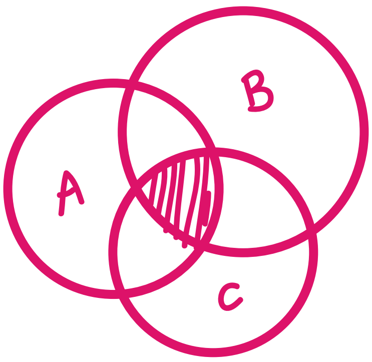
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA PROMOTION CIVIQUE

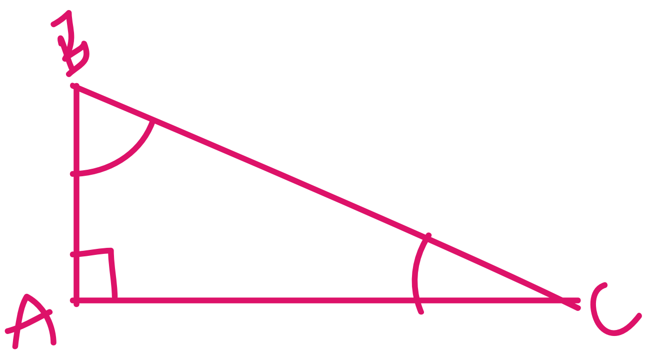
EDUNOTE
Portail Integré de Réussite Scolaire

Maths
1 ère S

SUPPORT OFFICIEL DE L'ENSEIGNEMENT À DISTANCE AU TCHAD

- ✓ ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES
- ✓ ACTIVITÉS NUMÉRIQUES
- ✓ EXERCICES CORRIGÉS





Inscrivez-vous
www.edunote.org

Appelez le Call center Pédagogique au
1317

Scannez puis Téléchargez
le Livre en Pdf

unicef pour chaque enfant
EDUCATION CANNOT WAIT a global fund for education in emergencies
UNFPA
Centre National des Curricula
TECHNIDEV Institut des Technologies Innovantes pour le Développement

Avant – Propos

Ce support d'enseignement à distance de Mathématiques destiné aux élèves des classes de Première S de l'Enseignement Secondaire Général au Tchad a été conçu dans le cadre du programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Toutes propositions tendant à l'amélioration du document seront les bienvenues.

Bonne lecture

Equipe éditoriale

Le support d'enseignement à distance de Mathématiques destiné aux classes de Première S (1ere S) a été réalisé par une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants, en particulier :

MM. :

- MANDO FERDINAND, Professeur certifié de Mathématiques ;
- ALIYABA ZOUA, Professeur licencié de Mathématiques ;
- AHMAT HANSAN YERIMA, Professeur licencié de Mathématiques

Sous la supervision de NGARADOUM FABIEN,
Professeur certifié de Mathématiques

Saisie et mise en page
NODJIKOUAMBAYE MBAINAIDA,
Chef de Division Bibliothèque au CNC

Assistance technique :
MAHAMAT ABBA MAHAMAT, Professeur de Mathématiques
Coordination :
Dr. ABOUBAKAR ALI KORE,
Directeur Général du Centre National des Curricula
KHALID FADOUL DOUTOUM,
Directeur Général de TECHNIDEV.

PREFACE

Chers élèves, enseignants, parents et parties prenantes de l'école tchadienne,

Conformément au **protocole d'accord de partenariat du 02 septembre 2016** ayant pour objet le renforcement des capacités en technologies de l'information et de la communication dans les établissements secondaires, liant l'Etat Tchadien représenté par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique (MENPC) et l'Institut TECHNIDEV, ce dernier est amené à expérimenter des approches innovantes intégrant le numérique et visant à améliorer l'efficacité interne du système éducatif tchadien. **Le résultat attendu de cette convention (MENPC/ TECHNIDEV) étant l'accès à une éducation et la réussite pour tous.**

C'est dans ce cadre que le programme Soutien Scolaire Intégré est développé et mis en œuvre par TECHNIDEV, avec pour objectif de :

- Prendre en charge tous les élèves en difficultés scolaires dans une discipline inscrite au programme officiel et ce, conformément au niveau de l'élève ;
- Contribuer à améliorer les notes en classe de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à assurer le passage en classe supérieure de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à améliorer le taux de réussite au BAC de tous les candidats bénéficiaires ;
- Contribuer au maintien des filles à l'école.

