Les réels x pour lesquels on peut calculer $f(x)$ constituent un ensemble appelé ensemble de définition ou domaine de définition de la fonction f noté D_f.

Lorsque pour tout x élément de D_f, $-x$ appartient aussi à D_f, on dit que D_f est symétrique par rapport à 0.

Remarque

Pour les fonctions :

- $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$,

$f(x)$ existe si et seulement si $B(x) \neq 0$.

- $f(x) = \sqrt{A(x)}$,

  $f(x)$ existe si $A(x) \geq 0$.

Exemples

Déterminons le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $(x-1)(x+1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x-1 \neq 0$ et $x+1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -1$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1;\ -1\} =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

Comme pour tout x élément de D_f, $-x$ appartient aussi à D_f, D_f est symétrique par rapport à 0.

2) $f(x) = \sqrt{x+2}$

$f(x)$ existe si $x+2 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -2$

$D_f = [-2\,;+\infty[$.

D_f n'est pas symétrique par rapport à 0.

SEQUENCE 3

Parité d'une fonction numérique à variables réelles

Objectifs

Etudier la parité et/ou la périodicité d'une fonction

Parité

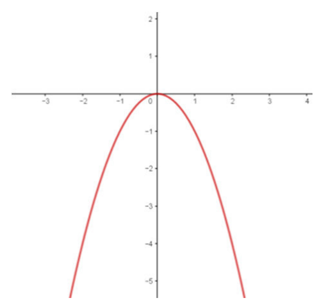
f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, D_f son domaine de définition.

a) f est paire si :

- *D_f est symétrique par rapport à 0 ;*
- *pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$.*

NB :

Dans un repère (O, I, J), la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (O, J) des ordonnées.



Exemple

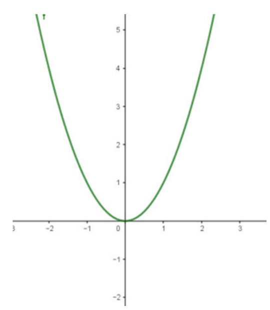
On donne $f(x) = x^2$.

On sait que $D_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.

Puis, $f(-x) = (-x)^2$

$= x^2 = f(x)$

f est donc paire.



b) f est impaire si :

- *D_f est symétrique par rapport à 0 ;*
- *pour tout x de D_f, $f(-x) = -f(x)$.*

NB :

Dans un repère (O, I, J), la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Exemple

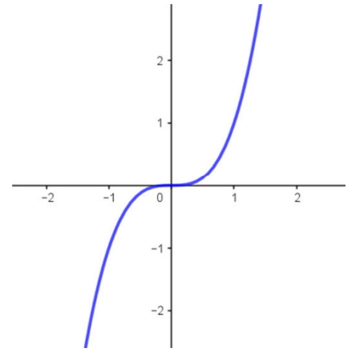
On donne $f(x) = x^3$.

On sait que $D_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

Puis, $f(-x) = (-x)^3$

$= -x^3 = -f(x)$

f est donc impaire.



SEQUENCE 4

Comparaison de fonctions numériques à variables réelles

Objectifs

Comparer des fonctions numériques à variables réelles

Vocabulaire et notation

f et g étant deux fonctions numériques définies sur un même intervalle E, f est inférieure à g sur E signifie que pour tout x élément de E, $f(x) \leq g(x)$.

On écrit $f \leq g$ sur E.

Maximum, minimum

Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E.

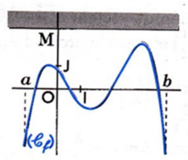
- *Soit α un élément de E. On dit que f présente en α un **maximum** égal à $f(\alpha)$ sur E, si et seulement si, pour tout réel x contenu dans E, $f(x) \leq f(\alpha)$.*
- *Soit β un élément de E. On dit que f présente en β un **minimum** égal à $f(\beta)$ sur E, si et seulement si, pour tout réel x contenu dans E, $f(x) \geq f(\beta)$.*

Fonction majorée, minorée, bornée

Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E.

- *Soit M un élément de $\mathbb{R}$. On dit que f est majorée sur E par M si et seulement si pour tout réel x contenu dans E, $f(x) \leq M$.*

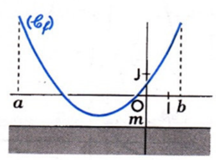
f est majorée par M sur $[a\ ;\ b]$



$(\mathscr{C}_f)$ est « au-dessous » de la droite d'équation $y = M$.

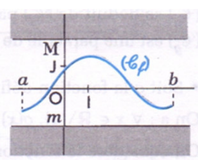
– *Soit m un élément de* $\mathbb{R}$. *On dit que f est minorée sur E par m si et seulement si pour tout réel x contenu dans E,* $f(x) \geq m$.

f est minorée par *m* sur $[a\ ;\ b]$



$(\mathscr{C}_f)$ est « au-dessus » de la droite d'équation $y = m$.

– *f est bornée sur E si et seulement si f est, à la fois, majorée et minorée sur E.*



$(\mathscr{C}_f)$ est « entre » les droites d'équations $y = m$ et $y = M$.

On dit que m est un minorant de f sur E et M est un majorant de f sur E.

Remarque

Une fonction est positive (respectivement négative) sur un intervalle E si elle admet 0 pour minorant (respectivement 0 pour majorant) sur E.

La représentation graphique d'une fonction positive (respectivement négative) est au-dessus (respectivement en-dessous) de l'axe des abscisses.

Fonctions égales

Définition

Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :

– *f et g ont même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée ;*

- *f et g ont même domaine de définition D ;*
- *pour tout x élément de D, f(x) = g(x).*

Restriction, prolongement d'une fonction

Définition

On donne une fonction f définie de E vers F et E' une partie de E.

- *On appelle restriction de la fonction f à E' la fonction* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

- *La fonction f est alors appelée le prolongement de la fonction g E.*

SEQUENCE 5

Opérations sur les fonctions

Objectifs

Faire des opérations avec les fonctions numériques

Propriétés

f et g étant deux fonctions de domaines de définition respectifs D_f *et* D_g*, on retiendra les résultats suivants :*

	Notation	Ensemble de définition	Formule explicite
Somme	$f+g$	$D_f \cap D_g$	$(f+g)(x)= f(x)+g(x)$
Produit	$f \times g$	$D_f \cap D_g$	$(f\times g)(x)= f(x)\times g(x)$
Quotient	$\frac{f}{g}$	$(D_f \cap D_g) \setminus \{x/\ g(x)\ = 0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Remarques

On définit aussi les fonctions suivantes :

- produit d'une fonction par un réel $k : (kf)(x) = k\times(f(x))$, avec $D_{kf} = D_f$;
- puissance $n^{ième}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une fonction : $(f^n)(x) = [f(x)]^n$, avec $D_{f^n} = D_f$;
- inverse d'une fonction : $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$, avec $D_{\frac{1}{f}} = D_f \setminus \{x \in \mathbb{R} \ /\ f(x) = 0\}$;
- racine d'une fonction : $\left(\sqrt{f}\right)(x)=\sqrt{f(x)}$, avec $D_{\sqrt{f}} = D_f \setminus \{x \in \mathbb{R} \ /\ f(x) < 0\}$.

SEQUENCE 6

Fonctions associées

Objectifs

Déduire les courbes représentatives des fonctions associées à une fonction f : $x \longmapsto -f(x)$; $x \longmapsto f(-x)$; $x \longmapsto |f(x)|$ de celle de f.

NB : Dans ce paragraphe, on admettra que le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

On désigne par f une fonction, (c_f) sa représentation graphique, a et b deux nombres réels.

Les fonctions $x \longmapsto -f(x)$; $x \longmapsto f(-x)$; $x \longmapsto f(kx)$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$; $x \longmapsto |f(x)|$; $x \longmapsto f(x-a)$; $x \longmapsto f(x)+b$ sont appelées des fonctions associées à la fonction f.

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment les courbes représentatives des fonctions associées se déduisent de celle de f notée (c_f).

Fonctions $x \longmapsto -f(x)$ et $x \longmapsto f(-x)$

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

- *La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ se déduit de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe (OI).*
- *La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ se déduit de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).*

Fonctions $x \longmapsto |f(x)|$

Propriété

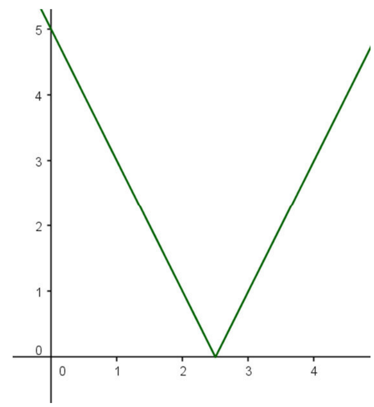
Dans un repère orthogonal (O, I, J) la courbe représentative de la fonction $g : x \longmapsto |f(x)|$ *est la réunion des parties des courbes d'équations respectives* $y = f(x)$ *et* $y = -f(x)$ *situées au – dessus de l'axe (OI).*

Exemple

On donne $g(x) = |2x - 5|$.

Pour représenter la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal (O, I, J), on trace les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 2x - 5$ et $y = -2x + 5$.

La courbe représentative de la fonction g est la réunion de deux demi – droites situées au – dessus de (OI).



SEQUENCE 7

Fonctions associées

Objectifs

Déduire les courbes représentatives des fonctions associées à une fonction f :

$x \longmapsto f(kx)$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$; $x \longmapsto f(x - a)$; $x \longmapsto f(x) + b$ de celle de f.

Fonction $x \longmapsto f(kx)$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$

Cas général

De manière générale, si $g(x) = f(kx)$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$*, un point* $M\binom{x}{y}$ *appartient à la courbe* (C_f) *représentative de f équivaut à dire que le point* $M'\begin{pmatrix}\frac{x}{k}\\ y\end{pmatrix}$ *appartient à la courbe* (C_g)*.*

On obtient donc la courbe (C_g) *représentative de la fonction* $g(x) = f(kx)$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$ *:*

- *par étirement de* (C_f) *si* $0 < k < 1$ *;*

- *par contraction de* (C_f) *si* $k > 1$.

Fonctions $x \longmapsto f(x-a)$; $x \longmapsto f(x) + b$

Propriétés

f est une fonction, (C_f) *sa représentation graphique dans un repère (O, I, J).*

- *La courbe représentative (C') de la fonction* $x \longmapsto f(x-a)$ *se déduit de* (C_f) *par la translation de vecteur* $a\overrightarrow{OI}$.
- *La courbe représentative (C'') de la fonction* $x \longmapsto f(x) + b$ *se déduit de* (C_f) *par la translation de vecteur* $b\overrightarrow{OJ}$.
- *La courbe représentative de la fonction* $x \longmapsto f(x-a) + b$ *se déduit de* (C_f) *par la translation de vecteur* $\vec{u}\binom{a}{b}$.

Exercices

1) On donne $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - 4$.
   a) Mets $g(x)$ sous sa forme canonique.
   b) En considérant la fonction f: $x \longmapsto -\frac{2}{3}x^2$, déduit la représentation graphique de g à partir de celle de f. Conclus.

Remarques

De manière générale,

- la courbe représentative de la fonction f: $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est une parabole. En effet pour tout x réel, on a : $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$
- la courbe représentative de la fonction f: $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0)$ est une hyperbole.
  En effet pour tout x réel différent de $\frac{-d}{c}$, on a : $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{k}{x+\frac{d}{c}}$ où $k = \frac{bc-ad}{c^2}$.

Exercices

1) On donne $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$. Après avoir donné la forme canonique de $f(x)$, déduis la courbe représentative de f à partir de celle de la fonction $x \longmapsto x^2$.

2) Dans un repère orthogonal (O, I, J), trace la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{3x-2}{x-1}$.

SEQUENCE 8

Eléments de symétrie d'une courbe (Axe de symétrie)

Objectifs

Déterminer et utiliser l'axe de symétrie pour représenter graphiquement une fonction.

NB : Le plan étant rapporté à un repère orthonormal (O, I, J), on désigne par (C_f)la représentation graphique de la fonction f.

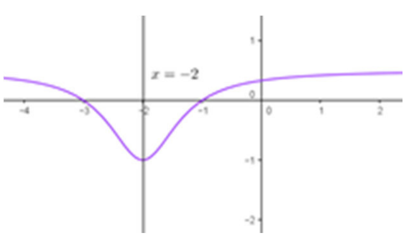
Axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées

Soit a un réel.

Deux points M$\binom{x}{y}$ et M'$\binom{x'}{y'}$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = a$ si le point A$\binom{a}{0}$ de l'axe des abscisses est milieu du segment [xx'] c'est-à-dire que $a = \frac{x+x'}{2} \Leftrightarrow x' = 2a - x$ (1)

Et comme M et M' sont symétriques par rapport à $x = a$, $y = y'$ (2).

(1) et (2) permettent de dire que deux points M$\binom{x}{y}$ et M'$\binom{x'}{y'}$sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = a$ si et seulement si $\begin{cases} x' = 2a + x \\ y' = y \end{cases}$



Cas général

a étant un réel, f une fonction D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J).

(C_f)admet la droite (Δ) d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si et seulement si :

$\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de} D_f \text{ , } 2a - x \text{ appartient à} D_f \\ \text{et } f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

Remarque

Pour montrer que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétriede la courbe représentative d'une fonction f, on peut aussi procéder à un changement de repère de façon à obtenir dans ce nouveau repère une équation de (C_f) de la forme $Y = g(X)$et vérifier g est une fonction paire.

Exercice

On donne $f(x) = \frac{x^2+4x+5}{|x+2|}$. Montre que la courbe représentative de la fonction $f$admet la droite d'équation $x = -2$ pour axe de symétrie

SEQUENCE 9

Eléments de symétrie d'une courbe (Centre de symétrie)

Objectifs

Déterminer et utiliser le centre de symétrie pour représenter graphiquement une fonction.

Centre de symétrie

a et b sont deux réels. Deux points M$\binom{x}{y}$ et M'$\binom{x'}{y'}$ sont symétriques par rapport au point A$\binom{a}{b}$ si et seulement si $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

Cas général

a et b étant un réel, f une fonction D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J).

(C_f)admet le point $A\binom{a}{b}$ pour centre de symétrie si et seulement si :

$\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de} D_f \text{ , } 2a - x \text{ appartient à} D_f \\ \text{et } f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

Remarque

Pour montrer que le point $A\binom{a}{b}$ est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction *f*, on peut aussi utiliser le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On forme alors l'équation $Y = g(X)$de (C_f)dans ce nouveau repère et vérifier que g est une fonction impaire.

SEQUENCE 10

Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Objectifs

Déterminer la limite infinie ou finie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Notion intuitive de la limite

Limite en $-\infty$ ou $+\infty$

Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$

Vocabulaire et notation

f est une fonction définie pour des plus petites valeurs de x $(-\infty)$ *ou des plus grandes valeurs de x* $(+\infty)$*.*

- *Si l'on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut en choisissant x suffisamment grand, on dit que f(x) tend vers* $+\infty$ *quand x tend vers* $+\infty$ *et on note :* $\lim_{x \to +\infty}^{f(x)} = +\infty$. *« On lit : la limite de f(x) quand x tend vers* $+\infty$ *est égale à* $+\infty$*) ».*

- *De même, si l'on peut rendre f(x) aussi négatif (mais infiniment grand en valeur absolue) que l'on veut en choisissant x négatif (mais infiniment grand en valeur absolue), on dit que f(x) tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et on note :*

  $lim_{x\longrightarrow-\infty}^{f(x)} = -\infty$. *« On lit : la limite de f(x) quand x tend vers +∞ est égale à +∞) ».*

Limite finie en $-\infty$ ou $+\infty$

Vocabulaire et notation

g est une fonction définie pour des plus petites valeurs de x ($-\infty$) ou des plus grandes valeurs de x ($+\infty$) et x_0 une valeur réelle donnée.

- *Si l'on peut rendre f(x) plus proche de x_0 en choisissant x suffisamment grand ($+\infty$), on dit que f(x) tend vers x_0 quand x tend vers $+\infty$ et on note :*

  $lim_{x\longrightarrow+\infty}^{f(x)} = x_0$.
- *De même, si l'on peut rendre f(x) plus proche de x_0 en choisissant x suffisamment petit ($-\infty$), on dit que f(x) tend vers x_0 quand x tend vers $-\infty$ et on note :*

  $lim_{x\longrightarrow-\infty}^{f(x)} = x_0$.

SEQUENCE 11

Limite des fonctions élémentaires en $+\infty$ et en $-\infty$

Objectifs

Déterminer la limite des fonctions élémentaires en $+\infty$ et en $-\infty$

Limite en $-\infty$ ou $+\infty$ des fonctions élémentaires

On admet les résultats suivants.

- *f(x) = k.*

  $lim_{x\longrightarrow-\infty}^{f(x)} = k$ *et* $lim_{x\longrightarrow+\infty}^{f(x)} = k$.

- *f(x) = x*

  $lim_{x\longrightarrow-\infty}^{f(x)} = -\infty$ *et* $lim_{x\longrightarrow+\infty}^{f(x)} = +\infty$.

- *f(x) =* $\sqrt{x}$

  $lim_{x\longrightarrow+\infty}^{f(x)} = +\infty$.

- $f(x) = x^2$

  $\lim_{x \to -\infty}^{f(x)} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty}^{f(x)} = +\infty$.

- $f(x) = x^3$

  $\lim_{x \to -\infty}^{f(x)} = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty}^{f(x)} = +\infty$.

- $f(x) = \frac{1}{x}$

  $\lim_{x \to -\infty}^{f(x)} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty}^{f(x)} = 0$.

Remarques

- La limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$ lorsqu'elle existe, elle est unique.
- Certaines fonctions n'admettent pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.
- Une fonction n'admet pas de limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si son domaine de définition est majoré (respectivement minoré).

Exemple

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'admet pas de limite en $-\infty$ car son ensemble de définition $[0 ; +\infty[$ est minoré.

SEQUENCE 12

Limite d'une fonction en $x_0 \in \mathbb{R}$

Objectifs

Déterminer la limite d'une fonction en $x_0 \in \mathbb{R}$

Limite infinie en $x_0 \in \mathbb{R}$

Vocabulaire et notation

f est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.

- *Si l'on peut rendre f(x) suffisamment grand ($+\infty$) en choisissant x plus proche de x_0, on dit que f(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on note :*

  $\lim_{x \to x_0}^{f(x)} = +\infty$.
- *De même, si l'on peut rendre f(x) suffisamment petit ($-\infty$) en choisissant x plus proche de x_0, on dit que f(x) tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et on note :*

  $\lim_{x \to x_0}^{f(x)} = -\infty$.

Limite finie en $\boldsymbol{x_o} \in \mathbb{R}$

Propriété

f est une fonction définie en x_0. Si f admet une limite en x_0 alors $\lim_{x\to x_0}^{f(x)} = f(x_0)$.

Remarques

- Lorsqu'une fonction admet une limite en x_0 alors cette limite est unique.
- Une fonction définie en x_0 n'admet pas nécessairement de limite en x_0.

SEQUENCE 13

Limite à gauche, limite à droite en $\boldsymbol{x_o} \in \mathbb{R}$

Objectifs

Déterminer la limite à gauche, la limite à droite en $x_o \in \mathbb{R}$ d'une fonction

Vocabulaire et notation

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, on ne peut calculer f($x_0$) mais on peut calculer f(x) pour des valeurs de x plus proches de x_0 à gauche ou à droite.

- *Pour des valeurs de x plus proches de x_0 à gauche, ou bien quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures ou négatives, on note :$\lim_{x\to x_0^<}^{f(x)}$ ou $\lim_{x\to x_0^-}^{f(x)}$.*
- *Pour des valeurs de x plus proches de x_0 à droite, ou bien quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures ou positives, on note :$\lim_{x\to x_0^>}^{f(x)}$ ou $\lim_{x\to x_0^+}^{f(x)}$.*

Exercice

On donne *f(x)*= $\sqrt{x}$.

Calcule *f(0)*et $lim_{x\to 0^+}^{f(x)}$. Conclus. Peux-tu calculer $lim_{x\to 0^-}^{f(x)}$? Pourquoi ?

SEQUENCE 14

Limite en $\boldsymbol{x_o}$ ($\boldsymbol{x_o} \in \mathbb{R}$) des fonctions élémentaires

Objectifs

Déterminer la limite en x_o ($x_o \in \mathbb{R}$) des fonctions élémentaires

Limite en $\boldsymbol{x_o}$ ($\boldsymbol{x_o} \in \mathbb{R}$) des fonctions élémentaires

On admet les résultats suivants.

– $f(x) = k$.

$lim_{x\to x_o}^{f(x)} = k$.

– $f(x) = x$

$lim_{x\to x_o}^{f(x)} = x_o$.

– $f(x) = \sqrt{x}$

$lim_{x\to 0}^{f(x)} = 0$.

– $f(x) = x^n$, $n\in\mathbb{N}^*$

$lim_{x\to 0}^{f(x)} = 0$.

– $f(x) = \frac{1}{x^n}$

si $n\in \mathbb{N}^*$ *et n pair,*

$lim_{x\to 0^-}^{f(x)} = +\infty$ *et* $lim_{x\to 0^+}^{f(x)} = +\infty$.

si $n\in \mathbb{N}$ *et n impair,*

$lim_{x\to 0^-}^{f(x)} = -\infty$ *et* $lim_{x\to 0^+}^{f(x)} = +\infty$

En particulier, pour $f(x) = \frac{1}{x}$

$lim_{x\to 0^-}^{f(x)} = -\infty$ *et* $lim_{x\to 0^+}^{f(x)} = +\infty$.