TECHNIDEV tient à exprimer ses remerciements aux cadres du MENPC, aux partenaires (ECW et UNICEF), les experts, les inspecteurs, les enseignants et les animateurs pédagogiques et à toutes celles et tous ceux qui ont contribué d'élaboration de ce guide.

Le présent guide pédagogique décline les stratégies d'une prise en charge de l'élève soucieux de la qualité de son éducation et de sa réussite, adhérant au projet et respectant les conditions spécifiques de sa mise en œuvre.

L'enseignant, spécialisé en techniques d'évaluation et de remédiation et en éducation par le numérique, dispose d'un outil lui permettant d'agir avec une méthode axée sur les résultats en terme de développement des compétences des élèves.

Pour les parents, c'est un instrument de suivi quotidien des activités d'apprentissage de l'enfant par rapport à la progression dans le programme.

J’invite les élèves, les enseignant (e)s et les parents à une exploitation judicieuse de ce guide pour une contribution efficace dans la mise en œuvre de programmes de Soutien Scolaire Intégré (SSI) et partant, la redynamisation de l’école tchadienne.

<u>KHALID FADOUL DOUTOUM</u>

Directeur Général de TECHNIDEV

INTRODUCTION

Le présent guide a été réalisé dans le cadre de programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants a contribué à son élaboration.

Ce guide, destiné principalement aux enseignants et aux élèves, a pour but de contribuer à l'amélioration et le renforcement des capacités de l'élève et ce, d'abord par l''identification de ses difficultés suivi un accompagnement stratégique basé sur une approche par compétences. Il s'adresse aux élèves du CM à la Terminale et s'appesantit principalement sur les matières fondamentales que sont le Français et les Mathématiques. Chaque Guide traite un trimestre spécifique conformément au programme de l'enseignement proposé par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique du Tchad.

Dans ce contexte, le guide met en évidence les principales compétences jugées incontournables pour la réussite de l'élève et suggère aux enseignants des stratégies et méthodologies appropriées pouvant servir à mettre en place une meilleure prise en charge individuelle de l'élève.

Dans son architecture, le guide présente de la manière suivante :

Partie 1 (destinée en premier lieu à l'enseignant) : La Fiche de programmation trimestrielle, la Fiche de Progression et la Fiche de développement de compétences du trimestre mis en exergue par ledit Guide ainsi qu'un chronogramme de prise en charge individuelle de l'élève par l'enseignant.

Partie 2 (destinée aux élèves) : Elle déroule les différentes compétences que l'élève doit développer, ainsi que des épreuves et applications favorisant l'acquisition de ces compétences. Des tableaux d'évaluation des élèves sont consacrés à la fin de chaque épreuve.

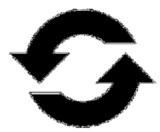
Table des illustrations


= Important pour l'élève


= Astuces et consignes


= Exercice d'application


= Exercices d'approfondissement


= Relire plusieurs fois


= Compétence acquise


= Compétence en cours d'acquisition


= Compétence non-acquise

Partie destinée à l'enseignant

FICHE DE PROGRAMMATION ANNUELLE			
Trimestres	CB1	CB2	CB3
Trimestre I	☞ **Chapitre 1 :** Fonctions numériques d'une variable réelle : généralités ☞ **Chapitre 2:** Limites, continuité et dérivation	☞ **Chapitre 1** : Applications - **Chapitre 2 :** Equations, inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$ et Système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	☞ **Chapitre 1** : Calculs barycentriques ☞ **Chapitre 2** : Vecteurs de l'espace ☞ **Chapitre 3 :** Etudes analytiques des droites, cercles et plans
Trimestre II	☞ **Chapitre 4 :** Trigonométrie et fonctions circulaires ☞ **Chapitre 5** : Suites numériques	☞ **Chapitre 3** : Lois de composition interne ☞ **Chapitre 4** : Analyse combinatoire	☞ **Chapitre 4** : Les angles ☞ **Chapitre 5** : Homothétie ☞ **Chapitre 6 :** Isométries
Trimestre III	☞ **Chapitre 6 :** Etudes de quelques fonctions	☞ **Chapitre 5** : Statistiques	☞ **Chapitre 8 :** Similitude ☞ **Chapitre 9** : Espace vectorielle