Exercice

Dans chacun des cas suivants, conjecture à l'aide d'une calculatrice le comportement de *f(x)* lorsque *x* prend des valeurs de plus en plus grandes.

a) $f(x) = 5x^2 - 1000$.
b) $f(x) = 0{,}0003x^3 - 10x^2 - 10^6$.

SEQUENCE 15

Calculs de limites

Objectifs

Calculer les limites d'une fonction en utilisant les propriétés de comparaison

Propriétés de comparaison

Majoration – Minoration

On admet les propriétés suivantes.

Propriétés

f est une fonction.

- *S'il existe une fonction g telle que pour tout $x \in]A ; +\infty[$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$*
- *S'il existe une fonction g telle que pour tout $x \in]A ; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.*

Exemple

On donne la fonction f définie par $f(x) = |x|(x+1)$.

$D_f = \mathbb{R}$ *et pour* $x \in [0 ; +\infty[$,

$f(x) = |x|(x+1)$

$= x^2 + x$

Donc $f(x) \geq x^2$ *pour* $x \in [0 ; +\infty[$ et comme $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque

On obtient une propriété analogue :

- quand x tend vers $-\infty$ en remplaçant l'intervalle $]A ; +\infty[$ par $]-\infty ; A[$;
- quand x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures) en remplaçant l'intervalle $]A ; +\infty[$ par un intervalle de ouvert de centre x_0 (éventuellement $]a ; x_0[$ ou $]x_0 ; b[$).

SEQUENCE 16

Calculs de limites

Objectifs

Calculer les limites d'une fonction en utilisant le théorème des gendarmes

Théorème des gendarmes

Propriété

f est une fonction.

S'il existe deux fonctions g et h telles que pour tout $x \in]A ; +\infty[$ *,* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = l$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$*.*

Exemple

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+E(x)}$ où $E(x)$ désigne la fonction partie entière.

$D_f =]-\infty ; -1[\cup [0 ; +\infty[$ et pour tout $x \in]-\infty ; -1[\cup [0 ; +\infty[$, $E(x) \leq x \leq E(x) + 1$.

Ainsi, pour $x \in [0 ; +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Et comme $\lim_{x \to +\infty} 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Remarque

- Le théorème des gendarmes est parfois formulée de la façon suivante : « *s'il existe une fonction g et un réel l tels que* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ *et* $|f(x) - l| \leq g(x)$ *sur un intervalle* $]A ; +\infty[$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ».
- On a aussi une propriété analogue quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures).

Exemple

On donne $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$.

$D_f = \mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leq x^2$.

Or $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. On en déduit que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

SEQUENCE 17

Calculs de limites

Objectifs

Calculer les limites d'une fonction en utilisant le théorème des gendarmes

Théorème des gendarmes

Propriété

f est une fonction.

S'il existe deux fonctions g et h telles que pour tout $x\in]A;+\infty[$ *,* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty}^{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}^{h(x)} = l$ *alors* $\lim_{x\to+\infty}^{f(x)} = l$.

Exemple

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+E(x)}$ où $E(x)$ désigne la fonction partie entière.

$D_f =]-\infty\,;-1[\cup[0\,;+\infty[$ et pour tout $x\in]-\infty\,;-1[\cup[0\,;+\infty[$, $E(x)\leq x \leq E(x)+1$.

Ainsi, pour $x\in[0\,;+\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Et comme $\lim_{x\to+\infty}^{0} = \lim_{x\to+\infty}^{\frac{1}{x}} = 0$

alors $\lim_{x\to+\infty}^{f(x)} = 0$

Remarque

- Le théorème des gendarmes est parfois formulée de la façon suivante : « *s'il existe une fonction g et un réel l tels que* $\lim_{x\to+\infty}^{g(x)} = 0$ *et* $|f(x) - l| \leq g(x)$ *sur un intervalle* $]A;+\infty[$ *alors* $\lim_{x\to+\infty}^{f(x)} = l$ *».*
- On a aussi une propriété analogue quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures).

Exemple

On donne $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$.

$D_f = \mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. Donc pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $|f(x)|\leq x^2$.

Or $\lim_{x\to 0}^{x^2} = 0$. On en déduit que $\lim_{x\to 0}^{f(x)} = 0$.

SEQUENCE 18

Calculs de limites

Objectifs

Calculer les limites d'une fonction en utilisant le théorème des gendarmes

Théorème des gendarmes

Propriété

f est une fonction.

S'il existe deux fonctions g et h telles que pour tout $x \in]A ; +\infty[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = l$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Exemple

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+E(x)}$ où $E(x)$ désigne la fonction partie entière.

$D_f =]-\infty ; -1[\cup [0 ; +\infty[$ et pour tout $x \in]-\infty ; -1[\cup [0 ; +\infty[$, $E(x) \leq x \leq E(x) + 1$.

Ainsi, pour $x \in [0 ; +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Et comme $\lim_{x \to +\infty} 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Remarque

- Le théorème des gendarmes est parfois formulée de la façon suivante : « *s'il existe une fonction g et un réel l tels que* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ *et* $|f(x) - l| \leq g(x)$ *sur un intervalle* $]A ; +\infty[$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ».
- On a aussi une propriété analogue quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures).

SEQUENCE 19

Comparaison de limites, limites et opérations sur les fonctions

Objectifs

- Comparer les limites de fonctions ;
- utiliser les opérations pour déterminer les limites de fonctions

Propriété

f et g sont deux fonctions telles que pour tout $x \in]A\,;+\infty[$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l'$ alors $l \leq l'$.

Remarque

On a une propriété analogue quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou supérieures).

Limites et opérations sur les fonctions

Dans ce paragraphe, sont données les propriétés relatives aux limites en x_0 des $f+g$; $f\times g$; $\frac{1}{g}$; $|f|$; $\sqrt{f}$ connaissant les limites en x_0 des fonctions f et g.

Ces propriétés restent vraies pour les limites de ces fonctions en $+\infty$, $-\infty$ et en x_0 par valeurs supérieures ou inférieures.

Lorsqu'on ne peut directement conclure, on dit qu'il y a indétermination et on signale par !!.

Limite de la somme de deux fonctions

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to x_0} f(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	!!

Limite du produit de deux fonctions

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \to x_0} f(x)$	l'	$l'(l' \neq 0)$	$l'(l' \neq 0)$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x)$	ll'	$\begin{cases} -\infty \text{ si } l' < 0 \\ +\infty \text{ si } l' > 0) \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty \text{ si } l' > 0 \\ +\infty \text{ si } l' < 0) \end{cases}$	!!	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Remarque

On en déduit que si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ alors pour tout entier naturel n non nul,

$\lim_{x \to x_0} f^n(x) = l^n$.

SEQUENCE 20

Limites et opérations sur les fonctions

Objectif

Utiliser les opérations pour déterminer les limites de fonctions

Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$l (l \neq 0)$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) > 0$
$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Limite du produit de deux fonctions

Pour calculer la limite en x_0 de $\frac{f}{g}$, il suffit de remarquer que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et d'utiliser les propriétés précédentes.

Limite de la valeur absolue d'une fonction

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	l	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim_{x \to x_0} \lvert f(x) \rvert$	$\lvert l \rvert$	$+\infty$

Limite de la racine carrée d'une fonction

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$l(l \geq 0)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \lvert f(x) \rvert$	$\sqrt{l}$	$+\infty$

Limite de la fonction : $\boldsymbol{x \longmapsto f(ax + b)}$

Propriété

f est une fonction, x_0 un nombre réel et $u : x \longmapsto ax + b$ une fonction affine non constante. La fonction $x \longmapsto f(ax + b)$ admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite en

$ax_0 + b$.

On a alors $lim_{x \longrightarrow x_0}^{f(ax+b)} = lim_{u \longrightarrow ax_0+b}^{f(u)}$

Remarque

Pour retrouver cette formule, il suffit de poser $u = ax + b$. Quand x tend vers x_0, u tend vers $ax_0 + b$ et on obtient : $lim_{x \longrightarrow x_0}^{f(ax+b)} = lim_{u \longrightarrow ax_0+b}^{f(u)}$.

SEQUENCE 21

Recherche de limite lorsqu'il y a indétermination

Objectifs

Identifier les indéterminations et utiliser les propriétés pour les lever

Limite d'une fonction polynôme

Propriété

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ de son monôme de plus haut degré.

Exemples

1) Calculons la limite en $+\infty$de la fonction polynôme f: $x \longmapsto 3x^4 - 2x^2$

   On sait que pour tout x réel, $3x^4 - 2x^2 = 3x^4 (1 - \frac{2}{3x^2})$.

Or $\lim_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{2}{3x^2}) = 1$. Ainsi $\lim_{x \to +\infty} (3x^4 - 2x^2) = +\infty$.

2) Calculons $\lim_{x \to -\infty} (-3x^5 - \sqrt{2}x^4 + \pi x^3 - 105x^2 - 16x - 1000) = \lim_{x \to -\infty} (-3x^5) = +\infty$.

Limite d'une fonction rationnelle

Propriété

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples

1) Calculons la limite en $+\infty$ de la fonction f: $x \longmapsto \frac{3x^4 - 2x^2}{-5x^5 + 12}$.

$\lim_{x \to +\infty} (\frac{3x^4 - 2x^2}{-5x^5 + 12}) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{3x^4}{-5x^5}) = 0$.

2) $\lim_{x \to -\infty} (\frac{3x^6 + 2x^5 - 32x}{-7x^4 + 11x - 13}) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{3x^6}{-7x^4}) = \lim_{x \to -\infty} (\frac{3x^2}{-7}) = -\infty$.

Autres exemples

NB : Dans le calcul des limites de fonctions, lorsqu'on obtient un résultat du type : « $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $\infty - \infty$ », on dit qu'il y a indétermination. On ne peut rien conclure mais l'on cherchera à lever l'indétermination en utilisant :

- soit l'expression conjuguée ;
- soit la factorisation ;
- soit les deux procédés successivement.

Exemple

Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction f: $x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$.

En effet, $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = +\infty - \infty$!!

Il y a indétermination ; on ne peut rien conclure mais on sait pour tout x réel, $\sqrt{x^2 + 1} + x \neq 0$.

On peut écrire, en utilisant l'expression conjuguée de $\sqrt{x^2 + 1} - x$:

pour tout x réel, $\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = 0$.

SEQUENCE 22

Continuité

Objectifs

Définir une fonction continue en un point x_0 et utiliser les propriétés de continuité.

Définition et propriétés

Définition

f est une fonction et x_0 un nombre réel.

f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Propriétés

- *Les fonctions suivantes sont continues en tout élément x_0 de leur ensemble de définition :*

  $x \longmapsto |x|$; $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \longmapsto \cos x$; $x \longmapsto \sin x$.
- *f et g sont deux fonctions continues en x_0.*
  - *Les fonctions $f+g$; fg ; kf $(k\in\mathbb{R})$ et $|f|$ sont continues en x_0.*
  - *Si $g(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.*
  - *Si $f \geq 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.*
- *a et b étant deux réels tels que $a \neq 0$, f une fonction et g la fonction définie par $g(x) = f(ax+b)$. f est continue en $ax_0 + b$ si et seulement si g est continue en x_0.*

Exemples

- Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.
- La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ est continue en tout nombre réel x_0.

SEQUENCE 23

Prolongement par continuité

Objectifs

Définir le prolongement par continuité d'une fonction en un point x_0

Définition

f est une fonction non définie en x_0 et l un nombre réel tel que $lim_{x \longrightarrow x_0}^{f(x)} = l$. *On appelle prolongement de f par continuité en* x_0 *la fonction g définie par :* $\begin{cases} g(x) = f(x) si x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$

Exemple

On donne la fonction f définie par $f(x)= \frac{sinx}{x}$. On sait que $D_f = \mathbb{R}^*$ et $lim_{x \longrightarrow 0}\frac{sinx}{x} = 1$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{sinx}{x} \ si \ \ x \in D_f \\ g(0) = 1 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en 0.

SEQUENCE 24

Dérivation : Fonction dérivable en un nombre x_0

Objectifs

Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point x_0 et déterminer le nombre dériv

Nombre dérivé d'une fonction en x_0

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et x_0 un élément de I. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite finie l c'est-à-dire

$lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l.$

Dans ce cas, l est appelé nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

Remarques

- Dans cette définition, si on remplace x par $x_0 + h$ où h est un nombre quelconque de I, on peut écrire :$lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$=$lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$=$l$.

Cette deuxième écriture est souvent utilisée.

- Par abus de langage on dira parfois que f est dérivable en un **point** x_0 de I

Exemple

On donne $f(x)=x^2$.Montrons que f est dérivable en un nombre réel a quelconque .

On a :$lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$= $lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$=$lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$=$2a \in \mathbb{R}$ donc fest dérivable en tout nombre réel a.

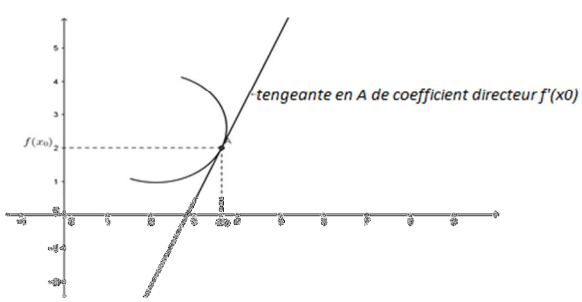
Interprétation graphique : équation de la tangente en un nombre x_0 de I.

Le taux d'accroissement de f en x_0 représente le coefficient directeur d'une droite passant par un point A(x_0, $f(x_0)$). Le nombre dérivé qui est un « taux limite » permet de définir une « droite limite »

Définition

Soit f une fonction dérivable en x_0

On appelle tangente à la courbe (C_f) d'une fonction f au point A(x_0, $f(x_0)$) la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$.



Une équation *de cette tangente est : $y= f'(x_0)\ (x-x_0) + f(x_0)$.*

SEQUENCE 25

Dérivabilité et continuité

Objectifs

Démontrer la continuité d'une fonction en utilisant sa dérivabilité

Propriété

Si une fonction f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0

En effet :

Supposons f dérivable en x_0 de I :

$\forall \in I, f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \times \lim_{x\to x_0}(x-x_0)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = f'(x_0)\ x_0$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$

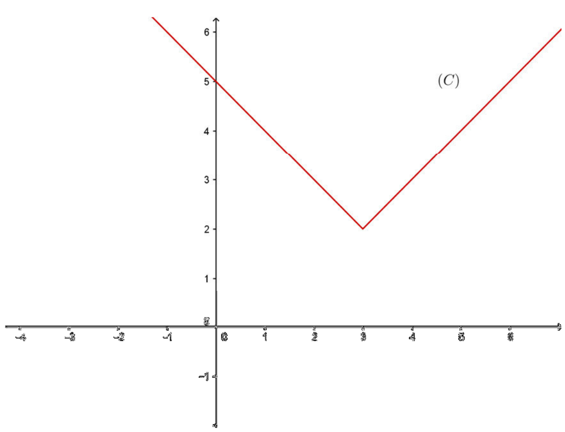
$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Donc f est continue en x_0.

Attention ! La réciproque est fausse.

En effet, si f est continue en un nombre x_0, cela ne veut pas dire qu'elle est forcément dérivable en ce nombre.

Exemple



La courbe de la fonction tracée ci-dessus est bien continue en 3 mais n'y est pas dérivable car on ne peut pas tracer la tangente en 3.

SEQUENCE 26

Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite x_0

Objectifs

Etudier la dérivabilité à gauche, la dérivabilité à droite d'un point

Définition

Soit f une fonction définie en un nombre x_0.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $]a,\ x_0]$ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à gauche en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé à gauche en x_0 noté $f'_g(x_0)$.

.On dit que f est dérivable à droite en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0, b[$ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à droite en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé à droite en x_0 noté $f'_d(x_0)$.

Propriété

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_g(x_0)=f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$

SEQUENCE 27

Fonctions dérivées

Objectifs

Calculer la fonction dérivée de fonctions élémentaires

Définition

Soit f une fonction

L'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable est appelé ensemble de dérivabilité de f.

La fonction $x \longmapsto f'(x)$ est appelé dérivée (ou fonction dérivée) de f.

Exemple

Le tableau suivant donne la dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
$x \longmapsto f(x)=k\ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto f'(x)=0$
$x \longmapsto f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto f'(x)=1$
$x \longmapsto f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto f'(x)=2x$
$x \longmapsto f(x)=\sqrt{x}\ (x \geq 0)$	$x>0$	$x \longmapsto f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto f(x)=\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$	$x \neq 0$	$x \longmapsto f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

Dérivée des fonctions cosx et sinx

Propriété

- *La fonction* $x \longmapsto f(x) = \cos x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* $f'(x) = -\sin x$.
- *La fonction* $x \longmapsto f(x) = \sin x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* $f'(x) = \cos x$.

SEQUENCE 28

Dérivées et opérations

Objectifs

Calculer la dérivée d'une somme, d'un produit et d'une puissance

Dérivée et somme

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I (intervalle ou réunion d'intervalle)alors la fonction $u+v$ *est dérivable sur I et* $(u+v)'=u'+v'$

Exemple

Si $f(x)= x^2+x+1$ alors sa dérivée est $f'(x)=2x+1$.

Dérivée et produit.

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sue I(intervalle ou réunion d'intervalle)alors la fonction uv est dérivable sur I et (uv)'=u'v+v'u.

Cas particuliers

- *Pour k réel,(ku)'=ku'.*
- $(u^2)'=2u'u$

Exemple

Si $f(x)=2x^2+x\sqrt{x}$ alors $f'(x)=2\times 2x+(1\times \sqrt{x}+x\times \frac{1}{2\sqrt{x}})=4x+\frac{3\sqrt{x}}{2}$.

Dérivée et puissance

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur I et n un entier naturel non nul.

Alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)'=nu'u^{n-1}$.

Cas particulier

$(x^n)'=nx^{n-1}$

Exemples

Si $f(x)=x^4+2x^3-5x+10$ alors $f'(x)=4x^3+2\times 3x^2-5\times 1=4x^3+6x^2-5x$.

Si $g(x)=3\cos^5x+\sin^3x$ alors
$g'(x)=3(5\sin x\cos^4x)+3(\cos x\sin^2x)=15\sin x\cos^4x+3\cos x\sin^2x=3\sin x\cos x\,(\sin x-5\cos^3x)$

- **Dérivée de l'inverse d'une fonction**

Propriétés

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec $v(x)\neq 0$ alors :

- *La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{1}{v})'=-\frac{v'}{v^2}$*
- *La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.*

- Dérivée de tan$x$

Propriété

La fonction tanx est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$ *et (tanx)'=*$\frac{1}{cos^2 x}$

- *Dérivée de f : x⟼u(ax+b)*

Propriété

Soit x⟼ax+b une fonction et x_0 un réel.

Si la fonction u est dérivable au nombre $y_0=ax_0+b$, alors la fonction f :x⟼u(ax+b) est dérivable en x_0, et $f'(x_0)=au'(ax_0+b)$.

Exemple

Si *f(x)=cos (5x+1) alors f'(x)=– 5sin (5x+1).*

- Dérivée de la racine carrée d'une fonction dérivable

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout x élément de I, u(x)> 0.

La fonction $\sqrt{u}$ *est dérivable sur I et on a* $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$..

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^3 - 5x + 7}$. *En posant* $u(x)=x^3- 5x+7$ *on a* $u'(x)=3x^2- 5$ *et* $f'(x)=\frac{3x^2-5}{2\sqrt{x^3-5x+7}}$.

Exercices

Dans chacun des cas suivants, détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f:

1) $(x^3- 4x^2+2x+4)(3x^2+7)$;
2) $\frac{x^3-5x^2}{x+2}$;
3) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$;

$f(x)=(x^3+2)\sqrt{2 - x}$.

SEQUENCE 29

Dérivées et opérations (Suite et fin)

Objectifs

Calculer la dérivée de l'inverse d'une fonction, de la composée de fonctions et de la racine carrée d'une fonction

Dérivée de l'inverse d'une fonction

Propriétés

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec v(x)≠ 0 alors :

- *La fonction* $\frac{1}{v}$ *est dérivable sur I et* $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$
- *La fonction* $\frac{u}{v}$ *est dérivable sur I et* $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Propriété

La fonction tanx est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$ *et* $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Propriété

Soit $x \longmapsto ax+b$ *une fonction et* x_0 *un réel.*

Si la fonction u est dérivable au nombre $y_0=ax_0+b$*, alors la fonction* $f : x \longmapsto u(ax+b)$ *est dérivable en* x_0*, et* $f'(x_0)=au'(ax_0+b)$.

Exemple

Si $f(x)=\cos(5x+1)$ alors $f'(x)=-5\sin(5x+1)$.

Dérivée de la racine carrée d'une fonction dérivable

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle Itel que, pour tout x élément deI,u(x)> 0.

La fonction $\sqrt{u}$ *est dérivable sur I et on a* $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^3 - 5x + 7}$.*En posant* $u(x)=x^3-5x+7$ *on a* $u'(x)=3x^2-5$ *et* $f'(x)=\frac{3x^2-5}{2\sqrt{x^3-5x+7}}$.