OBJECTIF INTERMEDIAIRE D'INTEGRATION

Au terme de la classe de 1ère S/E, l'élève doit pouvoir résoudre des situations- problèmes significatives permettant de mobiliser et de renforcer les connaissances mathématiques antérieures, de développer les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse dans des contextes variés et transversaux.

1re S/E: CB1 : Analyse

Au terme de la classe de première S/E, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir
les fonctions d'une variable réelle, les suites numériques et la trigonométrie.

1re S/E: CB2 : Algèbre -Statistiques et dénombrement

Au terme de la classe de première S/E, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir les calculs dans $\mathbb{R}$; les séries statistiques ; l'analyse combinatoire et les applications.

1re S/E: CB3: Géométrie

Au terme de la classe de première S/E, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir la géométrie dans le plan et la géométrie dans l'espace.

Fiche de programmation horaire du 1er trimestre

<table>
<tr><th rowspan="2">1er Trimestre</th><th rowspan="2">Compétences</th><th rowspan="2">Chapitres</th><th rowspan="2">Titres des chapitres</th><th colspan="3">Durée d'exécution</th><th rowspan="2">Durée du chapitre</th><th rowspan="2">Nombre d'heures du trimestre</th></tr>
<tr><th>Cours</th><th>TD</th><th>Evaluation</th></tr>
<tr><td rowspan="7">1er Octobre au 31 Décembre

11 semaines</td><td rowspan="2">CB1</td><td>1</td><td>Fonctions numériques d'une variable réelle : généralités</td><td>5H</td><td>1H</td><td rowspan="2">2H</td><td>7H</td><td rowspan="7">56H</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Limite, continuité et dérivation</td><td>8H</td><td>2H</td><td>11H</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CB2</td><td>1</td><td>Applications</td><td>4H</td><td>1H</td><td rowspan="2">2H</td><td>6H</td></tr>
<tr><td>2</td><td>- Equations, inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$ et Système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$</td><td>5H</td><td>2H</td><td>8H</td></tr>
<tr><td rowspan="3">CB3</td><td>1</td><td>Calculs barycentriques</td><td>6H</td><td>2H</td><td rowspan="2">2H</td><td>9H</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Vecteurs de l'espace</td><td>5H</td><td>2H</td><td>7H</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Etudes analytiques des droites, cercles et plans</td><td>6H</td><td>2H</td><td></td><td>9H</td></tr>
</table>

FICHE DE PROGRESSION DU 1er TRIMESTRE

Trimestre	Période	Contenus		
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre-Statistique-Probabilité	CB 3
1	1er Octobre au 10 Novembre	- Fonctions numériques d'une variable réelle : généralités	- Applications	- Calculs barycentriques - Vecteurs de l'espace
	11 Novembre au 31Décembre	- Limite, continuité et dérivation	- Equations, inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$ et Système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	- Etudes analytiques des droites, cercles et plans

Les modules d’intégration en mathématiques en classe de Première S/E Premier trimestre

Compétence de Base 1

Première S/E–CB1 : L’élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les fonctions numériques d’une variable réelle : les généralités, limites, continuité et la dérivation.		
Objectifs d’apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
- Fonctions numériques d’une variable réelle : généralités	- Définir une fonction numérique. - Déterminer l’ensemble de définition puis étudier la parité, la périodicité et en déduire l’ensemble d’étude de fonctions. - Effectuer les opérations sur les fonctions. - Comparer deux fonctions numériques. - Construire les courbes représentatives des fonctions associées à une fonction $f : x \mapsto f(x-a)$; $x \mapsto f(x)+b$; $x \mapsto -f(x)$; $x \mapsto \|f(x)\|$; $x \mapsto f(-x)$; $x \mapsto f(kx)$. - Déterminer le prolongement par continuité d’une fonction en un point. - Déterminer les éléments de symétrie (centre ou	- Définition d’une fonction numérique. - Détermination de l’ensemble de définition puis étude de la parité, de la périodicité et déduction de l’ensemble d’étude de fonctions. - Opérations sur les fonctions. - Comparaison de deux fonctions numériques. - Construction des courbes représentatives des fonctions associées à une fonction $f : x \mapsto f(x-a)$; $x \mapsto f(x)+b$; $x \mapsto -f(x)$; $x \mapsto \|f(x)\|$; $x \mapsto f(-x)$; $x \mapsto f(kx)$. - Détermination du prolongement par continuité d’une fonction en un point.. - Détermination des éléments de symétrie (centre ou

		axe de symétrie) d'une courbe. - Déterminer les extrema (minimum, maximum, minorant, majorant) d'une fonction.	axe de symétrie) d'une courbe. - Détermination des extrema (minimum, maximum, minorant, majorant) d'une fonction.
	- Limite, continuité et dérivation ➢ Limite ➢ Continuité	- Déterminer la limite d'une fonction en un point, en $+\infty$ et en $-\infty$. - Calculer la limite d'une fonction f en un nombre x_0(éventuellement à gauche, à droite) en$+\infty$, en$-\infty$ en utilisant les théorèmes de comparaison et les opérations sur les limites. - Etudier la continuité d'une fonction en un nombre x_0. - Utiliser les théorèmes admis sur la continuité. - Déterminer le prolongement par continuité d'une fonction en un nombre x_0. - Définir une fonction dérivable en un nombre x_0.	- Détermination de la limite d'une fonction en un point, en $+\infty$ et en $-\infty$. - Calcul de la limite d'une fonction f en un nombre x_0(éventuellement à gauche, à droite), en$+\infty$, en $-\infty$ en utilisant les théorèmes de comparaison et les opérations sur les limites. - Utilisation des théorèmes de comparaison et des opérations sur les limites pour calculer la limite d'une fonction. - Etude de la continuité d'une fonction en un nombre x_0. - Utilisation des théorèmes admis sur la continuité. - Détermination du prolongement par continuité d'une fonction en un nombre x_0. - Définition d'une fonction dérivable en un nombre x_0.

	➢ Dérivation	- Utiliser la définition pour démontrer qu'une fonction est dérivable en un nombre x_0. - Calculer le nombre dérivé (éventuellement à gauche, à droite) d'une fonction en un nombre x_0. - Déterminer l'approximation affine locale d'une fonction en un nombre x_0. - Etudier la dérivabilité de la somme, du produit, du quotient et d'une fonction associée à une fonction. - Etudier le sens de variation d'une fonction en utilisant sa dérivée. - Déterminer les extrema d'une fonction en utilisant sa dérivée.	- Utilisation de la définition pour démontrer qu'une fonction est dérivable en un nombre x_0. - Calcul du nombre dérivé (éventuellement à gauche, à droite) d'une fonction en un nombre x_0. - Détermination de l'approximation affine locale d'une fonction en un nombre x_0. - Etude de la dérivabilité de la somme, du produit, du quotient et d'une fonction associée à une fonction. - Etude du sens de variation d'une fonction en utilisant sa dérivée. - Détermination des extrema d'une fonction en utilisant sa dérivée.

Compétence de Base 2

- **Première S/E–CB2 :** L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les applications, les équations et inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$, les Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)

Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
Les applications	- Définir une application injective, surjective et bijective. - Définir et calculer la réciproque d'une application bijective. - Composer des applications. - Déterminer la restriction, le prolongement d'une application. - Déterminer l'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application.	- Définition d'une application : . injective ; . surjective ; . bijective. - Définition et calcul de la réciproque d'une application bijective. - Composition des applications. - Détermination de la restriction, du prolongement d'une application. - Détermination de l'image directe et de l'image réciproque d'un ensemble par une application.