SEQUENCE 30

Application de la dérivation à l'étude des variations

Objectifs

Utiliser la dérivée pour étudier les variations de fonctions

Variation d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *Si f est croissante sur I, alors* $f'(x) \geq 0$ *pour tout x de I.*
- *Si f est décroissante sur I, alors* $f'(x) \leq 0$ *pour tout x de I.*
- *Si f est constante sur I, alors* $f'(x)= 0$ *pour tout x de I*

Théorème (Principe de Lagrange)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *Si la dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I ;*
- *Si f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en des nombres isolés où elle s'annule, alors f est strictement croissante su I ;*
- *Si f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en des nombres isolés où elle s'annule, alors f est strictement décroissante su I .*

Exemple

Étudions les variations de la fonction $f(x)=2x^4-x^2-1$.

f est définie sur $\mathbb{R}$ *.*

Il est conseillé d'écrire l'ensemble de définition sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles afin de pouvoir calculer toutes les limites.

- $D_f= \mathbb{R} =]-\infty , +\infty[$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=+\infty$
- f est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=8x^3-2x=2x(2x-1)(2x+1)$;
- Étudions le signe de f' :

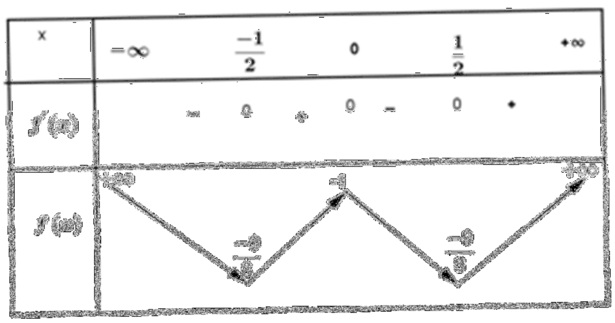
Le tableau de signe permet de conclure :

$\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $f'(x)<0$ et f est décroissante.

$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f'(x)>0$ et f est croissante.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ *ou* $x=0$ *ou* $x=\frac{1}{2}$

D'où le tableau de variation suivant :



SEQUENCE 31

Application de la dérivation à la détermination des extrémums de fonctions

Objectifs

Utiliser la dérivée pour déterminer les extrema de fonctions

Approximation d'une fonction par une fonction affine.

Définition

Soit f une fonction dérivable en x_0.

On appelle application affine tangente de f en x_0 l'application

$x \longmapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

On écrit $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *pour x voisin de x_0 ou (avec $x = x_0 + h$),* $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$ *pour x voisin de 0.*

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

Si f est dérivable en x_0, pour tout nombre réel h tel que x_0+h appartient à I, on a :

$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h)$ où $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

Démonstration

Posons $\varphi(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$ donc $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+h\varphi(h)$ et

$\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=f'(x_0)-f'(x_0)=0.$

Exercices

Donne une approximation d'ordre 0 (ou en 0) de chacune des fonctions suivantes :

$x\longmapsto (1+x)^2$; $x\longmapsto \sqrt{1+x}$; $x\longmapsto \frac{1}{1+x}$.

Leçons de la compétence de base 2 du premier trimestre

Leçon : équations, inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$ et systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

SEQUENCE 32

Equation du second degré dans $\mathbb{R}$

Objectifs

- Définir une équation du second degré ;
- donner la forme canonique d'un trinôme du second degré et calculer son discriminant.

Définition

On appelle équation du second degré une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont sont trois réels donnés avec a différent de 0.

Forme canonique

Propriété et définition

Il existe des réels α let β tels que pour tout x réel,

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$\quad = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Cette écriture $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée forme canonique de P.

Exercice

Déterminer la forme canonique des polynômes suivants :

$P(x) = -2x^2 + 24x - 3$ $\quad Q(x) = -x^2 + 5x - 6$ et $R(x) = 4x^2 - 4x + 1$

Discriminant

Définition

On appelle discriminant du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ le nombre réel note Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$

Remarque : Discriminant réduit

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ un polynôme du second degré.

Si $b' = \frac{b}{2}$ alors $\Delta = b^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$

Définition

Etant donné un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ s'il existe un réel b' tel que $b' = \frac{b}{2}$ alors P admet un discriminant appelé discriminant réduit qu'on note habituellement Δ' défini par $\Delta' = b'^2 - ac$

SEQUENCE 33

Factorisation et résolution des équations du second degré.

Objectifs

- Factoriser un trinôme du second degré ;
- Résoudre des équations du second degré.

Propriété

Soit P, le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ et Δ son discriminant.

- *Si $\Delta < 0$ alors P n'est pas factorisable et n'admet pas de racine réelle.*
- *Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et admet une racine unique $-\frac{b}{2a}$ appelée aussi racine double.*
- *Si $\Delta > 0$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et P admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 définies précédemment.*

Réciproquement, si un polynôme du second degré admet une forme factorisée, alors il admet deux racines éventuellement confondues. Cela permet de dire aussi que si un polynôme du second degré n'admet pas de racines (l'équation P(x)=0 n'admet pas de solution) alors il ne peut pas être mis sous forme factorisée.

Remarque

Lorsque le polynôme P admet un discriminant réduit, Δ', on a :

- *Si $\Delta' < 0$, P n'admet pas de racines et n'est pas factorisable.*
- *Si $\Delta' = 0$, P admet une racine double $x_o = \frac{-b'}{a}$ et sa forme factoriée est*

$P(x) = a(x - x_o)^2$

- *Si* $\Delta' > 0$, *P admet deux racines distinctes* $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta}}{a}$ *et* $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta\prime}}{a}$ *et sa forme factorisée est* $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exercice

Déterminer les racines éventuelles des polynômes suivants et factoriser-les si possible :

1) $2x^2 + 2x + 2$
2) $x^2 + 6x + 9$
3) $6x^2 - 13x + 6$

SEQUENCE 34

Somme des racines d'un polynôme du second dégré et interprétation graphique

Objectifs

- Déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit ;
- Interpréter graphiquement les solutions d'une équation du second degré.

Propriété

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si, ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Exemple

Déterminons deux nombres réels ayant pour somme -1 et pour produit -12

Désignons par S la somme et par P le produit

On a $x^2 - Sx + P = 0$ $soit$ $x^2 + x + 12 = 0$

Le polynôme $x^2 + x + 12$ a pour discriminant $\Delta = 49$ et les racines sont $x = -4$ et $x = 3$

Les deux nombres cherchés sont -4 et 3

On peut remarquer que la somme de ces deux nombres est effectivement -1 et le produit est -12

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ X $\mathbb{R}$

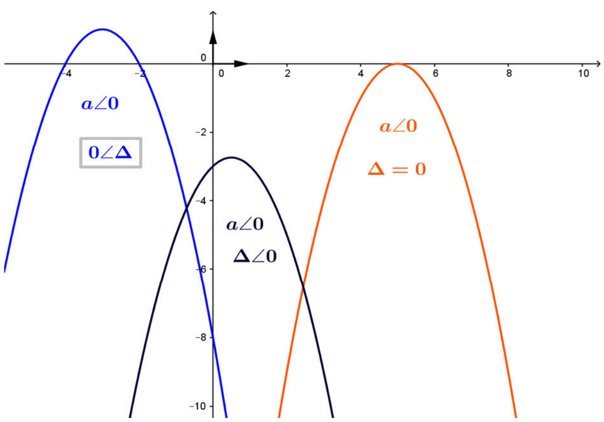
$\begin{cases} x + y = -9 \\ xy = 20 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} a + b = 2 \\ xy = -8 \end{cases}$

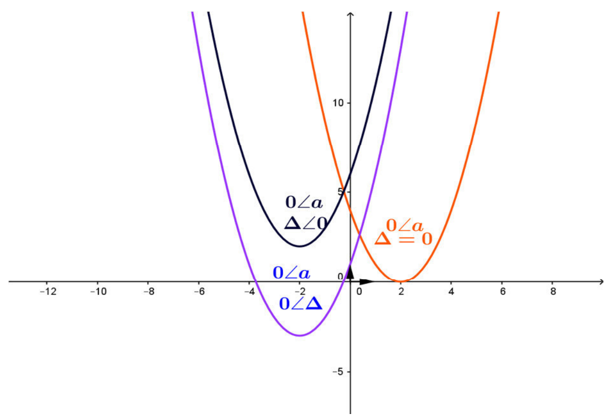
Interprétation graphique des solutions d'une équation du second degré

Propriété

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et P un polynôme du second dégré.

La représentation graphique de P est l'image par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{-b}{2a} \\ \frac{-\Delta}{4a} \end{pmatrix}$ de la parabole représentant la fonction $x \longmapsto ax^2$. C'est donc une parabole de sommet $S\left(\frac{-b}{2a}, P\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.





SEQUENCE 35

Inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$

Objectifs

- Etudier le signe d'un trinôme du second degré ;
- Résoudre des inéquations du second degré.

Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit P un polynôme du second degré et Δ son disciminant

- *Si* $\Delta > 0$ *,* x_1 *et* x_2 *désignant les deux racines avec* $x_1 < x_2$ *alors P(x) est du signe de a siet seulement si* $x \in \left]-\infty\,;\ x_1\right[\cup \left]x_2\,;\ +\infty\right[$ *et du signe de –a si et seulement si* $x \in \left]x_1;\ x_2\right[$ *. On dit dans ce cas que P est du signe de a « aux extérieurs » des racines et du signe de – a « à l'intérieur des racines ».*
- *Si* $\Delta = 0$*, P(x) est de signe de a sauf lorsque* $x = \frac{-b}{2a}$
- *Si* $\Delta < 0$*, P(x) est toujours du signe de a pour tout x réel.*

Démonstration

1er cas : $\Delta > 0$

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
Signe de a	Signe de a	Signe de a	Signe de a
Signe de $x - x_1$	− 0	+	+
signe de $x - x_2$	−	− 0	+
Signe de $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	Signe de a 0	Signe de −a 0	Signe de a

2ème cas : $\Delta = 0$

$P(x) = a(x - x_o)^2$ *où* $x_o = \frac{-b}{2a}$

$(x - x_o)^2 \geq 0$ donc $a(x - x_o)^2$ est du signe de *a.*

3ème cas : $\Delta < 0$

$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ or $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc pour tout réel x, $P(x)$ est du signe de *a.*

Leçon : fonctions polynômes et rationnelles

SEQUENCE 36

Fonctions polynômes

Objectif

Définir une fonction polynôme et déterminer son degré

Définition

On appelle fonction polynôme de degré, ou simplement polynôme de degré n toute fonction polynôme f définie par :

$f: \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{array}$ où $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$.

Le nombre a_i est appelé coefficient de rang i de $f(x)$ et a_n est le coefficient dominant.

Les différents termes constituant l'expression du polynôme sont appelés des monômes.

Un monôme est une expression de la forme ax^n dans laquelle a est une constante, x est la variable et n le degré.

Un polynôme est soit un monôme, soit une somme de monômes.

Exemples

1) L'expression $6x^5 + x^2 - 4x + 1$ est un polynômes de degré 5.

2) La fonction définie par : $f(x) = x^7 + 12x^4 + 3x^2 + 5x - 7$ est une fonction polynôme de degré 7 et dont le coefficient dominant est 1.

Remarques

– L'écriture $f(x) = y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est équivalent à l'écriture : $f(x) = y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Ainsi, on a :

$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ où les $a_k (k \in [1, n])$ sont des réels avec $a_n \neq 0$.

– L'expression : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ne renferme comme variable que x. C'est une fonction polynôme définie dans $\mathbb{R}$.

Exercice

On considère les fonctions suivantes dont les expressions sont :

$f(x) = -4x^4 + 2x^2 + x^3 5x - 4$; $g(x,) = 2 - 4x\sqrt{2}$.

$h(x) = 4x^6 + 3x^5 + 4\sqrt{2x} + 3x^2 + 5x - 4$; $l(x) = -4 + 2x - x^2 - x^3\sqrt{3}$.

$i(x) = 4x^2 + 3x^2 + 4x\sqrt{2} + 3x^2 + 5x - 4$.

$j(x) = 2x^{-3} + 4x^2 + x + 6$; $k(x) = -x^{10} + 3x^9 + 5x^7 - 4x - 2 + \frac{1}{x}$.

Pour chaque fonction exprimée, dis si cette fonction est un polynôme et si c'est le cas, précise le degré du polynôme et le coefficient dominant.

SEQUENCE 37

Polynôme nul et égalité de fonctions polynômes

Objectif

- Définir un polynôme nul ;
- déterminer des polynômes égaux.

Fonction polynôme nulle

Propriété

Soit f la fonction polynôme définie par :

$f(x) = y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

La fonction polynôme $f(x)$ est nulle si et seulement si, pour tout entier i, $a_i = 0$.

Autrement dit :

Le polynôme nul $f(x) = 0$ est le seul polynôme dont tous les coefficients sont égaux à 0.

Polynômes égaux

Théorème

Soient f et g deux fonctions polynômes définies par :

$f(x) = y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *et*

$g(x) = y = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + \ b_0 \ = \ \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$

f et g sont deux fonctions égales si et seulement si, pour tout entier i, $a_i \ = b_i$.

En d'autres termes :

Deux fonctions polynômes non nulles sont égales si et seulement si elles ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Ce théorème est très souvent utilisé pour permettre l'identification d'une fonction polynôme à une autre.

Exemple

Soit $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$

et $g(x) = (a+1)x^4 + 5x^3 + (b+1)x^2 + (c-a)x + a + d$.

Ici le degré de f est égal au degré de g c'est-à-dire 4.

D'autre part, les coefficients des monômes de même degré doivent être égaux :

$$\begin{cases} a + 1 = 2 \\ b + 1 = 7 \\ c - a = 7 \\ a + d = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 8 \\ d = 2 \end{cases}$$

Ainsi, pour $a = 1$, $b = 6$, $c = 8$ et $d = 2$, la fonction polynôme $g(x) = (a+1)x^4 + 5x^3 + (b+1)x^2 + (c-a)x + a + d$ est égale au polynôme $f(x) = \ 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$.

SEQUENCE 38

Racine d'un polynôme et factorisation

Objectifs

- Définir la racine d'un polynôme ;
- factoriser un polynôme.

Définition

On appelle racine d'un polynôme P tout nombre réel u vérifiant $P(u) = 0$.

Exemple

Soit $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 1$

On vérifie facilement que $f(1) = 1^4 - 1^3 + 1 - 2 + 1 = 0$ et comme $f(1) = 0$ alors 1 est une racine de f.

Théorème

Soit P *un polynôme de degré* n, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (n > 0$ *et* $a_n \neq 0)$ *et* $u \in \mathbb{R}$ *tel que* $P(u) = 0$, *alors il existe un polynôme* Q *de degré* $n-1$ *tel que* $P(x) = (x-u).Q(x)$.

Ce théorème est très souvent utilisé lorsque, connaissant une racine d'une fonction polynôme, on veut factoriser cette fonction.

Pour ce faire, deux méthodes sont habituellement mises en œuvre pour déterminer l'expression de $Q(x)$: la méthode pratique de division euclidienne et la méthode des coefficients indéterminés.

SEQUENCE 39

Méthodes de factorisation d'un polynôme

Objectifs

Utiliser différentes méthodes pour factoriser un polynôme

Exemple

Soit $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 1$

Mettons $f(x)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs sachant que 1 est une racine de f.

Nous allons effectuer cette résolution en utilisant les deux méthodes.

Méthode pratique de division euclidienne

On vérifie que $f(1) = 0$ donc par application du théorème ci-haut cité, il existe un polynôme $g(x)$ de degré 3 tel que $f(x) = (x-1).g(x)$.

On obtient $g(x)$ en effectuant la division euclidienne de l'expression $x^4 - x^3 + x^2 + 1$ par l'expression$x - 1$.

On a donc :

$$
\begin{array}{c|l}
x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1 & \\
\cancel{-x^4 + x^3} & x - 1 \\
\hline
\cancel{x^2} - 2x + 1 & x^3 + x - 1 \\
\cancel{-x^2} + x & \\
\hline
-x + 1 & \\
+x - 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Le quotient $g(x) = x^3 + x - 1$ donc $f(x) = (x - 1)(x^3 + x - 1)$.

Méthode des coefficients indéterminés

On a : $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1$ et on vérifie que $f(1) = 0$ et par application du théorème ci-haut cité, il existe un polynôme $g(x)$ de degré 3 tel que $f(x) = (x - 1).\, g(x)$.

On pose $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ puisque g est de degré 3.

Effectuons le produit $(x - 1).\, g(x)$.

On a :

$f(x) = (x - 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^4 + (b - a)x^3 + (c - b)x^2 \pm d - c)x - d.$

Par application du théorème d'égalité des fonctions, on identifie la fonction polynôme $x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1$ à la fonction polynôme obtenue après avoir effectué le produit $(x - 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.

On a donc : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 1 = -1 \\ c - b = 1 \\ d - c = -2 \\ -d = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases}$

Les coefficients ainsi déterminés nous donnent l'expression de la fonction polynôme g et on a : $g(x) = x^3 + x - 1$ et la factorisation recherchée est donc :$f(x) = (x - 1)(x^3 + x - 1)$

SEQUENCE 40

Signe d'une fonction polynôme

Objectifs

Etudier le signe d'un polynôme.

Méthode

Pour déterminer le signe d'une fonction polynôme, on factorise cette fonction puis on étudie le signe des différents facteurs.

La détermination du signe de la fonction polynôme s'obtient à l'aide d'un tableau de signes.

Exemple

1) Soit $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

On détermine les zéros de f afin d'effectuer une factorisation.

On vérifie que -1 est une racine évidente puisqu'on a :

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 4 \Leftrightarrow f(-1) = -1 + 1 + 4 - 4 = 0$

Donc $(x) = (x + 1).g(x)$. On peut utiliser la division euclidienne ou la méthode des coefficients indéterminés pour obtenir les valeurs des coefficients $a, b\ et\ c$ de la fonction $g(x) = ax^2 + bx + c$

On obtient donc $a = 1, b = 0\ et\ c = 4$ d'où $g(x) = x^2 - 4$ c'est-à-dire

$g(x) = (x - 2)(x + 2)$

Il s'ensuit que $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

On réalise le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A partir de ce tableau de signes nous avons les résultats suivants :

- $f(-2) = f(-1) = f(2) = 0$
- $f(x) > 0 \ pour\ tout\ x \in\ ]-2;-1[\ \cup\ ]2;+\infty[$
- $f(x) < 0\ pour\ tout\ x\ \in\ ]-\infty;-2[\ \cup\ ]-1;2[$

Exercices

1) On donne la fonction polynôme définie par : $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
   a) Trouver une racine évidente de f
   b) Factoriser $f(x)$
   c) Déterminer l'ensemble des réels x tels que $f(x) \leq 0$
2) Soit le polynôme $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$
   a) Factoriser complètement $f(x)$ après avoir déniché une ou deux racines évidentes.
   b) Déterminer le signe du polynôme $f(x)$ en fonction des valeurs de x

SEQUENCE 41

Fonctions rationnelles

Objectifs

Définir une fonction rationnelle

Définition

On appelle fonction rationnelle f *toute fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *ou* p *et* q *sont deux fonctions polynômes. La fonction* f *est définie pour tout* x *réel tel que* $q(x) \neq 0$.

Remarques

- L'ensemble de définition de *f*, noté D_f, comprend toute les valeurs réelles de x sauf celles qui annulent le dénominateur q(x).
  On a donc: f existe si seulement si $x \in \mathbb{R}$, $q(x) \neq 0$.
- L'ensemble des zéros d'une fonction rationnelle est donné par l'ensemble des zéros du polynôme $p(x)$ qui ne sont pas des zéros de $q(x)$. Si : $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$. Déterminer les réels x tels que $f(x) = 0$ équivaut à déterminer l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}/p(x) = 0 \; et \; q(x) \neq 0\}$

Exemples

1) La fonction définie par: $f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{2x^2+6x+4}$ est une fonction rationnelle car elle est le quotient de deux fonctions polynômes.
   f est définie par tout $x \in \mathbb{R}/ \; 2x^2 + 6x + 4 \neq 0 \; or \; 2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x + 2) = 2(x + 1)(x + 2)$
   Donc $2x^2 + 6x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \; et \; x \neq -2$.
   $Df = \mathbb{R} \setminus \{-2 - 1\} =]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]-1; +\infty[$
   Pour déterminer les zéros de la fonction *f*, on procède d'abord à la factorisation du numérateur et du dénominateur de la fonction.
   On obtient : $f(x) = \frac{(x^2+1)(x+1)}{2(x+2)(x+1)}$
   Le numérateur a pour zéro -1car $x^2 + 1 > 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$ alors que le dénominateur a pour zéro -2 et -1.
   L'ensemble des zéros de $f$est donc vide car $-1 \notin Df \; et \; on \; a \; donc \; S = \{\} ou \; S = \emptyset$.
2) La fonction définie par :$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2+7}$ est une fonction rationnelle qui admet pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ puisque $x^2 + 4 \neq 0$ pour tout x réel. L'ensemble des zéros de la fonction $f$est $\{\sqrt[3]{8}\}$.

SEQUENCE 42

Simplification d'une fraction rationnelle

Objectifs

Simplifier une fonction rationnelle

Simplification

f est une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

On peut simplifier la fonction f si le numérateur *p(x)* et le dénominateur *q(x)* possèdent dans leurs formes factorisées, un facteur commun.

Ainsi, supposons que *p(x)* et *q(x)* possèdent un même zéro a.

On a alors : *p(x)*= (x– a).p'(x) et *q(x)*= (x–a).q'(x).

Donc $f(x) = \frac{p(x)}{qx} = \frac{(x-a)p\prime(x)}{(x-a)q\prime(x)} = \frac{f\prime(x)}{q\prime(x)}$.