- Equations, inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$ et Systèmes	- Résoudre les équations et inéquations du second degré.	- Résolution des équations et inéquations du second degré.

	d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ➢ Equations, inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$ ➢ Système d'équations linéaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	- Résoudre des problèmes se ramenant aux équations et inéquations du second degré. - Résoudre quelques exemples simples d'équations et d'inéquations irrationnelles. - Résoudre des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$et $\mathbb{R}^3$. - Résoudre des problèmes se ramenant aux systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.	- Résolution des problèmes se ramenant aux équations et inéquations du second degré. - Résolution de quelques exemples simples d'équations et d'inéquations irrationnelles. - Résolution des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. - Résolution des problèmes se ramenant aux systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Compétence de base 3

Première S/E–CB3 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les calculs barycentriques, les vecteurs de l'espace et l'étude analytique des droites, cercles et plans.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
- Calculs barycentriques	- Définir le barycentre (d'isobarycentre) de deux, trois ou quatre points pondérés. - Construire le barycentre de deux ou trois points pondérés. - Reconnaitre un barycentre à travers une égalité vectorielle. - Utiliser le théorème de barycentre partiel. - Résoudre le problème d'alignement et de concours en utilisant le barycentre. - Calculer les coordonnées barycentriques. - Utiliser le barycentre pour réduire une somme vectorielle. - Utiliser le produit scalaire dans le plan pour déterminer la ligne de niveau des applications : $M \longmapsto MA^2 + MB^2$ $M \longmapsto MA^2 - MB^2$	- Définition du barycentre (d'isobarycentre) de deux, trois ou quatre points pondérés. - Construction du barycentre de deux ou trois points pondérés. - Reconnaissance d'un barycentre à travers une égalité vectorielle. - Utilisation du théorème de barycentre partiel. - Résolution du problème d'alignement et de concours en utilisant le barycentre. - Calcul des coordonnées barycentriques. - Utilisation du barycentre pour réduire une somme vectorielle. - Utilisation du produit scalaire dans le plan pour déterminer la ligne de niveau des applications : - $M \longmapsto MA^2 + MB^2$

		$M \longmapsto aMA^2 + bMB^2$ $M \longmapsto MA^2 - MB^2$ $M \longmapsto \overrightarrow{AM}\overrightarrow{AB}$ $M \longmapsto \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}$ $M \longmapsto \frac{MA}{MB}$	$M \longmapsto MA^2 - MB^2$ $M \longmapsto aMA^2 + bMB^2$ $M \longmapsto MA^2 - MB^2$ $M \longmapsto \overrightarrow{AM}\overrightarrow{AB}$ $M \longmapsto \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}$ $M \longmapsto \frac{MA}{MB}$
	- Vecteurs de l'espace	- Repérer un point dans l'espace. - Utiliser l'outil vectoriel pour démontrer le parallélisme d'une droite et d'un plan et le parallélisme de deux plans. - Caractériser vectoriellement le barycentre de points pondérés de l'espace. - Reconnaitre le barycentre d'un système de points pondérés à partir d'une égalité vectorielle. - Démontrer que deux vecteurs ou des points sont coplanaires. - Représenter une base, un repère de l'espace. - Représenter des points, des vecteurs, des droites dans un repère orthonormé de l'espace. - Calculer un produit scalaire dans une base	- Repérage d'un point dans l'espace. - Utilisation de l'outil vectoriel pour démontrer le parallélisme d'une droite et d'un plan et le parallélisme de deux plans. - Caractérisation vectorielle du barycentre de points pondérés de l'espace.

		orthonormée de l'espace. - Calculer la distance de deux points de l'espace.	
	- Orthogonalité dans l'espace	- Déterminer des droites orthogonales dans l'espace. - Déterminer des droites et des plans orthogonaux. - Caractériser une droite orthogonale à un plan. - Déterminer des droites et des plans perpendiculaires. - Projeter orthogonalement un point, une figure simple sur une droite ou un plan. - Déterminer des lieux géométriques.	
	– Etudes analytiques des droites, cercles et plans	- Déterminer la représentation paramétrique d'un cercle dans le plan. - Ecrire une équation cartésienne de droites et de plans de l'espace. - Donner une représentation paramétrique des droites et des plans de l'espace. - Calculer la distance d'un point à un plan de l'espace. - Déterminer le vecteur normal d'un plan.	