L'ensemble $f(x) = \frac{p\prime(x)}{q\prime(x)}$ est la forme simplifiée de la fonction rationnelle $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Il est à noter qu' avant de simplifier une fonction rationnelle, il faut absolument déterminer son domaine de définition.

Exemple

Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{x^3-8}{2x^2-6x+4}$

Simplifier la fonction rationnelle$f$.

Avant tout, déterminons le domaine de définition de f.

$f\ existe \iff 2x^2 - 6x + 4 \neq 0\ or\ 2(x^2 - 3x + 2) = 2(x - 1)(x - 2)$

donc$x \neq 1\ \ et\ x \neq 2\ donc\ Df\ = \mathbb{R} \setminus \{1,2\} =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$

simplifions f dans son domaine de définition :

on a $f(x) = \frac{x^3-8}{2x^2-6x-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-1)(x-2)} = \frac{x^2+2x+4}{2x-2}$

donc $\forall x \in Df, f(x) = \frac{x^2+2x+4}{2x-2}$. c'est la forme simplifiée de f.

SEQUENCE 43

Opérations sur les fonctions rationnelles

Objectifs

Effectuer des opérations avec les fonctions rationnelles

Propriétés

Soit f et g deux fonctions rationnelles telles que : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *et* $g(x) = \frac{p'(x)}{q'(x)}$

– $f(x) + g(x) = \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{p(x).q'(x)+p'(x).q(x)}{q(x).q'(x)}$

La somme de deux fonctions rationnelles est une fonction rationnelle

– $f(x) - g(x) = \frac{p(x).q'(x)-p'(x).q(x)}{q(x).q'(x)}$

La différence de deux fonctions rationnelles est une fonction rationnelle.

– $f(x).g(x) = \frac{p(x).p'(x)}{q(x).q'(x)}$

Le produit de deux fonctions rationnelles est une fonction rationnelle.

Exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{x-2}$ *et* $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$ deux fonctions rationnelles.

Calculons $f(x) + g(x)$; $f(x) - g(x)$ *et* $f(x).g(x)$

- Déterminons d'abord les ensembles de définition de f *et* g

On a : $Df = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty\,; 2[\cup]2\,; +\infty[$

$Dg = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty\,; -2[\cup]-2\,; +\infty[$

- Effectuons les calculs demandés en considérant les domaines de définition établis :
  - $f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{1.(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2}{x^2-4}$, définie dans $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$
  - $f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{1.(x+2)-(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-x^2-2x+4}{x^2-4}$

    Le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs . On ne peut donc pas simplifier cette expression .donc$f(x) - g(x) = \frac{-x^2-2x+4}{x^2-4}$

- $f(x).g(x) = \frac{1}{x-2}.\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+1}{x^2-4}$

On constate que $f(x) - g(x), f(x) + g(x) et\ f(x).g(x)$ ont le meme domaine de définition.

SEQUENCE 44

Signe d'une fonction rationnelle

Objectif

Etudier le signe d'une fonction rationnelle

Etude de signe d'une fonction rationnelles

L'étude du signe d'une fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ se déduit de l'étude de signe du produit des polynômes $p(x).q(x)$. La démarche consiste à déterminer le signe à partir d'un tableau lorsque les polynômes $p(x) et\ q(x)$ sont donnés sous leurs formes factorisées tout en prenant en compte la contrainte $q(x) \neq 0$, car l'étude de signe se fait dans le domaine de définition de la fonction rationnelle.

Exemple

Considérons la fonction rationnelle $h(x) = \frac{x^2-1}{3(x+3)}$.

Etudions le signe de h.

h est une fonction rationnelle dont le domaine de définition est :

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-3\} =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$

Sur ce domaine, $h(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{3(x+3)}$

L'étude du signe de h s'effectue de la même manière que celle du produit des polynômes $3(x-1)(x+1)(x+3)$

Pour cela, établissons un tableau de signes en considérant que le numérateur a pour zéros$-1\ et\ 1$.

On a donc :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient les résultats suivants :

- $h(x) = 0 \iff x = -1 \; ou \; x = 1$
- $h(x) < 0 \iff x \in]-\infty; -3[\cup]-1; 1[$
- $h(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty; -3] \cup [-1; 1]$
- $h(x) > 0 \iff x \in]-3; -1[\cup]1; +\infty]$
- $h(x) \geq 0 \iff x \in [-3; -1] \cup [1; +\infty[$

Remarque

L'étude du signe d'une fraction rationnelle h est le moyen par lequel on doit résoudre des inéquations$h(x) \leq 0 \; ou \; h(x) \geq 0$.

Exercice d'entrainement de la compétence de base 1 du premier trimestre

Leçon : généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle

Exercice 1

On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$ et $g(x) = x^3 + x^2 + 1$.

1) Comparer $f(0)\ et\ g(0); f(-1) et\ g(-1); f(1)\ et\ g(1)$.
2) f est-elle égale à g?
3) Soit $h(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$. Les fonctions f et h sont-elles égales ?

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{(x-2)(x+3)}$
2) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$
3) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}$
4) $f(x) = x - \sqrt{|x|}$
5) $f(x) = \frac{x+1}{x^4+1}$

Exercice 3

Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
3) $f(x) = \frac{x^2+x}{1-x^2}$

Exercice 4

On donne $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$

1) f et g sont- elle égales?
2) Déterminer la plus grande partie E de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g ont la même restriction.

Exercice 5

On donne la fonction $f(x) = \frac{3x^2-2x-1}{x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Déterminer une application affine ayant même restriction que f à D_f.

Exercice 6

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, donner les domaines de définition des fonctions f et g puis, déterminer les fonctions $2f - 3g$; $f \times g$ et $\frac{f}{g}$.

1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$;
2) $f(x) = \frac{-4x}{x^2-4}$ et $g(x) = \frac{x(x-2)}{x+2}$;
3) $f(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ et $g(x) = \frac{x-\frac{1}{x}}{x^2+\frac{1}{x}}$.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J). Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$ et (C_f), sa courbe représentative.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de D_f, $f(x) = \frac{a}{x-3} + b$.
3) En déduire que (C_f) est une hyperbole dont déterminera le centre. Construire (C_f).

Exercice 8

f est la fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+3}$.

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel, $f(x) = \frac{a}{x^2+3} + b$.
2) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, prouver que la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, I, J) admet l'élément de symétrie précisé :

1) $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}$; axe de symétrie: $x = 2$
2) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$; centre de symétrie : A(0 ; 1)

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J). Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$ et (C_f), sa courbe représentative.

1) Démontrer que pour tout x réel, $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
2) En déduire que (C_f) est l'image de la parabole d'équation y $= x^2$ par une transformation simple que l'on déterminera. Construire (C_f).
3) On considère les fonctions f_1; f_2; f_3 et f_4 définies par $f_1(x) = f(-x)$; $f_2(x) = -f(-x)$; $f_3(x) = |f(x)|$ et $f_4(x) = f(x+1) + 2$. Construire les courbes représentatives de chacune des fonctions f_1; f_2; f_3 et f_4.

Leçon : Limite, continuité et dérivation

Exercice 1

f étant une fonction donnée, calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

1) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7$;
2) $f(x) = -x^4 - 3x^2 + x$;
3) $f(x) = \frac{4+3x}{-x+3}$;
4) $f(x) = \frac{4+3x}{-x+3}$;
5) $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{-x+3}$;
6) $f(x) = \frac{x^3-2x+3}{-2x+1}$;
7) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+2}}{3x-2}$;
8) $f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2-3x+1}$;
9) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$;

10) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$.

Exercice 2

f étant une fonction donnée, calculer la limite de f en x_0 (éventuellement à gauche ou à droite de x_0) :

1) $f(x) = \frac{5}{(x-1)^2}$; $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$; $x_0 = -3$;
3) $f(x) = \frac{5}{(x-1)^2}$; $x_0 = 1$;
4) $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$; $x_0 = 1$;
5) $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; $x_0 = 9$;
6) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; $x_0 = 2$;
7) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$; $x_0 = 4$;

Exercice 3

f étant une fonction donnée, étudier la continuité de f en x_0 :

1) $f(x) = x^2 - 3x + 5$ et $x_0 = 2$;
2) $f(x) = \sqrt{9-x}$ et $x_0 = 9$;
3) $f(x) = \frac{3x^2-5x-7}{8x^3-5x+3}$ et $x_0 = 1$;
4) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ et $x_0 = -3$.

Exercice 4

f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3} \; si\ x \leq 0 \\ f(x) = x^2 + x + a \; si\ x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 0. (On discutera suivant les valeurs du nombre réel a).

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants,

- calculer le nombre dérivé de la fonction f en x_0;
- donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f en x_0.

a) $f: x \longmapsto x$, $x_0 = 1$;

b) $f: x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$, $x_0 = 2$;

c) $f: x \longmapsto 2\sqrt{x} - 1$, $x_0 = 3$.

Exercices 6

Dans chacun des cas suivants, justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation :

a) $f(x) = x^3 - 3x$;

b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6$;

c) $f(x) = x^2(x-1)^3$;

d) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$;

e) $f(x) = x^4 - 4x$;

f) $f(x) = 1 - x^3 - x^5$;

g) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

h) $f(x) = \frac{-3}{x^2+x+1}$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de f sur l'intervalle I indiqué :

a) $f(x) = x + \frac{16}{x}$; $I =]0, +\infty[$;

b) $f(x) = x + \frac{16}{x}$; $I =]0, +\infty[$;

c) $f(x) = x(1-x)$; $I = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{3x-5}{x+1}$ $I =]-1, +\infty[$;

e) $f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x+1}$; $I =]-2, +\infty[$;

f) $f(x) = x - 4\sqrt{x}$; $I =]0, +\infty[$;

g) $f(x) = (x^2-1)^2$; $I = \mathbb{R}$;

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants :

- Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f;
- Détermine la dérivée de f et étudie son signe ;
- Dresse le tableau de variation de f.

a) $f(x)=x^2+x$;

b) $f(x)=x^3+3x^2+1$;

c) $f(x)=\frac{2x+5}{2-x}$;

d) $f(x)=\frac{4x^2-11x-2}{x-3}$;

e) $f(x)=\sqrt{2-3x}$

f) $f(x)=x-\sqrt{x}$

Exercice d'entrainement de la compétence de base 2 du premier trimestre

Leçon : Equations et inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$

Exercice 1

On donne $f(x)=x^2-3x+2, g(x)=x^2-4x+4$ et $h(x)=2x^2-x+5$.

Mettre f, g et h sous forme canonique puis déterminer pour chacune des fonctions f, g et h le discriminant.

Exercice 2

On donne : $P(x)=3x^2-5x+3$;$Q(x)=5x^2-8x+\frac{16}{5}$ et $R(x)=-2x^2-x+1$.

Déterminer, si possible, les racines de ces polynômes puis trouver leur forme factorisée.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer le discriminant réduit de P et déterminer ses éventuelles racines ainsi que sa forme factorisée.

a) $P(x)=x^2-2x-8$; b) $P(x)=3x^2-6\sqrt{5}x+15$;c) $P(x)=5x^2+10x+11$.

Exercice 4

Sans représenter graphiquement la courbe représentative de f, g et h, détermine le nombre de points d'intersection de ces courbes avec l'axe des abscisses.

$f(x) = x^2 + 5x + 6$; $g(x) = (x-4)^2$; $h(x) = -2x^2 + x - 3$.

Exercice 5

Etudier le signe de P dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = -2x^2 + 3x + 2$ b) $P(x) = -x^2 + 8x - 16$ c) $P(x) = 4x^2 - x + 5$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$
b) $2x^2 + 8x - 16 > 0$
c) $4x^2 - x + 5 > 0$
d) $-2x^2 + 5x - 3 > 0$
e) $4x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 3 \leq 0$
f) $2x^2 + 7x - 15 \leq 0$
g) $-2x^2 - 4x - 3 < 0.$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x^2 - 3xy + y - 7x = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 - xy = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} xy^2 + x^2y = -30 \\ xy + x + y - 7x = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3y = 9 \\ 3x^2 + 3y^2 - x + 5y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 10y = -21 \\ 2x^2 - x - y = -3 \end{cases}$

Exercice 8

Résoudre chacun des systèmes suivants:

a) $\begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7 \end{cases}$.

EXERCICES : Polynômes et fonctions rationnelles

Exercice 1

a) Quel est le degré du polynôme$f(x) = (x-1)^2$?

Quel est le degré du polynôme$g(x) = (x-1)(3x+2)$

b) Factoriser les polynômes

$s(x) = f(x) + g(x)$ *et* $d(x) = f(x) - g(x)$

Exercice 2

a) Développer puis factoriser les polynômes :

$P(x) = (x-1)^2 - 4$ *et* $Q(x) = (x-2)(x+3) + x + 7$

b) Développer puis factoriser les polynômes :

$f(x) = P(x) - 2Q(x)$ *et* $g(x) = P(x).Q(x)$

Exercice 3

a) Développer puis factoriser le polynôme : $f(x) = (x^2-9)^2 - (x+3)^2$.

b) En choisissant chaque fois la forme de $f(x)$ la plus appropriée, calculer :

$f(0), f(-3), f(3), f(2), f\left(\frac{3}{-2}\right), f(\sqrt{19})$

Exercice 4

P est le polynome définie par : $P(x) = \ x^3 + 2x^2 - 1$.

a) Calculer $P(-1)$ puis trouver le polynôme Q tel que pour tout réel x

$P(x) = (x+1).Q(x)$.

b) Trouver toutes les racines de P.

c) Reprendre les questions précédentes lorsque $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Exercice 5

P est le polynome : $x \longmapsto 3x^3 - x^2 - 6x + 2$.

b) Calculer $P\left(\frac{1}{3}\right)$;

c) Factoriser $P(x)$, puis résoudre l'équation $P(x) = 0$

Exercice 6

Existe-t-il des valeurs réelles de a et b pour lesquelles le polynôme

$P(x) = 3x^3 + ax^2 - x + 2b$ admet 1 et -2 pour racines ? P admet-il alors d'autres racines ?

Exercice 7

f est la fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$par $f(x) = \frac{-2x^2+6x-3}{2(x-1)^2}$.

Trouver les nombres réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = a + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{(x-1)^2}$

Exercice 8

f est la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

a) Quel est son ensemble de définition ?
b) Ecrire $f(x)$ sous la forme $\frac{A(x)}{B(x)}$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux fonctions polynômes.
c) Résoudre les équations : $f(x) = 1$ *puis* $f(x) = 3$
d) Résoudre les inéquations : $f(x) < 0$ *puis* $f(x) > 3$

Exercice 9

a étant un réel fixé, on définit le polynome P par: $P(x) = x^3 + (a-1)(x^2 - x) - 1$.

a) Montrer que 1 est racine de P pour toutes les valeurs de a.
b) Factoriser $P(x)$ pour les valeurs suivantes de a:
   - $a = 2$;
   - $a = -2$;
   - $a = 1$.
c) Résoudre pour $a = 2$, l'équation $P(x) = 0$.
d) Résoudre pour $a = -2$, l'équation $P(x) = 0$ puis l'inéquation $P(x) \leq 0$.

EVALUATION

Exercice 1

soit f une fonction définie par $f(x) = x^3 + x$. On désigne par (Cf) la représentation graphique de f.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

   b) Déterminer que est une fonction impaire en déduit l'ensemble d'étude de f.

2) calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.

3) a)déterminer la fonction dérivée f' de f en déduire le sens de variation de f

   b) dresser le tableau de variation de f

4) construire la courbe (Cf)

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

a) $x^2 + 4x + 5 = 0$
b) $3x^2 - 4x + 2 = 0$
c) $x^2 - 6x + 2 < 0$
d) $x^2 + 3x + 4 > 0$

Exercice 3

Soit $f(x) = \frac{x^2+4x-5}{2(x+5)(x-3)}$

a) Factoriser si cela est possible, les polynômes $x^2 + 4x - 5$ *et* $2(x + 5)(x - 3)$
b) Préciser l'ensemble de définition de f puis simplifier si cela est possible, l'expression de $f(x)$.
c) Résoudre les équations et l'inéquation suivantes :
   - $f(x) = 2$
   - $f(x) \geq 0$
   - $f(x) = 0$

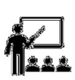
<u>Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice</u>

- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………

<u>Conseils et orientation de l'enseignant</u>

- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………

Evaluation de la compétence



 ☐

 ☐

 ☐

Deuxième trimestre

Programmation horaire du 2e trimestre

2e Trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombres d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
Du 02 Janvier au 31 Mars 13 semaines	CB1	3	Etude de fonctions	9H	3H	2H	14H	39H
	CB2	3	Système d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	9H	2H	2H	13H	
		4	Analyse combinatoire	9H	3H		12H	

FICHE DE PROGRESSION DEUXIEME TRIMESTRE

Trimestre	Période	Contenus	
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité
2	2 Janvier au 10 Février	- Etude de fonctions	- Système d’équations et d’inéquations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
	11 Fevrier au 31Mars		- Analyse combinatoire

Les modules d'intégration en mathématiques en classe Première L Deuxième trimestre

Compétence de Base 1

Première S/E–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre l'étude de fonctions.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
– Etude de fonctions	– Etudier et représenter les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3. – Etudier et représenter les fonctions homographiques..	– Etude et représentation des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3. – Etude et représentation des fonctions homographiques

Première S/E–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les système d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et l'analyse combinatoire.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
- Système d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ - Analyse combinatoire	- . Résoudre des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. - Résoudre des problèmes se ramenant aux systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. - Dénombrer un ensemble fini. - Déterminer la partition d'un ensemble fini. - Déterminer le cardinal du produit cartésien d'ensembles finis. - Déterminer le nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre (p-listes). - Déterminer le nombre d'arrangements, de combinaisons et de permutations des éléments d'un ensemble fini.	- Résolution des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. - Résolution des problèmes se ramenant aux systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. - Dénombrement d'un ensemble fini. - Détermination de la partition d'un ensemble fini. - Détermination du cardinal du produit cartésien d'ensembles finis. - Détermination du nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre (p-listes). - Détermination du nombre : . d'arrangements,

			. de combinaisons, - . et de permutations des éléments d’un ensemble fini

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHE DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons : étude de quelques fonctions

SEQUENCE 1

Propriétés géométriques des courbes : asymptotes

Objectifs

Définir une asymptote et donner son équation

Asymptote horizontale

Définition

Soit f une fonction. Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ *(ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$*), on dit la droite d'équation*

$y = l$ *est asymptote horizontale à la courbe de f en* $+\infty$ *(ou en* $-\infty$*).*

Exemple

Soit $f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2+5}$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f *contenant l'intervalle*

$]x_0\,;\ x_0+\alpha\,[$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ *est asymptote verticale à la courbe de f lorsque la limite de f en a est infinie (éventuellement limite à gauche et limite à droite en a).*

Exemple

Soit $f(x)=\frac{-x}{x-2}$

$D_f=]-\infty\,;\ 2[\ \cup\ ]2\,;\ \infty\,[$.

On a : $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote à la courbe de f.

Asymptote oblique

Soit f une fonction. Lorsque $lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ *(ou* $lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)])=0$, *on dit la droite d'équation y = ax+b est asymptote à la courbe de f en* $+\infty$ *(ou en* $-\infty$*).*

Exemple

Soit $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}$

On a : $lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ donc la droite d'équation $y=x+2$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

SEQUENCE 2

Propriétés géométriques des courbes : éléments de symétrie

Objectifs

Déterminer le centre ou l'axe de symétrie d'une courbe représentative d'une fonction

Centre de symétrie

Méthode

Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pour démontrer que le point $\Omega(a\,;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$,on peut :

- ou bien montrer que dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction impaire ;
- ou bien montrer que pour tout h et a tels que $a+h$ appartient au domaine de définition de f, $a-h$ appartient au domaine de définition de f et on a : $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2}=b$

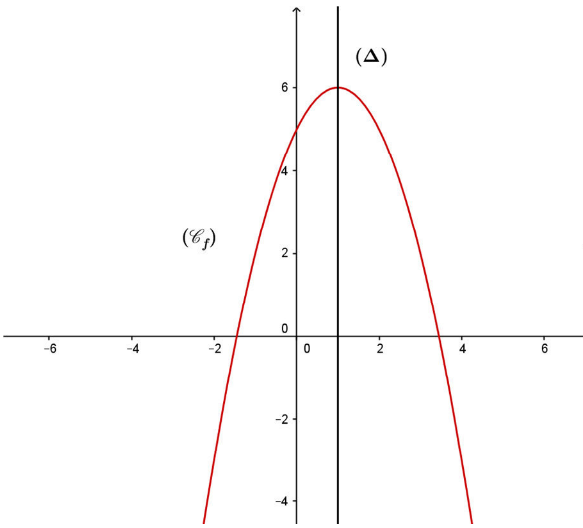
Axe de symétrie

Méthode

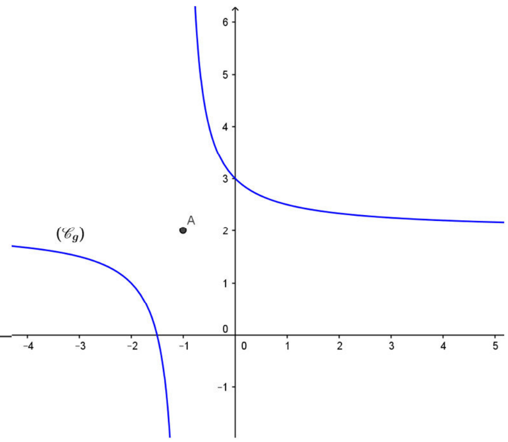
Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pour démontrer que la droite d'équation $x=a$ est axe de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$, on peut :

- ➢ ou bien montrer que dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\Omega(a;0)$, $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction paire ;
- ➢ ou bien montrer que pour tout het a tels que $a+h$ appartient au domaine de définition de f, $a-h$ appartient au domaine de définition de f et on $f(a-h)=f(a+h)$.