		- Etudier le parallélisme de droites et de plans. - Etudier analytiquement l'orthogonalité de droites et de plans de l'espace. - Utiliser le produit scalaire pour démontrer qu'une droite et un plan sont orthogonaux. - Utiliser le produit scalaire pour démontrer que deux plans sont perpendiculaires.	

			- Reconnaissance du barycentre d'un système de points pondérés à partir d'une égalité vectorielle. - Démonstration de la coplanarité de deux vecteurs ou des points. - Représentation d'une base, d'un repère de l'espace. - Représentation des points, des vecteurs, des droites dans un repère orthonormé de l'espace. - Calcul du produit scalaire dans une base orthonormée de l'espace. - Calcul de la distance de deux points de l'espace. - Détermination des droites orthogonales dans l'espace. - Détermination des droites et des plans orthogonaux. - Caractérisation d'une droite orthogonale à un plan. - Détermination des droites et des plans perpendiculaires. - Projection orthogonale d'un point, d'une figure simple sur une droite ou un plan. - Détermination des lieux géométriques. - Détermination de la représentation paramétrique

			d'un cercle dans le plan. - Ecriture d'une équation cartésienne de droites et de plans de l'espace. - Représentation paramétrique des droites et des plans de l'espace. - Calcul de la distance d'un point à un plan de l'espace. - Détermination du vecteur normal d'un plan. - Etude du parallélisme de droites et de plans. - Etude analytique de l'orthogonalité de droites et de plans de l'espace. - Utilisation du produit scalaire pour démontrer l'orthogonalité d'une droite et d'un plan. - Utilisation du produit scalaire pour démontrer la perpendicularité de deux plans.

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHE DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du premier trimestre

Leçon : Fonctions numériques d'une variable réelle : généralités

SEQUENCE 1

Définition d'une fonction numérique à variables réelles

Objectif

Définir une fonction numérique

Définition

A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$.

Une fonction numérique à variables réelles f est une relation qui à chaque élément x de l'ensemble de départ A associe au plus un élément y = f(x) de l'ensemble d'arrivée B.

x est appelé antécédent de y = f(x) par f et y = f(x) est l'image de x par f.

Une fonction numérique à variables réelles f peut être définie par :

- *une formule explicite.*

Exemples

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 2x + 1$

2) $g(x) = \sqrt{x-2}$

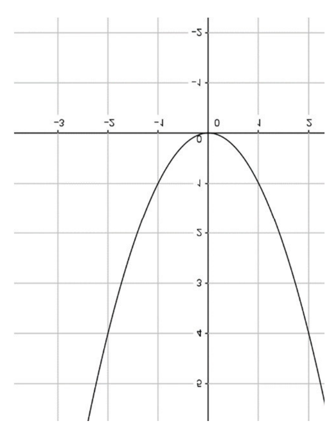
- *un tableau de valeurs.*

Exemple

x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16

- *une représentation graphique dans un repère (O, I, J).*

Exemple



SEQUENCE 2

Ensemble de définition d'une fonction numérique à variables réelles

Objectifs

Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction numérique à variables réelles

Définition

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Les réels x pour lesquels on peut calculer $f(x)$ constituent un ensemble appelé ensemble de définition ou domaine de définition de la fonction f noté D_f.

Lorsque pour tout x élément de D_f, $-x$ appartient aussi à D_f, on dit que D_f est symétrique par rapport à 0.

Remarque

Pour les fonctions :

- $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$,

$f(x)$ existe si et seulement si $B(x) \neq 0$.

- $f(x) = \sqrt{A(x)}$,

  $f(x)$ existe si et seulement si $A(x) \geq 0$.

Exemples

Déterminons le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $(x-1)(x+1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x - 1 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -1$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Comme pour tout x élément de D_f, $-x$ appartient aussi à D_f, D_f est symétrique par rapport à 0.

2) $f(x) = \sqrt{x+2}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x + 2 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -2$

$D_f = [-2 ; +\infty[$.