Courbe admettant un axe de symétrie.



Courbe admettant un centre de symétrie.

Exemple

Les courbes ci-dessus sont celles d'une fonction f et d'une fonction g.

Démontre que la droite (Δ) est axe de symétrie à la courbe de f et que le point A est centre de symétrie de la courbe de g sachant que $f(x)=-x^2+2x+5$ et $g(x)=\frac{2x+3}{x+1}$.

SEQUENCE 3

Parité d'une fonction

Objectifs

Etudier la parité d'une fonction

Propriétés

- *f est une fonction définie sur un intervalle I :*

f est paire si, et seulement si, pour tout réel x de I, $-x$ apparient à I et $f(-x)=f(x)$.

- *f est une fonction définie sur un intervalle I :*

f est impaire si, et seulement si, pour tout réel x de I,– x apparient à I et f (– x)= – f(x).

Remarques

– La représentation graphique d'une fonction paire dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet $(O, \vec{\jmath})$ comme axe de symétrie.

– La représentation graphique d'une fonction impaire dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet O comme centre de symétrie.

Exemple

Etudier la parité des fonctions f et g définies par $f(x)=\frac{x^2}{cosx}$ et $g(x)=x^3 sinx$.

SEQUENCE 4

Exemples d'étude de fonctions : plan d'étude de fonctions

Objectifs

Elaborer un plan d'étude de fonctions

Plan d'étude de fonctions

Avant de donner quelques exemples d'étude de fonctions, on propose un plan détaillé lorsqu'aucune indication n'est donnée sur l'étude :

- ensemble de définition de la fonction ainsi que l'étude de la continuité sur cet ensemble ;
- étude (éventuelle) des propriétés géométriques particulières (**parité, périodicité**) afin de trouver un ensemble réduit dans lequel la fonction sera étudiée ; cet ensemble s'appelle **ensemble d'étude** ;
- calcul des **limites** aux bornes de l'ensemble d'étude ;
- calcul de la **dérivée** sur l'ensemble de dérivabilité, étude du **signe** de cette dérivée et **tableau de variation ;**
- étude (éventuelle) des **branches infinies** afin de déterminer les **asymptotes** ;
- **représentation graphique** de la fonction après avoir cherché quelques **points** de la courbe et tracé les éventuelles **tangentes** ou **demi-tangente** ;

- contrôle de certaines propriétés (**axe et centre de symétrie**) après avoir conjecturé leur existence sur le graphique.

SEQUENCE 5

Exemples d'étude de fonctions polynômes

Objectifs

Etudier les fonctions polynômes

Exemple

Soit la fonction f: $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Étudions f.

- $f$étant une fonction polynôme, son domaine de définition est : $D_f = \mathbb{R}$.

$f$est continue sur son domaine de définition.

- Il n'y a rien en vue quant à la parité et la périodicité.
- Calculons la limite en $-\infty$ et en $+\infty$:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Remarque

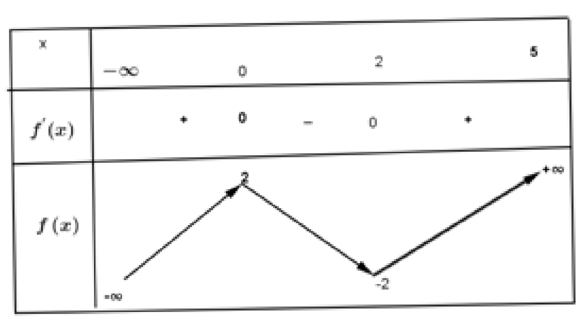
Il est conseillé d'écrire l'ensemble de définition sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles afin de recenser toutes les bornes où calculer les limites.

- $f$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

f'étant un polynôme du second degré, on a :

$\forall x \in \,]-\infty; 0[\, \cup \,]2; +\infty[\; f'(x) > 0$

$\forall x \in \,]0; 2[\; f'(x) < 0$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2.$

D'où le tableau de variation ci-contre :

Remarquons qu'il est nécessaire de vérifier si le tableau de variation est « cohérent »c'est-à-dire que f doit croitre d'une petite valeur à une grande valeur et que f doit décroitre d'une grande valeur à une petite valeur.

- Les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ prouvent que la courbe de f n'admet pas d'asymptote.

Par contre $f(x)=x^3-3x^2+2=x^3(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3})$ donc pour x « grand », on a l'approximation suivante

$f(x) \approx x^3$ donc en $-\infty$ et en$+\infty$, la courbe de, la courbe de f a la même allure que celle de la fonction $x \mapsto x^3$.

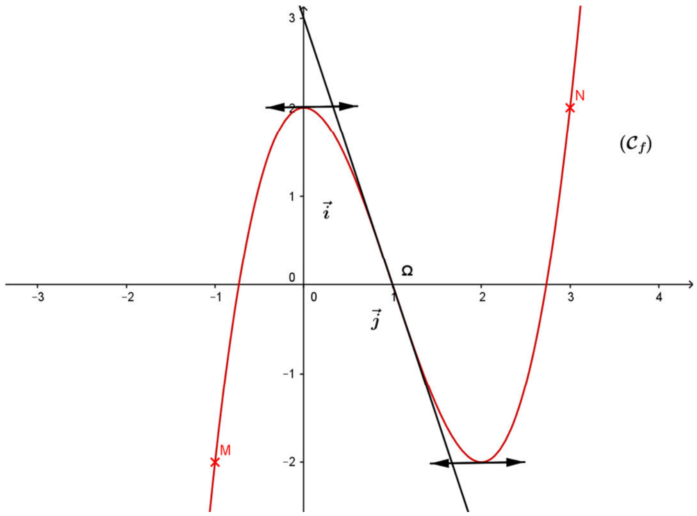
On dit que la courbe de f a une branche parabolique direction $(O, \vec{j})$en $-\infty$

et en $+\infty$.

- Courbe de f

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

- La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $y=-3x+3$.
- $(\mathcal{C}_f)$admet deux extremums locaux aux points d'abscisses 0 et 2.



- La figure suggère que le point $\Omega(1\ ;\ 0)$ est centre de symétrie.

On peut le démontrer en utilisant l'une des méthodes suivantes :

1$^{\text{ère}}$ méthode

$\frac{f(1-h)+f(1+h)}{2} = \frac{h^3+3h+h^3-3h}{2} = 0$ donc Ω est bien centre de symétrie.

2$^{\text{eme}}$ méthode

Posons $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$

Alors $M(x;y) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow Y=(X+1)^3-3(X+1)^2+2$

$\Leftrightarrow Y = X^3-3X$

Dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,la courbe représentative de la fonction $X \mapsto X^3-3X$ est celle d'une fonction impaire donc Ω est bien centre de symétrie de la courbe de f.

SEQUENCE 6

Exemples d'étude de fonctions rationnelles

Objectifs

Etudier les fonctions rationnelles

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ et on désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Etudions f (On démontrera que la droite *(D)* d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe de f).

- f est définie pour tout réel x différent de 1 donc

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

f est continue sur son domaine de définition.

- Il n'y a rien en vue quant à la parité ou la périodicité.
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

- f est dérivable sur son domaine de définition et

$\forall\ x \in D_f,\ f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

f' est du signe de $x(x-2)$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\ f'(x) > 0$

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; 2[\ f'(x) < 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$.

*D'*où le tableau de variation ci-contre :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

- Branches infinies puisque la limite de f à gauche et à droite en 1 est infinie, la droite d'équation x=1 est asymptote à la courbe de *f*.

$lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0$ *et* $lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1} = 0$

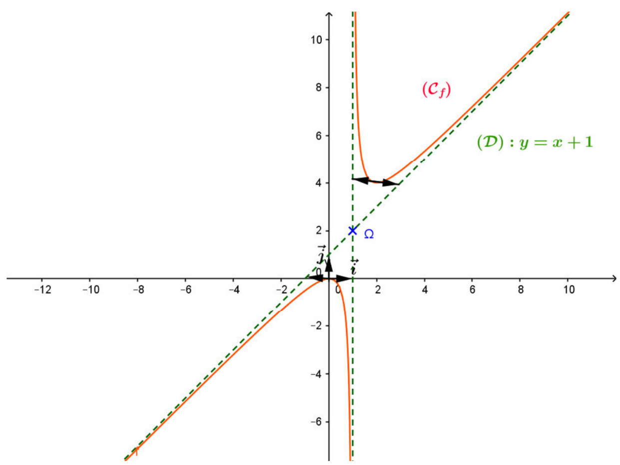
donc la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Courbe
- Position de la courbe par rapport à son asymptote :

$f(x) - (x+1) = \frac{1}{x-1}$ *donc :*

Pour $x < 1$ $f(x) - y < 0$ et la courbe de f est au dessous de son asymptote oblique ;

Pour $x > 1$ $f(x) - y > 0$ et la courbe de f est au-dessus de son asymptote oblique.



- La figure suggère que le point Ω(1 ; 2) est centre de symétrie.

On peut le démontrer en utilisant l'une des méthodes suivantes :

1ère méthode

Calculons $f(1-h)$ *et* $f(1+h)$ *:*

$f(1-h) = \frac{(1-h)^2}{h}$ *et* $f(1+h) = \frac{(1+h)^2}{h}$

$\frac{f(1-h)+f(1+h)}{2} = \frac{4h}{2h} = 2$ donc Ω est bien centre de symétrie.

2ème méthode

Posons $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

Alors M$(x; y) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow$Y+2$= \frac{(X+1)^2}{X}$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{(X+1)^2}{X} - 2$$

Dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,la courbe représentative de la fonction $X \mapsto \frac{(X+1)^2}{X} - 2$est celle d'une fonction impaire donc Ω est bien centre de symétrie de la courbe de *f.*

Leçons de la compétence de base 2 du deuxième trimestre

SEQUENCE 7

Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

- Définir les systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$;
- calculer les discriminants d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$.

Définition d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Un système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$ *est un ensemble* $(\sum)$ *de deux équations de la forme :*

$(\sum)\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$ *où* (x, y) *est le couple d'inconnues et a, b, c, a', b' et c' sont des constantes appelés coefficients du système et vérifiant les conditions* $(a, b) \neq (0,0)$ *et* $(a', b') \neq (0,0)$.

Résoudre le système revient à trouver le ou les couples $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *qui satisfont simultanément les deux équations* (1) *et* (2)*. Ces couples sont les solutions du système.*

Discriminant d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

soit $(\sum)$ *le système* $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$

On appelle discriminant du système $(\sum)$ *le nombre* $\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

On appelle discriminant de x *noté* $\triangle x$ *le nombre* $= \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b.$

On appelle discriminant de y *noté* $\triangle y$ *le nombre* $= \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

Les discriminants Δ, Δx *et* Δy *sont appelés discriminants de Cramer*

Proposition

Soit $(\sum)$ *le système* $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

- *si* $\triangle \neq 0$, $(\sum)$ *admet une couple unique solution* $\left(\frac{\triangle x}{\triangle};\frac{\triangle y}{\triangle}\right)$
- *si* $\triangle = 0$, $(\sum)$ *admet une infinité de solution ou n'admet aucune solution.*

SEQUENCE 8

Résolution par la méthode de substitution des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Résoudre par la méthode de substitution les systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Résolution d'un système

Résoudre un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$, c'est trouver tous les couples (x, y) solutions de ce système.

Méthode de résolution par substitution

A partir de l'une des deux équations, on exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre. On remplace dans l'autre équation l'inconnue trouvée par son expression. On obtient une équation à une inconnue que l'on résout et on trouve la valeur de l'inconnue. On la remplace par sa valeur dans l'expression de la première inconnue.

Exemple

Résolvons par la méthode de substitution le système :

$$\begin{cases} 3x + 1 = 5y \;\; (1) \\ 2y - 4 = 9x \;\;\; (2) \end{cases}$$

$3x + 1 = 5y \;\; (1) \Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{5}$

Remplaçons y par $\frac{3x+1}{5}$, on a : $2 \times \frac{3x+1}{5} - 4 = 9x \Leftrightarrow 6x - 18 = 45x$.

$x = -\frac{18}{39} = \frac{-6}{13}$.

En remplaçant x par sa valeur dans l'expression de y, on tire $y = \frac{3 \times -\frac{6}{13}+1}{5} = \frac{-5}{65} = -\frac{1}{13}$

$S = \left\{\left(\frac{-6}{13}; \frac{-1}{13}\right)\right\}$

SEQUENCE 9

Résolution par combinaison linéaire (par addition) ou par la méthode graphique des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Résoudre par combinaison linéaire ou par la méthode graphique des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Méthode

On multiplie chaque équation du système par un nombre bien choisi tel qu'en additionnant membres à membres les équations obtenues, l'une des deux inconnues disparaisse. On résout alors l'équation à une inconnue puis on termine par le calcul de l'autre inconnue en remplaçant l'inconnue trouvée par sa valeur dans l'une de deux équations initiales.

Exemple

Résoudre Σ le système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\begin{cases} 3x + 1 = 5y \\ 2y - 4 = 9x \end{cases}$$

Méthode graphique

Soit le système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$suivant :

$$(I)\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

Où (x, y) est le couple d'inconnues et a, b, c, a', b' et c' sont des constantes tels que$(a, b) \neq (0,0)$et $(a', b') \neq (0,0)$.

Construire (D) et (D') les droites d'équations respectives $ax + by + c = 0\ eta'x + b'y + c' = 0$.

Les coordonnées du point d'intersection de (D) et (D') est le couple solution du système (I).

Exemple

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ x - y = -4 & (2) \end{cases}$$

SEQUENCE 10

Résolution par la méthode de Cramer des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Résoudre par la méthode de Cramer des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Méthode de Cramer

Cette méthode donne une expression générale de la solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues.

Comme l'étude porte sur des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$, donc le cas où $n = 2$:

Considérons le système $(\sum)$ tel que :

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des constantes fixées.

Calculons le déterminant associé à $(\sum)$ que l'on note Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Si $\Delta \neq 0$, alors le système $(\sum)$ admet un couple de solution (x, y) où $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ avec Δ_x et Δ_y respectivement déterminant de x et déterminant de y donnés par :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

Si $\Delta = 0$, on démontre que dans ce cas le système n'a pas de solution ou admet une infinité de solutions.

Exemple

Résolvons dans ℝ x ℝ le système :

$(\sum 1)\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 7x - 4y = -1 \end{cases}$

Le discriminant du système $(\sum)$ est : $\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 29$

$(\sum 1)$ admet donc un couple unique solution :

$\triangle x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -29$; $\triangle y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -58$

Donc $x = \frac{-29}{-29} = 1$ et $y = \frac{-58}{-29} = 2$

S={(1; 2)}

SEQUENCE 11

Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Objectif

Définir et résoudre par substitution des Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Définition

Un système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^3$ est un ensemble $(\sum)$ de trois équations à trois inconnues de la forme :

$$(\sum)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1(1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2(2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3(3) \end{cases}$$

Où (x, y, z) est le triplet d'inconnues et $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3$ et d_3 sont des constantes appelés coefficients du système et vérifiant les conditions $(a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$, $(a_2, b_2, c_2) \neq (0,0,0)$ et $(a_3, b_3, c_3) \neq (0,0,0)$. Résoudre le système revient à trouver le ou les couples $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui satisfont simultanément les trois équations(1), (2) et (3). Ces couples sont les solutions du système.

Résolution par Substitution

La méthode de substitution consiste à exprimer une des inconnues du système à trois inconnues en fonction de deux autres puis on la remplace par cette expression dans les autres équations. On se ramène ainsi à la résolution de système dans $\mathbb{R}^2$ ou encore à la résolution d'une équation à une inconnue.

Exemple

Résoudre par substitution le système à résoudre suivant

$$(\Sigma)\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 & l(1) \\ x + 3y + 4z = 10 & l(2) \\ 3x - 2y - z = 2 & l(3) \end{cases}$$

Leçon : Analyse combinatoire

SEQUENCE 12

Les ensembles et parties d'un ensemble

Objectifs

- Définir et dénombrer un ensemble fini ;
- déterminer les parties d'un ensemble fini

Définition

Un ensemble est une collection d'objets de même nature ou non appelés éléments.

Il est toujours désigné par une lettre majuscule.

Un ensemble est dit fini si l'on peut compter et donner le nombre exact de ses éléments.

Ce nombre d'éléments est appelé son cardinal noté Card.

Dénombrer un ensemble fini, c'est déterminer son cardinal.

Un ensemble est infini lorsqu'on ne peut déterminer le nombre de ses éléments.

Exemples

1) L'ensemble des lettres de l'alphabet français est
   $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$.
   Il compte 26 éléments. Son cardinal est donc 26 et on note: $\mathrm{Card}\ \mathrm{A} = 26$.
2) L'ensemble des entiers naturels est $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$. Il a un nombre infini d'éléments.

3) L'ensemble des chiffres arabes est : $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Card $B = 10$.

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

A est un ensemble fini.

L'ensemble des parties de A noté P (A) est constitué de toutes les parties vide ou non de A.

Si Card A= n, alors Card P (A)= 2^n.

Exemple

On donne $A = \{1; 2; 3\}$.

Card $A = 3$.

$P\,(A)=\left\{\,\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1;2\}, \{1;3\}\{2;3\}\{1;2;3\}\right\}$.

Card $P\,(A)=2^3= 8$.

NB : Les éléments de P (A) sont des parties de A *donc des sous-ensembles de A.*

L'ensemble vide et la partie constituée de tous les éléments de A sont les éléments de P (A).

La partie constituée de tous les éléments de A est appelé la partie pleine de A.

Exercice

On donne $A = \{a, b, 1, 2\}$.

Ecris l'ensemble $P\,(A)$ et détermine Card $P\,(A)$.

SEQUENCE 13

Partition d'un ensemble

Objectifs

Constituer une partition d'un ensemble

Définition

A est un ensemble.

Des parties de l'ensemble A forment une partition de A si :

- *elles sont toutes non vides ;*
- *elles sont deux à deux disjointes ;*
- *leur réunion forme l'ensemble A.*

Exemple

On donne l'ensemble A $= \{a, b, c, d, e\}$.

- Les parties B $= \{a, e\}$; C $= \{b, c, d\}$ forment une partition de l'ensemble A car :
    - B $\neq \emptyset$ et C $\neq \emptyset$;
    - B $\cap$ C $= \emptyset$;
    - B $\cup$ C $=$ A.
- Les parties E $= \{a, c, d\}$; F $= \{b, c, e\}$ et D $= \{a, d\}$ ne forment pas une partition de A car elles ne sont pas deux à deux disjointes.

Propriété

A est un ensemble fini.

On désigne par $A_1, A_2, A_2, \dots, A_p$ des parties de A formant une partition de A.

On a : Card A= Card A_1 + Card A_2 + Card A_3 + …+ Card A_p car chaque élément de A est un élément d'une et d'une seule des parties $A_1, A_2, A_2, \dots, A_p$ formant la partition de A.

Conséquences

- *Pour toute partie B d'un ensemble fini A, Card A = Card B + Card ($A \setminus B$)*
  où $\bar{B} = A \setminus B$
- *Pour toutes parties B et C d'un ensemble fini A,*
  Card ($B \cup C$) = Card B + Card C – Card ($B \cap C$).

Exercice

A, B et C sont trois parties d'un ensemble fini E.

Etablis le Card (A $\cup B \cup C$).

SEQUENCE 14

Produit cartésien d'ensembles

Objectifs

Etablir le produit cartésien d'ensembles

Définition

A et B sont deux ensembles.

Le produit cartésien de A par B noté $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.

$A\times B$ se lit : « A croix B ».

Remarques

- Cette définition peut s'étendre à un nombre quelconque donné d'ensembles. Le produit cartésien des ensembles $\mathrm{A_1, A_2, A_2, \dots, A_p}$ est l'ensemble $\mathrm{A_1\times A_2\times A_2\times \dots \times A_p}$.
- Le produit cartésien de l'ensemble A × A × A × …× A (p fois A) est noté A^p.
- Les éléments du produit cartésien de deux ensembles sont appelés des couples ; ceux de trois ensembles des triplets ; ceux de quatre ensembles des quadruplets et les éléments de $\mathrm{A_1\times A_2\times A_2\times \dots \times A_p}$, des p-uplets.

Exemple

On donne les ensembles A $= \{a, b; c\}$ et B $= \{1, 2\}$.

Déterminons les éléments du produit cartésien A × B.

Dans un tableau à double entrée, il est pratique de déterminer ces éléments :

B \ A	1	2
a	(a,1)	(a, 2)
b	(b, 1)	(b, 2)
c	(c, 1)	(c, 2)

Ainsi, $A\times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$.

Propriété

A et B étant deux ensembles finis, Card (A× B) = Card A × Card B.

Remarques

La propriété précédente peut être généralisée à p ensembles :

- Pour tous ensembles finis $\mathrm{A_1, A_2, A_2, \dots, A_p}$,

$$\mathrm{Card\ (A_1\times A_2\times A_2\times \dots \times A_p) = Card\ A_1\times Card\ A_2\times Card\ A_2\times \dots \times Card\ A_p}.$$

- Pour tout ensemble fini A à n éléments, Card $(A^p) = n^p$.