D_f n'est pas symétrique par rapport à 0.

SEQUENCE 3

Parité d'une fonction numérique à variables réelles

Objectifs

Etudier la parité d'une fonction

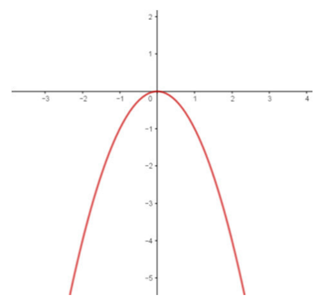
Parité

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, D_f son domaine de définition.

a) f est paire si :

- *D_f est symétrique par rapport à 0 ;*
- *pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$.*

NB : Dans un repère (O, I, J), la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (O, J) des ordonnées.



Exemple

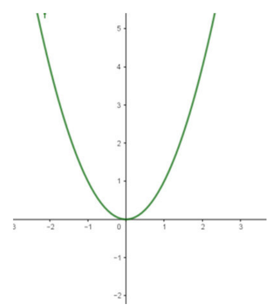
On donne $f(x) = x^2$.

On sait que $D_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.

Puis, $f(-x) = (-x)^2$

$= x^2 = f(x)$

f est donc paire.



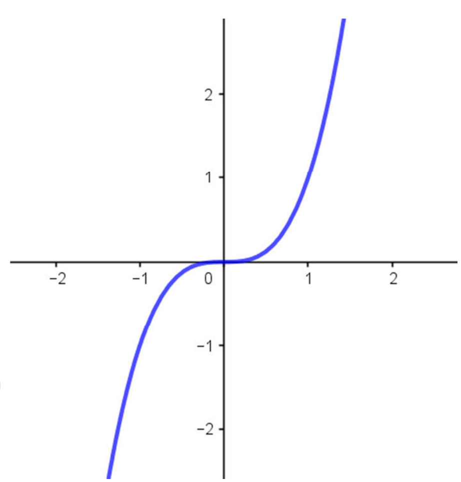
b) f est impaire si :

- *D_f est symétrique par rapport à 0 ;*
- *pour tout x de D_f, $f(-x) = -f(x)$.*

NB : Dans un repère (O, I, J), la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Exemple

On donne $f(x) = x^3$.



On sait que $D_f = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.

Puis, $f(-x) = (-x)^3$

$= -x^3 = -f(x)$

f est donc impaire.

SEQUENCE 4

Périodicité d'une fonction numérique à variables réelles

Objectif

Etudier la périodicité d'une fonction numérique à variables réelles

Périodicité

Soit f une fonction définie sur D_f et T un réel strictement positif. f est périodique, de période T si et seulement si :

pour tout élément x de D_f $x+T$ appartient à D_f et $f(x+T) = f(T)$.

NB : Dans un repère (O, I, J), la courbe représentative d'une fonction périodique, de période T est invariante par toute translation de vecteur $kT\vec{\imath}$ où k est un entier relatif et $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$.

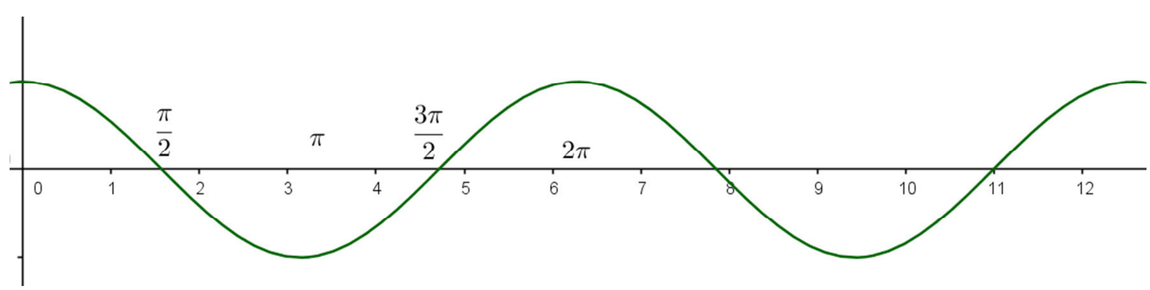
Exemple

On donne $f(x) = cosx$.