Exercice

On lance deux dés ayant des faces numérotées de 1 à 6. Le résultat d'un lancer est un couple de nombres apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.

a) Combien y a-t-il de résultats possibles ?

b) Combien y a-t-il de résultats pour lesquels la somme des deux nombres est-elle supérieure ou égale à 10 ?

SEQUENCE 15

Les premiers outils de dénombrement : le comptage et les diagrammes

Objectifs

Utiliser le comptage ou les diagrammes pour dénombrer un ensemble

Le comptage

Exemple

On donne l'ensemble A $= \{a, b, c, d\}$.

Ecrivons tous les mots de trois lettres distinctes ayant ou non de sens avec les lettres de l'ensemble A et déterminons leur nombre.

On a :

abc, acb, bac, bca, cab, cba,

abd, adb, bad, bda, dab, dba,

acd, adc, cad, cda, dac, dca,

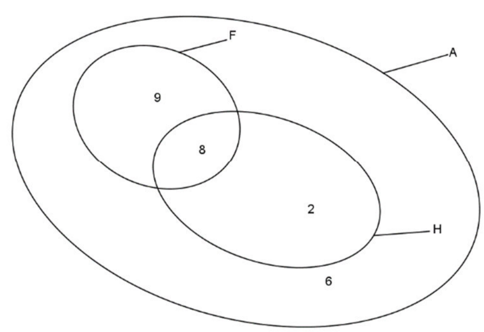
bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb.

Il y a au total 24 mots de trois lettres distinctes ayant ou non de sens que l'on peut former avec les quatre lettres de l'ensemble A.

Les diagrammes

Exemple

Dans une classe de 25 élèves, 17 jouent au football, 10 jouent au handball et 8 pratiquent les deux sports.



Déterminons à l'aide d'un diagramme le nombre d'élèves jouant seulement au football, seulement au handball et le nombre des élèves ne pratiquant aucun des deux sports.

Sur le diagramme ci-dessus, on a désigné par :

A la classe considérée, Card A $= 25$; F l'ensemble des élèves jouant au football, Card F $= 17$; H l'ensemble des élèves jouant au handball, Card H $= 10$ et par $F \cap H$ l'ensemble des élèves pratiquant les deux sports, Card $F \cap H = 8$.

Comme Card $F \cap H = 8$, il ne restera que $17 - 8 = 9$ élèves ne jouant seulement qu au football.

De même, il ne restera que $10 - 8 = 2$ élèves ne jouant seulement qu'au handball.

Finalement, dans cette classe, il y a $9 + 2 + 8 = 19$ élèves pratiquant au moins l'un des deux sports.

Il restera donc $25 - 19 = 6$ élèves ne pratiquant aucun des deux sports.

Exercice

Dans un établissement scolaire, il 55% de filles et 45% de garçons. 12% des garçons et 18% des filles n'ont jamais redoublé une classe.

1) Quelle est la proportion d'élèves n'ayant jamais redoublé ?
2) Quelle est la proportion de filles parmi les élèves n'ayant jamais redoublé ?

SEQUENCE 16

Les premiers outils de dénombrement : les arbres

Objectifs

Utiliser les arbres pour dénombrer un ensemble

Les arbres

Exemples

1) On donne l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Combien peut- on former des nombres de trois chiffres distincts avec les éléments de A ?

A l'aide d'un arbre, formons ces nombres et déterminons combien ils sont :

On dénombre au total 24 nombres formés de trois chiffres distincts choisis parmi les éléments de A.

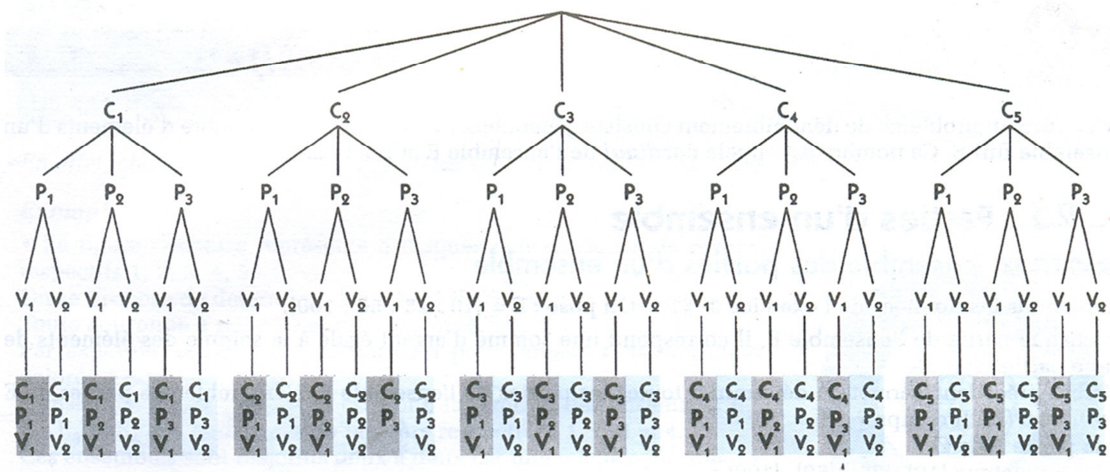
2) Pour aller à une cérémonie de mariage, Monsieur Narem peut choisir la chemise, le pantalon et la veste qu'il portera. Il possède 5 chemises, 3 pantalons et 2 vestes.

Combien de choix distincts peut-il effectuer ?

A l'aide d'un arbre, effectuons ces différents choix et déterminons leur nombre.

A cet effet, désignons par C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 les 5 chemises, par P_1, P_2, P_3 les 3 pantalons et par V_1 et V_2 les 2 vestes.

On obtient l'arbre suivant :



Il y a au total 30 choix distincts possibles que peut effectuer Mr Narem.

Exercices

1) On dispose de quatre pièces de monnaie : une pièce de 5F, une pièce de 10F, une pièce de 25F et une pièce de 50F. Quelles sont toutes les sommes possibles que l'on peut constituer avec ces pièces ?
2) Quatre couples sont réunis pour une soirée dansante. Les quatre hommes invitent chacun une femme à danser.

   De combien de façons peut se faire cette invitation sachant qu'aucun homme ne danse avec son épouse ?

SEQUENCE 17

Les arrangements avec remise

Objectifs

Utiliser les arrangements avec remise pour dénombrer un ensemble

Les arrangements avec remise : les p-uplets d'un ensemble

Définition

A est un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul.

Un p-uplet d'éléments de A est un arrangement avec remise des n éléments de A p à p.

Un p-uplet est donc un élément de A^p

Propriété

Le nombre des p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p *.*

C'est aussi le nombre des applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

Exemples

1) On donne l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4,5\}$. Combien de nombres de trois chiffres distincts ou non peut-on former avec les éléments de A ?

   En effet, former un nombre de trois chiffres distincts ou non choisis parmi les éléments de l'ensemble A, c'est faire un triplet d'éléments de A.

   Le nombre total de ces triplets est : $5^3 = 125$ nombres.

2) De combien de façons peut-on ranger 9 livres dans une bibliothèque comportant 3 étagères ?

   Ranger 9 livres dans une bibliothèque à 3 étagères, c'est définir une application d'un ensemble à 9 éléments vers un ensemble à 3éléments.

   Le nombre total de ses applications est : 3^9.

SEQUENCE 18

Les arrangements sans remise

Objectifs

Utiliser les arrangements sans remise pour dénombrer un ensemble

Les arrangements sans remise

Définition

E est un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$.

Un arrangement sans remise des n éléments de A p à p est un p-uplet d'éléments tous distincts de E.

Propriété

Le nombre total des arrangements sans remise p à p des n éléments d'un ensemble E est noté A_n^p.

C'est aussi le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$.

Remarques

– Le nombre de facteurs du produit $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ est p.

Exemple

$A_{12}^5 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$.

Il y a 5 facteurs dans le produit.

– Si $p > n$, il est impossible de choisir p éléments tous distincts dans E tout comme il est impossible d'établir une application injective d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

Notation factorielle et propriété

On note : $n\,!$ et on lit : « factorielle n ».

$n\,! = n \times (n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Par convention, $0\,! = 1$.

Ainsi, n et p étant deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$,

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Par convention, $A_n^0 = 1$

SEQUENCE 19

Les permutations

Objectifs

Utiliser les permutations pour dénombrer un ensemble

Définition

A est un ensemble à n éléments.

Une permutation des n éléments de A est un arrangement sans remise de tous les n éléments de A.

Le nombre total de ces permutations est n !

C'est aussi le nombre des bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments.

Exemples

1) Déterminons le nombre de façons de disposer 5 drapeaux de 5 pays différents sur 5 mâts.

   Il y a en effet $5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ façons de disposer 5 drapeaux de 5 pays différents sur 5 mâts.

2) 6 athlètes prennent le départ d'une course à pied. Chacun d'eux prend au hasard un des 6 couloirs de la piste. Déterminons le nombre de départs possibles.

   Il y a $6\,! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ départs possibles.

SEQUENCE 20

Les combinaisons

Objectifs

Utiliser les combinaisons pour dénombrer un ensemble

Définition

A est un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que $p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de A tout sous-ensemble de A ayant p éléments.

Le nombre total des combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments noté C_n^p est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarques

– une combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments ne peut exister que si $p \leq n$.

– A est un ensemble à n éléments.
  - Il y a une seule partie à 0 élément de A ; c'est la partie vide : $C_n^0 = 1$.
  - Il y a une seule partie à n éléments de A ; c'est l'ensemble A lui-même : $C_n^n = 1$.
  - Il y a n singletons inclus dans A : $C_n^1 = n$.

Propriétés

n et p sont deux nombres entiers tels que $p \leq n$.

– $C_n^{n-p} = C_n^p$;

– *Si de plus $0 < p < n$ alors, on a :* $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$

SEQUENCE 21

Binôme de Newton

Objectifs

Utiliser la formule du binôme de Newton pour développer des expressions

Formule du binôme de Newton : propriété

a et b sont deux nombres réels et n, un nombre entier naturel non nul. On a :

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^p a^{n-p} b^p + \ldots + +$
$C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$

En utilisant le symbole Σ, on écrit : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{n-p} b^p$.

Exemples

1) $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^{2-1} b^1 + C_2^2 a^{2-2} b^2$.
2) $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^{3-1} b^1 + C_3^2 a^{3-2} b^2 + C_3^3 a^{3-3} b^3$.

Triangle de Pascal

La propriété $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$ et les égalités $C_n^0 = C_n^n = 1$ nous permettent de calculer de proche en proche les valeurs de C_n^p.

On utilise, à cet effet, la disposition ci-dessous appelée « triangle de Pascal » :

$$\boxed{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p}$$

n \ p	1	2	3	4	5	6	7	8	…	…
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
…										

Ce tableau permet de retrouver facilement les coefficients de la formule du binôme de Newton.

Exemple

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

SEQUENCE 22

Principe de dénombrement : tirage de boules d'une urne

Objectifs

Modéliser les différents types de tirages

NB : Pour résoudre des problèmes de dénombrement, on a utilisé le comptage, les diagrammes, les arbres.

On a aussi utilisé les arrangements avec remise (les p-uplets), les arrangements sans remise, les permutations et les combinaisons.

Il est donc nécessaire de connaitre les caractéristiques de ces différentes notions et de préciser leurs domaines d'utilisation.

Tirages de boules d'une urne

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire 3 boules de cette urne.

Calcule le nombre de tirages distincts dans les trois cas suivants :

a) les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne ;
b) les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne ;
c) les trois boules sont tirées simultanément.

Attention

On peut récapituler ces différents tirages de p boules et leur dénombrement par le tableau suivant où A désigne un ensemble ayant n éléments :

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Outils	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	Oui	Non	p-uplets	n^p
Tirages successifs sans remise	Oui	Oui	Arrangements sans remise	A_n^p
Tirages simultanés	Non	Oui	Combinaisons	C_n^p

SEQUENCE 23

Principe de la somme et du produit

Objectifs

Utiliser le principe de la somme et du produit

Exemple

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 dont 5 sont rouges, 3 vertes et 4 blanches. On tire successivement et avec remise 3 boules de cette urne.

Calcule le nombre de tirages distincts dans les deux cas suivants :

1) Les 3 boules tirées sont de même couleur ;
2) La première et la troisième boule tirées sont vertes.

Solution

Désignons par U l'ensemble des 12 boules contenues dans l'urne et par R, V et B les parties de U contenant respectivement les boules rouges, vertes et blanches.
On sait que le nombre total des tirages est : 12^3.

1) Avoir 3 boules de même couleur revient à obtenir soit 3 boules rouges, soit 3boules vertes, soit 3 boules blanches. Les ensembles de tirages correspondant à ces trois cas forment une partition de l'ensemble des tirages cherchés.
   L'ensemble des tirages de 3 boules rouges est l'ensemble des triplets de R, de même l'ensemble de tirages de 3 boules vertes et de 3 boules blanches sont respectivement les triplets de V et de B.
   Le nombre total des tirages de 3 boules de même couleur est: $5^3 + 3^3 + 4^3 = 216$.
2) La première et la troisième constituent un couple de V, c'est-à-dire un élément de V^2, la deuxième boule est un élément de U. L'ensemble des tirages cherchés est $V^2 \times$U. On a : Card $(V^2) = 3^2$ et Card(U) $= 12$. Le nombre de tirages distincts dans lesquels la première et la troisième boule sont vertes est : $3^2 \times 12 = 108$.

Méthode

Pour dénombrer un ensemble A, on peut utiliser l'un des deux principes suivants.

- Principe de la somme : on définit une partition de A par des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_3$.
  On a alors $Card\,(A) = Card(A_1) + Card\,(A_2) + \ldots + Card(\,A_3)$.
- Principe du produit : on décompose l'ensemble A en un produit cartésien des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_3$.
  On a alors $Card\,(A) = Card(A_1) \times Card\,(A_2) \times \ldots \times Card(\,A_3)$.

Exercice d'entrainement de la compétence de base 1 du deuxième trimestre
Leçon : Etude de fonctions

Exercice 1

Soit $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x+1}$

a) Démontrer que la courbe de f admet une asymptote verticale dont on déterminera une équation.

b) Démontrer que la droite d'équation $y = 2x + 5$ est asymptote à la courbe de f.

Exercice 2

Etudier et représenter graphiquement les fonctions :

a) $f: x \to x^3 + 3x^2 - 4$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 5$

c) $h(x) = \frac{-2x+1}{x-2}$

Exercice 3

soit f la fonction définie par :

$f(x) = \frac{x^2-2x+3}{1-x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe representative.

a) Déterminer le domaine de définition de f et montrer que $(\mathcal{C})$admet une asymptote verticale.

b) Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation.

c) Montrer que la droite (Δ) d'equation $y = -x + 1$ est asymptote à (C)

d) Etudier la position de (Δ) par rapport à (C).

e) Tracer (Δ) et (C)

Exercice 4

Soit $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

1) Montrer que -1 est solution de l'équation $P(x) = 0$

2) Montrer que P(x) peut se mettre sous la forme de : $P(x) = (x+1)(2x^2 + ax + b)$ *ou a et b sont deux réels à déterminer*

3) Trouver les solutions de l'équation : $7x^2 + 2x = 3 - 2x^3$

4) Etudier le signe de P(x) suivant les valeurs de x

Exercice 5

1) Soit l'équation : $x^2 + 5x - 7 = 0$

   a) Pourquoi peut-on affirmer que cette équation a deux racines distinctes $\alpha \ et \ \beta$?

   b) Sans calculer ses racines, calculer leur somme S et leur produit P.

2) Soit $A = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

Exprimer A en fonction de $S \ et \ P$ et calculer A.

3) Soit$B = \alpha^2 + \beta^2$. Montrer que $B = S^2 - 2P$ et calculer B.

Exercice d'entrainement de la compétence de base 2 du deuxième trimestre

Leçon : Systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 3y = 5 = \quad 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2 = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y - 1 = 0 \\ 2x + \frac{1}{2}y = 5 \end{cases}$

$e)$ $\begin{cases} 7x - 2y = 20 \\ 3x - 5y = 21 \end{cases}$

$e)$ $\begin{cases} 7x - 2y = 2 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$

$f)$ $\begin{cases} -5x + 4y = 5 \\ -9x + 5y = -2 \end{cases}$

Exercice 2

Madame Amina se rend au marché pour acheter des fruits.

Elle a acheté 30 oranges et bananes pour 500f.

Sachant qu'une orange et une banane coûte respectivement 20f et 10f, déterminer le nombre de fruits de chaque espèce.

Exercice 3

Détermine un polynôme du second degré dont la représentation graphique passe par

A $\binom{0}{1}$, B $\binom{1}{-3}$ et C $\binom{-1}{7}$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \quad (1) \\ x + 3y + 4z = 10 \ (2) \\ 3x - 2y - z = 2 \ (3) \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y - z = 7 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

Exercice 5

Une ménagère se rend au marché et achète des bananes, des mangues et ananas dont les prix à l'unité sont respectivement 25f, 60f et 80f. Elle achète un total de 12 fruits pour une somme de 640f.

Déterminer le nombre de fruits de chaque variété.

Exercice 6

Trouver 3 nombres entiers naturels tels que :

- leur somme est 17 ;
- dans l'ordre, les deux derniers sont consécutifs ;
- pris dans l'ordre, la différence du deuxième avec le premier est 2

EXERCICE : Analyse combinatoire

Exercice 1

Un club sport comprend 35 membres.18 membres pratiquent le football, 16 le basket et 10 les deux sports.

1) Déterminer le nombre des membres du club qui pratiquant unique le football.
2) Déterminer le nombre de membre du club ne pratiquant aucun des deux sports.

Exercice 2

1) Combien y a-t-il de nombre de 3 chiffres ?
2) Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres commençant par 2 ?
3) Combien y a-t-il de nombre de 3 chiffres terminés par 45 ?

Exercice 3

Un jury est composé de 5 membres choisis dans une liste de 20 personnes dont 12 hommes .combien peuvent–on former de jurys comprenant :

a) Seulement des femmes ?
b) 3 hommes et 2 femmes ?
c) Au plus 2 hommes ?
d) Au moins 2 hommes ?

Exercice 4

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2) Combien y a-t-il de tirages possibles, sachant que les boules tirées sont des mêmes couleurs ?
3) Combien y a-t-il de tirages possibles, sachant que les boules tirées sont des différentes couleurs ?

Exercice 5

Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façon peut-elle s'habiller ?

Exercice 6

Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1) Combien de résultats peut-on obtenir ?
2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Exercice 7

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non. 123456ABC

1) Combien de codes différents peut-on former ?

2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?

3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?

4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres distincts ?

Exercice 8

Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire 2 délégués.

1) Quel est le nombre de choix possibles ?

2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille ?

3) Quel est le nombre de choix si l'on impose deux garçons ?

Exercice 9

1) Dénombrer les anagrammes du mot PATRICE

2) Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :

   a) Commençant et finissant par une consonne.
   b) Commençant et finissant par une voyelle.
   c) Commençant par une consonne et finissant par une voyelle.
   d) Commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

Exercice 10

4 garçons et 2 filles s'assoient sur un banc.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?

2) Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre ?

3) Même question si chaque fille est intercalée par 2 garçons ?

4) Même question si les filles veulent rester l'une à coté de l'autre ?

Exercice 11

Un sac contient 3 jetons indiscernables au toucher : un vert, un noir et un rouge.

1) On tire successivement deux jetons du sac de la façon suivante : après avoir tiré un jeton et noté sa couleur, on remet le jeton tiré dans le sac, on tire un second jeton et on note sa couleur. Dénombrer tous les résultats possibles à l'issus de ces tirages.

2) On recommence ensuite sans remettre le 1er jeton dans le sac. Dénombrer tous les résultats possibles à l'issue de ce nouveau tirage.

Exercice 12

Soit le nombre 1234. En permuttant au hasard les 4 chiffres de ce nombre, on obtient un autre nombre. On dit qu'il y a coïncidence chaque fois qu'un chiffre retrouve sa place initiale. Ainsi par exemple si on compose le nombre 4213, il ya coïncidence car le 2 est a sa place et dans 1324 , il y'en a deux.

1) Dresser l'arbre décrivant toutes les possibilités pour ranger les 4 chiffres et dénombrer les.
2) Combien existe-il de nombre présentant exactement 3 coïncidences ?
3) Combien existe-il de nombre présentant exactement 2 coïncidences ?
4) Quels sont les nombres présentant exactement une coïncidence ?
5) Quels sont les nombres ne présentant aucune coïncidence ?

Exercice 13

On dispose de 3 couleurs : rose, gris et violet pour colorier 4 ronds mis en ligne.

1) Dénombrer tous les coloriages possibles.
2) Dénombrer tous les coloriages avec deux ronds roses exactement.

Exercice 14

Parmi les 1000 élèves d'un Lycée, 720 suivent le cours d'Anglais, 500 le cours d'allemand, 250 le cours d'espagnol. De plus,parmis ceux qui font de l'anglais,340 suivent aussi le cours d'allemand et 140 le cour d'espagnol. Parmi ceux qui font de l'espagnol, 130 font aussi de l'allemand. Enfin 40 apprennent les 3 langues.

Indiquer le nombre d'élèves n'apprenant :

1) Que l'anglais ;

2) Que l'allemand ;

3) Que l'espagnol ;

4) Aucune de ces 3 langues.

EVALUATION

Exercice 1

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

(S_1) $\begin{cases} x-2y=20 \\ x-5y=21 \end{cases}$; (S_2) $\begin{cases} 7x-y=2 \\ 3x-y=2 \end{cases}$; (S_3) $\begin{cases} -5x+4y=1 \\ -9x+5y=-3 \end{cases}$

Exercice 2

On dispose de trois dés à six faces numérotés de 1 à 6.on lance simultanément les trois dés et l'on note les faces supérieures.

1) Déterminer le nombre de résultats possibles.
2) Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres identiques.
3) Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres distincts.
4) Déterminer le nombre de résultats ne comportant aucun 6.
5) Déterminer le nombre de résultats comportant au moins un 6.
6) Déterminer le nombre de résultats comportant exactement deux 6.

Exercice 3

soit f la fonction définie par :

$f(x) = \frac{x^2-2x+3}{1-x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe representative.

a) Déterminer le domaine de définition de f et montrer que $(\mathcal{C})$admet une asymptote verticale.
b) Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation.
c) Montrer que la droite (Δ) d'equation $y=-x+1$ est asymptote à (C)
d) Etudier la position de (Δ) par rapport à (C).

Tracer (Δ) et (C)

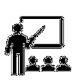
Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice :

- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………

Conseils et orientation de l'enseignant :

- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………
- …………………………………………………………………………………………………

Evaluation de la compétence



☐ ☐ ☐

Troisième trimestre

Programmation horaire du 3e trimestre

3e trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée des chapitres	Nombre d'heures du Trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
Avril- juin (4-13 Avril : Congé) 9 semaines	CB1	4	Suites numériques	10H	2H	2H	14H	27H
	CB2	7	Statistique	9H	2H		13H	

FICHE DE PROGRESSION TROISIEME TRIMESTRE

Trimestre	Période	Contenus	
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre
3	1er Avril au 10 Mai	– Suites numériques	– Statistiques
	11 Mai au 10 Juin		– Statistiques (Suite et fin)

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Première L Troisième trimestre

Compétence de Base 1

Terminale D–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les suites numériques.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
– Suites numériques	– Définir une suite numérique. – Exprimer une suite numérique de façons diverses. – Représenter graphiquement les termes d'une suite numérique. – Etudier les suites arithmétiques et les suites géométriques. – Résoudre des problèmes correspondant aux suites numériques.	– Définition d'une suite numérique – Expression d'une suite numérique de façons diverses. – Représentation graphique des termes d'une suite numérique. – Etude des suites arithmétiques et des suites géométriques. – Résolution des problèmes correspondant aux suites numériques : intérêts simples, intérêts composés, démographie.

Terminale D–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les statistiques.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
- Statistiques	- Etudier les séries statistiques présentant un regroupement en classes d'amplitudes égales. - Construire l'histogramme et les courbes cumulatives. - Déterminer les caractéristiques de position et de dispersion d'une série statistique à une variable. - Etudier les séries chronologiques.	- Etude des séries statistiques présentant un regroupement en classes d'amplitudes égales. - Construction de l'histogramme et des courbes cumulatives. - Détermination des caractéristiques de position et de dispersion d'une série statistique à une variable. - Etude des séries chronologiques.

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du troisième trimestre

Leçon : Suites numériques

SEQUENCE 1

Définition d'une suite numérique

Objectif

Définir et exprimer une suite numérique

Définition

Une suite numérique (u_n) est une fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

En général, on note u_n le terme d'indice n au lieu de (u_n) qui est une suite c'est-à-dire une fonction.

Exemples

1) Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n}$

(u_n) *est définie sur* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire pour tout entier n ≥ 1

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \frac{1}{n} \end{aligned}$$

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que

$$\begin{aligned} u_n : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto 2n - 5 \end{aligned}$$

Expression d'une suite numérique

En général, une suite numérique (u_n) est déterminée par :

- soit une formule explicite permettant de calculer u_n en fonction de n ;
- soit le premier terme et une formule de récurrence exprimant u_n en fonction de u_{n-1} .

Exemples

1) soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{6n+3}{n+1}$

(u_n) est une suite déterminée par une formule explicite.

2) soit la suite (v_n) définie sur ℕ par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ V_n = \frac{1}{2}V_{n-1} + 3, \ \forall\, n \in N \end{cases}$

(v_n) est une suite définie par son premier terme v_0 et une formule de récurrence.

SEQUENCE 2

Représentation graphique d'une suite numérique définie par une formule explicite

Objectif

Représenter graphiquement une suite numérique définie par une formule explicite

NB : Une suite numérique étant une fonction, elle peut être représentée graphiquement dans le plan muni d'un repère.

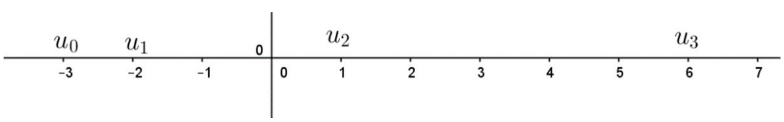
Il est également possible de représenter les termes d'une suite numérique sur un axe.

Suites définies par une formule explicite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = n^2 - 3$

– Représentation sur un axe.

On a : $u_0 = -3$; $u_1 = -2$; $u_2 = 1$;$u_3 = 6$



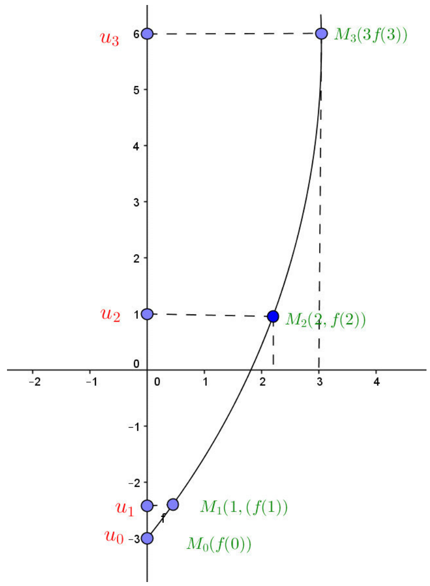
– Représentation dans le plan

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit (C) la courbe représentative de la fonction $f: x \longmapsto x^2 - 3$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on désigne par M_n le point de coordonnées$(n, f(n))$. L'ensemble des points M_n est une représentation graphique de la suite (u_n) dans le plan.

Lorsqu'on projette les points M_n sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des termes de la suite sur l'axe (OJ).



SEQUENCE 3

Représentation graphique d'une suite numérique définie par une relation de récurrence

Objectif

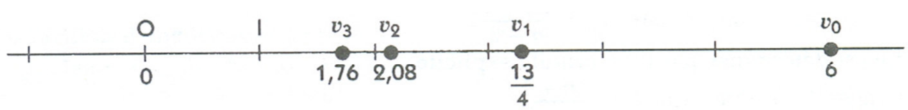
Représenter graphiquement une suite numérique définie par une relation de récurrence

Suites définies par une formule de récurrence

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 6 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{3}{v_n}\right) \end{cases}$

- Représentation sur un axe

On a: $v_0 = 6$; $v_1 = \frac{13}{4}$; $v_2 = \frac{217}{104}$; $v_3 \simeq 1{,}76$



- Représentation dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthornormé (O, I, J).

Soit (C) la courbe représentative de la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ et (D) la droite d'équation $y = x$.

Construisons v_1.

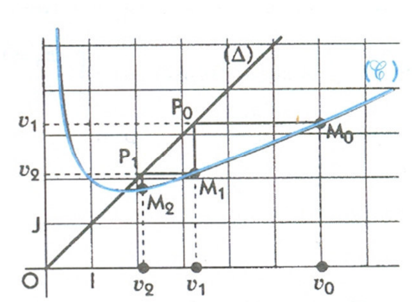
Soit M_0, point de (C) d'abscisse $v_0 = 6$; l'ordonnée de M_0 est $v_1 = g(v_0)$.

Soit P_0, point de (D) d'ordonnée v_1 ; l'abscisse de P_0 est v_1.

Soit M_1, point (C) d'abscisse v_1 ; l'ordonnée de M_1est $v_2 = g(v_1)$.

Soit P_1, point de (D) d'ordonnée v_2 ; l'abscisse de P_1est v_2.

Cette méthode permet une construction de proche en proche sur l'axe (OI) des termes d'une suite définie par une formule de récurrence.



SEQUENCE 4

Etude d'une suite numérique

Objectifs

- Minorer, majorer une suite numérique ;
- étudier les variations d'une suite numériques.

Minoration, majoration

Définitions

Soit (u_n) *une suite numérique.*

– *On dit que* (u_n) *est minorée s'il existe un nombre réel* m *tel que, pour tout entier naturel n,* $(u_n) \geq m$.

– *On dit que* (u_n) *est majorée s'il existe un nombre réel* M *tel que, pour tout entier naturel n,* $(u_n) \leq M$.

– *On dit que* (u_n) *est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.*

Remarque

Une suite est positive (respectivement négative) si elle est minorée (respectivement majorée) par 0.

Sens de variation

Définitions

Soit n_0 *un entier naturel donné et* (u_n) *une suite numérique définie pour tout entier naturel* $\geq n_0$ *.*

- u_n *est dite croissante si et seulement si pour tout entier* $n \geq n_0, u_n \leq u_{n+1}$.
- u_n *est dite décroissante si et seulement si pour tout entier* $n \geq n_0, u_n \geq u_{n+1}$.
- u_n *est dite constante si et seulement si pour tout entier* $n \geq n_0, u_n = u_{n+1}$.

Exercice

On donne les suites numériques (u_n) et (v_n)suivantes :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 4n + 4$

$\forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Démontrer que la suite (u_n)est croissante et (v_n)décroissante.

SEQUENCE 5

Suites arithmétiques

Objectif

Définir une suite arithmétique

Définition

Une suite numérique (u_n) *est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n, on a :* $u_{n+1} = u_n + r$ *.*

Le nombre r est appelé raison de la suite.

Exemples

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 7 - 9n$
2) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = -1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n - 3 \end{cases}$

Propriété

Soit (u_n) *une suite arithmétique de premier terme* u_0 *et de raison r.*

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Exercice

Considérons la suite arithmétique (u_n) telle que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.

a) Détermine la raison et le premier terme de (u_n)
b) Exprime u_n en fonction de n et u_0.

Remarques

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de montrer que:

- soit la différence de deux termes consécutifs de la suite est un nombre réel indépendant de n :
- soit ou écrire (u_n) sous la forme $u_n = an + b$,où a *et* b sont deux nombres réels indépendants de n.

SEQUENCE 6

Variations et somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Objectifs

- Etudier les variations d'une suite arithmétique ;
- calculer la somme des $(\mathrm{n} + 1)$ premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Sens de variation

Propriété

Soit (u_n) *une suite arithmétique de raison r :*

- *si* $r > 0$ *, alors* (u_n) *est croissante ;*
- *si* $r < 0$ *, alors* (u_n) *est décroissante ;*
- *si* $r = 0$ *, alors* (u_n) *est constante.*

Somme des (n + 1) premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes consécutifs de la suite (u_n), c'est-à-dire :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \cdots u_n$.

Alors, on a :

$S_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}$

Exemple

La somme de n premiers nombres entiers naturels non nuls est :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(1+n)}{2}$$

SEQUENCE 7

Suites géométriques

Objectifs

Définir une suite géométrique

Définition

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout entier naturel n, on a: $u_{n+1} = qu_n$.

Le nombre réel q est appelé raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 10^{-n}$.

   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme 1.

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = -4 \times 2^n$

   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme – 4.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = u_0q^n$.

Exemple

Soit la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$

Détermine la raison et le premier terme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarques

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, on utilise l'un des procédés suivants :

– établir que le quotient de deux termes consécutifs de (u_n) (si(u_n) est à termes non nuls) est un nombre réel indépendant de n : $\frac{u_n}{u_{n-1}} = q$

– écrire (u_n) sous la forme $u_n = aq^n$, où a *et* q sont deux nombres réels indépendants de n.

Exercices

a) Soit la suite géométrique (u_n) de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 0{,}2$.

Calculer u_4, u_{20} *et* u_{100}.

b) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2}{3^n}$.

Montrer que cette suite est géométrique.

SEQUENCE 8

Variations et somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique

Objectifs

- Etudier les variations d'une suite géométrique ;
- Calculer les $(n + 1)$ premiers termes consécutifs d'une suite géométrique.

Variations

Propriété

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite géométrique de raison* q *et de premier terme non nul* u_0.

Pour $u_0 > 0$, *on a :*

– *Si* $q > 1$, *alors la suite* u_n *est dite croissante.*
– *Si* $0 < q < 1$, *alors la suite* u_n *est dite décroissante.*

Pour $u_0 < 0$, *on a :*

– *Si* $q > 1$, *alors la suite* u_n *est dite décroissante.*

– *Si* $0 < q < 1$, *alors la suite* u_n *est dite croissante.*

NB : Si la raison $q < 0$ alors la suite géométrique (u_n) n'est pas monotone.

Exemples

1) $u_n = 2(\sqrt{3})^n$ étant une suite géométrique,

(u_n) est une suite croissante car $u_0 = 2 > 0$ et $q = \sqrt{3} > 1$.

2) $v_n = \frac{3}{2^n}$ étant une suite géométrique alors (v_n) est croissante car $v_0 = 3$et $0 < q < 1$.

Somme des (n + 1) premiers termes consécutifs d'une suite géométrique

Théorème

Soit (u_n) *une suite géométrique de raison q (avec* $q \neq 1$*) et de premier terme* u_0. *On note* S_n *la somme de* $(n + 1)$ *premiers termes de la suite* (u_n) *c'est-à-dire :*

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Alors, on a :

$S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

SEQUENCE 9

Notion de limite d'une suite numérique

Objectifs

Etudier la limite d'une suite numérique

Suites convergentes

Définition

Soit (u_n) *une suite numérique et* l *un nombre réel.*

On dit que (u_n) *admet pour limite* l *si tout intervalle contenant* l *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

On dit alors que la suite (u_n) *est convergente.*

On note $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$

Exemple

Pour tout $n \geq 1, u_n = \frac{2n+1}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ alors (u_n) est convergente.

Remarque

Si une suite est convergente alors sa limite est unique.

Suites divergentes

Définition

Soit (u_n) *une suite numérique.*

(u_n) *est dite suite divergente si la limite de* (u_n) *tend vers l'infini ou* (u_n) *n'admet pas de limite.*

Exemples

Prenons par exemple $u_n = \sqrt{n}, v_n = n \; et \; w_n = (-1)^n$

On a $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et

$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1, & si \; n \; est \; impair \\ \;\; 1, & si \; n \; est \; pair \end{cases}$

Donc les suites $u_n, v_n \; et \; w_n$ sont toutes des suites divergentes.

Théorème (limite d'une suite géométrique)

Soit (u_n) *une suite géométrique de raison q avec q non nul et différent de 1. Si* $-1 < q < 1$*, alors la suite* (u_n) *converge vers 0 :* $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$*.*

Si $q > 1$*, alors la suite* (u_n) *est divergente.*

Si $q \leq -1$, alors la suite n'admet pas de limite.

SEQUENCE 10

Raisonnement par récurrence

Objectifs

Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer une propriété

NB :Un raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une propriété $P(n)$ qui dépend de l'entier naturel n est vraie ou fausse pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Définition (Principe de récurrence)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit une propriété $P(n)$.

- Si on montre que $P(0)$ est vraie (Etape d'initialisation)

- On suppose que $P(n)$ est vraie

- Si on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n+1)$ est vraie (Etape d'hérédité)

alors pour tout $n \in N$, $P(n)$ est vraie.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$.

Appliquons le principe de récurrence

On a $\forall\, n \in N$,

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Montrons que $\forall\, n \in N, u_n = 2^n - 1$.

On considère la propriété P définie pour $n \geq 0$ par

$P(n): u_n = 2^n - 1$.

Etape d'initialisation

pour $n = 0$:

En effet $u_0 = 0$ et pour $n = 0$, on a $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc $P(0)$: $u_0 = 2^0 - 1$ est vraie au rang $n = 0$.

Etape d'hérédité

Supposons que, pour un certain entier $n > 0$ fixé, on ait la propriété $P(n)$ vraie c'est-à-dire $P(n)$: $u_n = 2^n - 1$.

Montrons la propriété $P(n+1)$: $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$:

on a

$u_{n+1} = 2u_n + 1$, d'après la définition de u_n

$u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$, car par hypothèse on a $u_n = 2^n - 1$.

$u_{n+1} = 2.2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

Donc la propriété $P(n+1)$: $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ est vraie.

D'où $\forall\, n \in N, u_n = 2^n - 1$.

Leçon de la compétence de base 2 du troisième trimestre

Leçon : statistiques

SEQUENCE 11

Exemple de séries statistiques présentant un regroupement en classes d'amplitudes égales : effectifs cumulés, fréquences cumulées

Objectifs

NB : A partir d'un exemple, nous déterminerons les effectifs cumulés et les fréquences cumulées des séries statistiques présentant un regroupement en classes d'amplitudes égales

Introduction

Pour réaliser l'étude statistique d'un caractère quantitatif pouvant prendre toute valeur sur un intervalle I, on regroupe parfois ces valeurs en classes. Ces classes forment une partition de l'intervalle I.

Pour ce paragraphe, on ne considèrera que des séries statistiques à modalités regroupées en classes.

Une telle série comportant p classes de bornes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ $(a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p)$ est notée : $([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ où n_i est l'effectif de la classe $[a_{i-1}, a_i[$.

Effectifs cumulés, fréquences cumulées

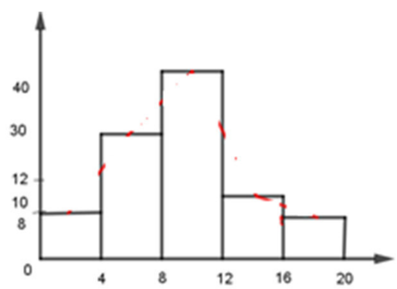
Exemple

Série statistique repartie en classes d'amplitude égale

Dans le tableau suivant, on donne la répartition des notes en mathématiques dans la classe de 1re S_2 du lycée Félix Eboué :

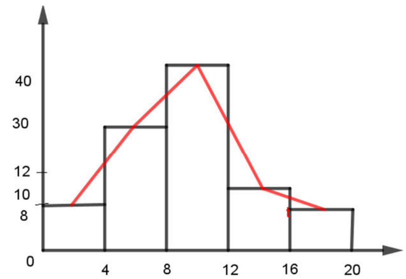
Notes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20[
Effectif(n_i)	8	24	32	10	6
Fréquence(f_i)	10%	30%	40%	12%	8%

Représentons graphiquement cette série statistique par un histogramme.



Les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes correspondantes.

1) Construisons le polygone des effectifs en joignant les points milieux de l'histogramme.



2) Dressons les tableaux des effectifs cumulés croissantes et décroissantes de cette série statistique :

Notes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20[
Effectifs cumulés croissants	8	32	64	74	80
Effectifs cumulés décroissants	80	72	48	16	6

Interprétation des effectifs cumulés croissants ou décroissants

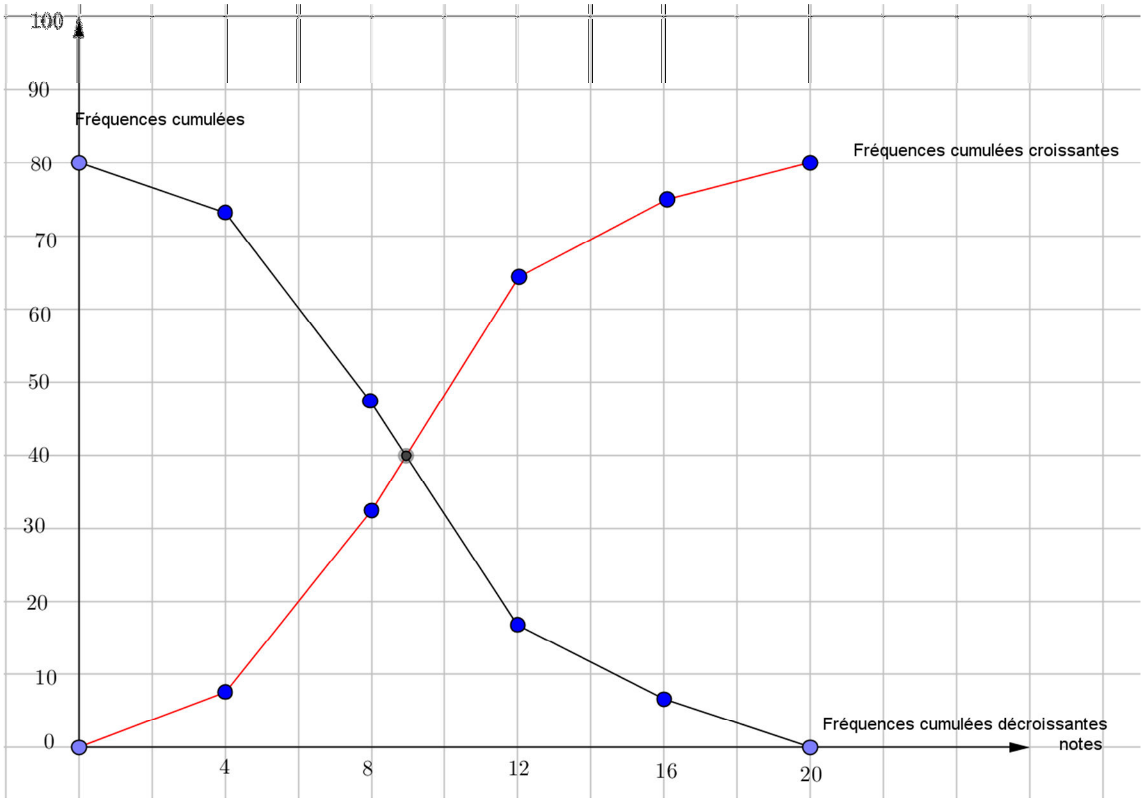
Dans le tableau ci – dessus, la troisième colonne indique que 64 élèves sur les 80 ont obtenu une note au plus égale à 12/ 20 et 48 élèves ont obtenu une note égale au moins à 08/20 à ce devoir.

On en déduit le tableau suivant :

a_i	0	4	8	12	16	20
Nombre d'élèves ayant obtenu au plus a_i	0	8	32	64	74	80
Nombre d'élèves ayant obtenu au moins a_i	80	72	48	16	6	0

Dans ce tableau, la somme des effectifs de chaque colonne est égale à l'effectif total.

Ces résultats peuvent être représentés par les graphiques suivants :



SEQUENCE 12

Exemple de séries statistiques présentant un regroupement en classes d'amplitudes inégales : Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Objectifs

A partir d'un exemple, déterminer les effectifs cumulés et les fréquences cumulées des séries statistiques présentant un regroupement en classes d'amplitudes **inégales**

Effectifs cumulés, fréquences cumulées

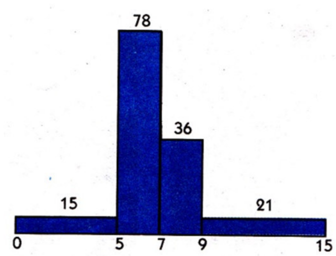
Exemple

Série statistique répartie en classes d'amplitude inégale

Dans le tableau suivant, on a relevé la distance parcourue (en milliers de kilomètres) par chacun des 150 bus de la compagnie « Express » entre leur mise en circulation et leur première panne.

Distance parcourue	[0; 5[	[5; 7[	[7; 9[	[9; 15[
Effectif (n_i)	15	78	36	21
Fréquence (f_i)	10%	52%	24%	14%

1) Représentons graphiquement cette série statistique par un histogramme.



Les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes correspondantes.

2) Dressons les tableaux des effectifs cumulés croissants et décroissants de cette série statistique :

Distance parcourue	[0; 5[	[5; 7[	[7; 9[	[9; 15[
Effectif cumulé croissant	15	93	129	150
Effectif cumulé décroissant	150	135	57	21

Interprétation des effectifs cumulés croissants ou décroissants

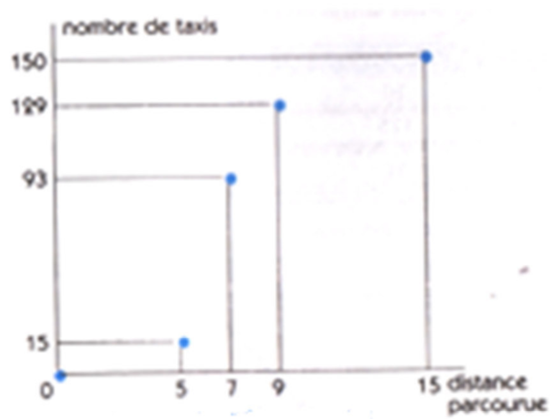
Dans le tableau ci-dessus, la troisième colonne indique que 129 bus sur les 150 ont parcouru au plus 9000 km et 57 bus ont parcouru au moins 7000 km avant leur première panne.

On en déduit le tableau suivant :

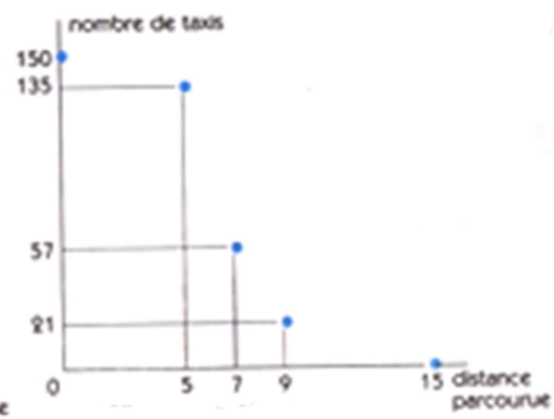
a_i	0	5	7	9	15
Nombre de bus ayant parcouru au plus a_i($\times$ 1000 km)	0	15	93	129	150
Nombre de bus ayant parcouru au moins a_i($\times$ 1000 km)	150	135	57	21	0

Dans ce tableau, la somme des effectifs de chaque colonne est égale à l'effectif total.

Ces résultats peuvent être représentés par les graphiques suivants :



Effectifs cumulés croissants



Effectifs cumulésdécroissants

Remarque

On obtient de manière analogue les tableaux et les graphiques des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

SEQUENCE 13

Définition des effectifs cumulés et des fréquences cumulées des séries statistiques présentant un regroupement en classes

Objectifs

Définir les effectifs cumulés et les fréquences cumulées des séries statistiques présentant un regroupement en classes

Définition

$([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ *est une série statistique.*

- *L'effectif cumulé croissant de la classe* $[a_{k-1};\ a_k[$ *est :*

  $\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$
- *L'effectif cumulé décroissant de la classe* $[a_{k-1};\ a_k[$ *est :*

  $\sum_{i=k}^{p} n_i = n_k + n_{k+1} + \cdots + n_P.$

SEQUENCE 14

Séries statistiques présentant un regroupement en classes : Polygones des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

Objectifs

Construire le polygone des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

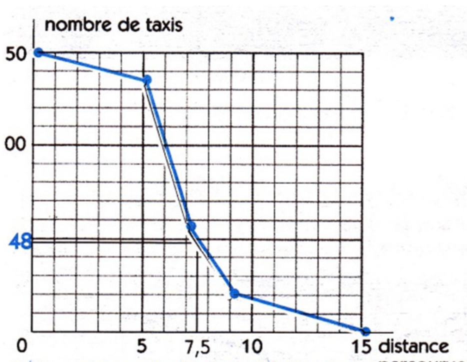
Polygones des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

Exemple

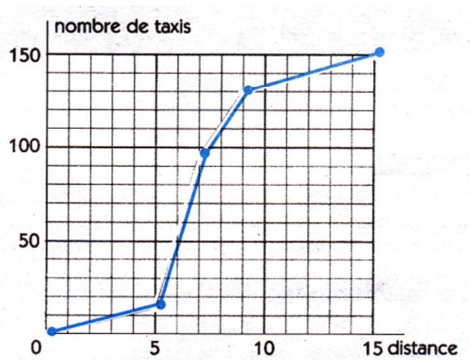
Dans l'exemple où la série est répartie en classes d'amplitude inégale, les données ne nous permettent pas de déterminer, par exemple, le nombre de bus ayant parcouru au moins 7500 km avant la première panne.

Le graphique des effectifs cumulés décroissants nous permet cependant d'en déterminer une estimation.

Pour cela, on joint les points consécutifs de ce graphique par des segments.



Polygone des effectifs cumulés décroissants (figure 1)



Polygone des effectifs cumulés croissants (figure 2)

Le point d'abscisse 7,5 de la ligne brisée ainsi obtenue a pour ordonnée 48.

On estime donc à 48 le nombre de bus ayant parcouru au moins 7500 km avant la première panne.

Définition

Le polygone des effectifs cumulés décroissants (respectivement croissants) est obtenu en joignant les points consécutifs des effectifs cumulés décroissants (respectivement croissants)

Remarque

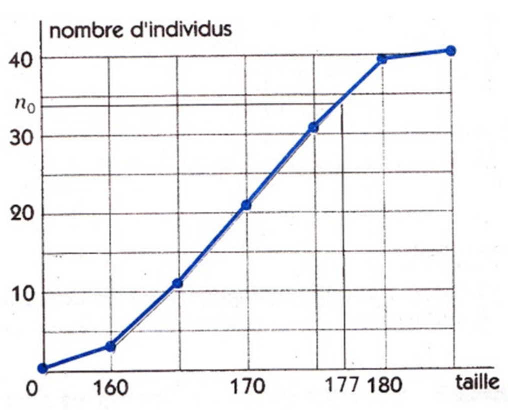
Si l'on suppose que la répartition est régulière, pour tout point M de coordonnées $(x\,;\,n)$ du polygone des effectifs cumulés décroissants (respectivement croissant), n est le nombre d'individus dont la modalité est supérieure (respectivement inférieure) à x.

Exemple

On donne dans le tableau suivant la répartition en classes d'amplitude 5 les tailles en cm de 40 individus.

Classe	[155; 160[	[160; 165[	[165; 170[	[170; 175[	[175; 180[	[180; 185[
Effectif	3	8	10	10	7	2
Borne supérieure	160	165	170	175	180	185
Effectif cumulé croissant	3	11	21	31	38	40

A partir de ce tableau, on construit le polygone des effectifs cumulés croissants suivant :



On se propose d'estimer le nombre d'individus mesurant moins de 177cm.

Soit n_0 l'ordonnée du point d'abscisse 177 de ce polygone.

Ce point appartient à la droite passant par les points de coordonnées (175 ; 31) et (180 ; 32).

On a : $\frac{n_0-31}{177-175} = \frac{38-31}{180-175}$ soit $n_0 = 33{,}8$.

Ce procédé est appelé interpolation linéaire.

On estime donc à 34 le nombre d'individus mesurant moins 177 cm.

SEQUENCE 15

Caractéristiques de position d'une série statistique présentant un regroupement en classe

Objectif

Déterminer les caractéristiques de position d'une série statistique présentant un regroupement en classe

Classe modale

Définition

On considère une série statistique présentant un regroupement en classes.

On appelle classe modale de cette série toute classe d'effectif maximal.

Exemple

Dans l'exemple de la série statistique présentant un regroupement en classe d'amplitude égale ci-dessus, la classe modale est : [8 ; 12[.

Dans l'exemple de la série statistique présentant un regroupement en classe d'amplitude inégale ci-dessus, la classe modale est : [5; 7[.

Remarques

- Une série statistique peut avoir plusieurs classes modales.
  Exemple : la série précédente des tailles de 40 individus a deux classes modales : [165 ; 170[et [170 ; 175[.
- Le centre d'une classe modale est appelé mode de la série statistique.

Médiane

Définition

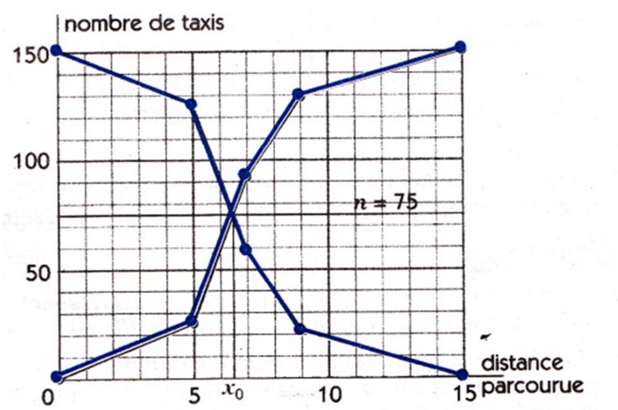
On considère une série statistique présentant un regroupement en classes et d'effectif total N.

On appelle médiane de cette série le nombre réel M tel que le nombre d'individus de modalité supérieure à M et le nombre d'individus de modalité inférieures à M soient tous égaux à $\frac{N}{2}$.

Exemple

Dans l'exemple de la série statistique présentant un regroupement en classe d'amplitude inégale ci-dessus, l'effectif total de la série est 150.

Représentons sur le même graphique les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.



Ces polygones sont symétriques par rapport à la droite d'équation n = 75. Donc leur point d'intersection a pour ordonnée 75. Soit x_0 son abscisse, $x_0 \in [5\ ;\ 7[$. On a : $\frac{75-15}{x_0-5} = \frac{93-15}{7-5}$. On en déduit $x_0 = 5 + \frac{10}{30}$. Soit $x_0 = 6{,}54$.

On estime que la moitié des bus de la compagnie « Express » ont parcouru au plus 6540 km avant la première panne.

Le nombre 6,54 partage la population de la série en deux parties de même effectif. 6,54 est donc la médiane de cette série.

Moyenne

Si, dans une série statistique, les modalités des n_i individus d'une classe $[a_{i-1}, a_i[$ de centre x_i sont régulièrement réparties dans cet intervalle, alors la moyenne arithmétique de ces modalité est x_i et leur somme est $n_i x_i$.

Définition

$([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une série statistique.

On appelle moyenne de cette série la moyenne $\bar{x}$ de la série statistique $(n_i, x_i)_{1 \leq i \leq p}$ où x_i est le centre de la classe $[a_{i-1}, a_i[$.

Si N est l'effectif total de la série, $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$.

Exemple

Reprenons l'exemple de la série statistique présentant un regroupement en classe d'amplitude inégale ci-dessus et calculons la moyenne de cette série.

Le tableau suivant nous donne les classes, les centres des classes, les effectifs des classes et le produit $n_i x_i$.

Classe	Centre de la classe x_i	Effectif n_i	$n_i x_i$
[0 ; 5[	2,5	15	37,5
[5 ; 7[	6	78	468
[7 ; 9[	8	36	288
[9 ; 15[	12	21	252
Total		150	1045,5

La moyenne $\bar{x}$ de cette série est : $\bar{x} = \frac{1045,5}{150} = 6,97$.

On peut conclure que les bus parcourent en moyenne 6970 km avant leur première panne.

SEQUENCE 16

Caractéristiques de dispersion d'une série statistique présentant un regroupement en classe

Objectif

Déterminer les caractéristiques de dispersion d'une série statistique présentant un regroupement en classe

Caractéristiques de dispersion

Pour calculer les caractéristiques de dispersion d'une série statistique présentant un regroupement en classes, comme pour le calcul de la moyenne, on remplace chaque classe par son centre.

Définition

$([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ *est une série statistique d'effectif total N et de moyenne* $\bar{x}$*.*

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$*, on désigne par* x_i *le centre de la classe* $[a_{i-1}, a_i[$.

- *L'écart moyen est le nombre* e_m *tel que* $e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i|x_i - \bar{x}|$.
- *La variance est le nombre réel V tel que* $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i - \bar{x})^2$.
- *L'écart-type est le nombre réel* σ *tel que* $\sigma = \sqrt{V}$.

Remarque

Dans la pratique, le calcul de la variance se fait à l'aide de la formule de Koenig :

$V = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\, {x_i}^2\right) - \bar{x}^2$.

Exemple

Reprenons l'exemple de la série statistique présentant un regroupement en classe d'amplitude inégale ci-dessus et calculons l'écart moyen, la variance et l'écart – type de cette série.

Classe	Centre de la classe x_i	Effectif n_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	${x_i}^2$	$n_i{x_i}^2$
[0 ; 5[	2,5	15	4,47	67,05	6,25	93,75
[5 ; 7[	6	78	0,97	75,66	36	2808
[7 ; 9[	8	36	1,03	37,08	64	2304
[9 ; 15[	12	21	5,03	105,63	144	3024
Total		150		285,42		8229,75

On déduit du tableau précédent que :

$e_m = \frac{285,42}{150} = 1,9028$; V $= \frac{8229,75}{150} - 6,97^2 = 6,2841$; $\sigma \approx 2,5068$.

Exercices d'entrainement de la compétence de base 1 du troisième trimestre

Exercice 1

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison 3.

Calculer le 20ème terme et la somme des 20 premiers termes.

Exercice 2

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 7$ et de raison 3.

Calculer le 11ème terme et la somme des 11 premiers termes.

Exercice 3

Le premier terme d'une suite arithmétique est 2, la raison 3 et la somme des termes est 187. Trouver le nombre des termes.

Exercice 4

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison r inconnue.

Déterminer r sachant que $u_{183} = 371$. Donner u_{1000} et la somme de 500 premiers termes de la suite.

Exercice 5

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{5}{2} \end{cases}$; n ∈ ℕ˙

1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2) Exprimer u_n en fonction de n.
3) Représenter graphiquement la suite (u_n)
4) Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{11}$.

Exercice 6

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{3} u_n \end{cases}$; n ∈ ℕ˙

1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

2) Exprimer u_n en fonction de n.

3) Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 7

On considère la suite de terme général $U_n = 2n - 5, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que la suite (U_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.

2) Calculer en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

Exercice 8

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}, \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4 et prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n + 1 > 0$.

2) Démontrer que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1}{U_n + 1}$ est une suite arithmétique.

3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et étudier la convergente de la suite (U_n)

Exercices d'entrainement de la compétence de base 2 du troisième trimestre

Exercice 1

Au cours d'un devoir de maths, le professeur a recensé les notes dans un tableau selon les effectifs

Notes	1	3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19,5
Effectifs	2	2	3	4	3	8	8	3	4	3	2	2	1	1

a) Déterminer le mode de la série statistique

b) Calculer la moyenne de cette série

c) Représenter pour cette série le diagramme en bâton

Exercice 2

Dans un autobus, on a relevé l'âge des passagers

18 11 13 18 17 11 14 16 13 18 12 14 19 16 15 13 17 19 15 14 10 17 15 18 13 12 18 17 17 19 15 16 13 17 12 1119 17 18

1) Etablir le tableau des effectifs de cette série
2) Quelle est le mode de cette série ?
3) Représenter cette série par un diagramme en bâton
4) Déterminer la médiane de cette série
5) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série

Exercice 3

Dans un club sportif, le nombre d'athlètes et leurs en kg (kilogramme) , se répartissent de la façon suivante

Poids	[70 ; 75[	[75 ; 80[	[80 ; 85[	[85 ; 90[	[90 ; 95[
Effectifs	6	10	12	15	7

1) Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants
2) Déterminer pour cette série le mode
3) Calculer les fréquences cumulées croissantes et décroissantes .représenter leurs polygones
4) Calculer pour cette série : la variance et l'écart-type.

Exercice 4

Dans une série statistique on a relevé la liste de la classe suivante.

Classe	Effectifs	Aire de rectangle	Hauteur du rectangle
[130 ; 140[	6		
[140 ; 150[	15		
[150 ; 160[	18		
[160 ; 170[	7		
[170 ; 180[	4		

1) tracer l'histogramme de cette série.

2) déterminer le mode de cette série

3) tracer le polygone de l'effectif cumulé croissants et de fréquences cumulées croissantes.

4 calculer l'écart-type de cette série statistique.

Exercice 5

Les moyennes des notes obtenues par les 50 candidats au concours d'entrée à l'ENS se répartissent comme suit :

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	5	14	20	7	4

1) Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes et décroissantes, puis construis les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
2) a) Détermine la classe modale et la médiane de cette série statistique.

   b) Détermine la moyenne des notes obtenues par le candidat qui s'est classé $15^{\text{ème}}$ au concours.

Exercice 6

Une enquête sur la durée en minutes des communications d'une cabine téléphonique de Moursal à N'Djamena a donné les résultats suivants :

Classes(en min)	[0 ; 1[	[1; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[
Effectifs	30	54	51	45	63	57

1) Construire un histogramme représentant cette série.
2) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants, puis construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Exercice 7

La moyenne des notes obtenues par les 50 candidats à un concours sont réparties comme suit :

Classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectifs	5	14	20	7	4

1) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants, puis construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2) a) Déterminer la classe modale et la médiane de cette série statistique.

a) Déterminer la moyenne des notes obtenues par l'élève qui s'est classé quinzième au concours.

3) Calculer la moyenne $\bar{x}$ de cette série.

4) Calculer la variance V et l'écart-type de cette série.

5) Quel est le pourcentage des élèves dont la note appartient à l'intervalle $]\bar{x} - \delta ; \bar{x} + \delta[$?

Exercice 8

On a mesuré la taille en centimètre de 40 personnes venues à un test sanguin.

Classes	Centre de la classe x_i	Effectifs n_i	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$n_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$n_i {x_i}^2$
[155 ; 160[		3			
[160 ; 165[		8			
[165 ; 170[		10			
[170 ; 175[		10			
[175 ; 180[		7			
[180 ; 185[		2			
Total					

1) Calculer la médiane et la moyenne $\bar{x}$ de cette série.
2) Compléter le tableau ci-dessus.
3) Déterminer l'écart moyen et l'écart-type de cette série.

EVALUATION

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \quad (1) \\ x + 3y + 4z = 10 \ (2) \\ 3x - 2y - z = 2 \ (3) \end{cases}$

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}, \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4 et prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n + 1 > 0$.
2) Démontrer que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1}{U_n + 1}$ est une suite arithmétique.

Exercice 3

Dans une série statistique, on a relevé la liste de la classe suivante.

Classe	Effectifs	Aire de rectangle	Hauteur du rectangle
[130 ; 140[	6		
[140 ; 150[	15		
[150 ; 160[	18		
[160 ; 170[	7		
[170 ; 180[	4		

1) Tracer l'histogramme de cette série.

2) Déterminer le mode de cette série.

3) Tracer le polygone de l'effectif cumulé croissants et de fréquences cumulées croissantes.

4) Calculer l'écart-type de cette série statistique

Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice

- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………

.

Conseils et orientation de l'enseignant

- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………

Evaluation de la compétence




Table des matières

EDUNOTE

Portail Integré de Réussite Scolaire

Inscrivez-vous sur www.edunote.org

TECHNIDEV

Institut des Technologies Innovantes pour le Développement