Etudions la parité de f.

On sait que la fonction *cos* est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $x + 2\pi$ est aussi réel et $cos(x + 2\pi) = cosx = f(x)$.

La fonction cosinus est donc périodique de période 2π.



Remarque

L'étude de la parité ou de la périodicité d'une fonction permet de réduire son ensemble de définition en un ensemble plus petit appelé ensemble d'étude dans lequel on étudie cette fonction et on complète l'étude soit en utilisant les éléments de symétrie ou une translation de vecteur.

SEQUENCE 5

Comparaison de fonctions numériques à variables réelles

Objectifs

Comparer des fonctions numériques à variables réelles

Vocabulaire et notation

f et g étant deux fonctions numériques définies sur un même intervalle E, f est inférieure à g sur E signifie que pour tout x élément de E, $f(x) \leq g(x)$.

On écrit $f \leq g$ sur E.

Maximum, minimum

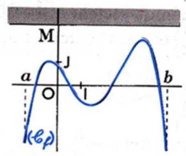
Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E.

- *Soit α un élément de E. On dit que f présente en α un **maximum** égal à $f(\alpha)$ sur E, si et seulement si, pour tout réel x contenu dans E, $f(x) \leq f(\alpha)$.*
- *Soit β un élément de E. On dit que f présente en β un **minimum** égal à $f(\beta)$ sur E, si et seulement si, pour tout réel x contenu dans E, $f(x) \geq f(\beta)$.*

Fonction majorée, minorée, bornée

Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E.

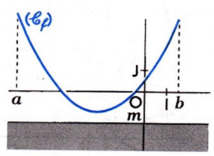
- *Soit M un élément de $\mathbb{R}$. On dit que f est majorée sur E par M si et seulement si pour tout réel x contenu dans E, $f(x) \leq M$.*



f est majorée par M sur $[a\,;b]$

$(\mathscr{C}_f)$ est « au-dessous » de la droite d'équation $y = M$.

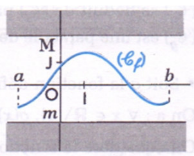
- *Soit m un élément de* $\mathbb{R}$*. On dit que f est minorée sur E par m si et seulement si pour tout réel x contenu dans E, f(x)* $\geq$ *m.*



f est minorée par *m* sur $[a\,;b]$

$(\mathscr{C}_f)$ est « au-dessus » de la droite d'équation $y = m$.

- *f est bornée sur E si et seulement si f est, à la fois, majorée et minorée sur E.*



$(\mathscr{C}_f)$ est « entre » les droites d'équations $y = m$ et $y = M$.

On dit que m est un minorant de f sur E et M est un majorant de f sur E.

Remarque

Une fonction est positive (respectivement négative) sur un intervalle E si elle admet 0 pour minorant (respectivement 0 pour majorant) sur E.

La représentation graphique d'une fonction positive (respectivement négative) est au-dessus (respectivement en-dessous) de l'axe des abscisses.

Fonctions égales

Définition

Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :

- *f et g ont même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée ;*
- *f et g ont même domaine de définition D ;*
- *pour tout x élément de D, f(x) = g(x).*

Restriction, prolongement d'une fonction

On donne $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$ et $g(x) = \sqrt{x - 2}$.

a) Détermine les domaines de définition D_f de f puis D_g de g.

b) Donne l'expression de $f(x)$ dans chacun des deux intervalles dont l'union forme D_f.

c) Laquelle des deux fonctions f et g admet – elle une courbe représentative qui contient celle de l'autre.

d) Conclus.

Définition

On donne une fonction f définie de E vers F et E' une partie de E.

– *On appelle restriction de la fonction f à E' la fonction g :* $E \longrightarrow F$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

– *La fonction f est alors appelée le prolongement de la fonction g à E.*

SEQUENCE 6

Opérations sur les fonctions

Objectifs

Faire des opérations avec les fonctions numériques

Propriétés

f et g étant deux fonctions de domaines de définition respectifs D_f *et* D_g*, on retiendra les résultats suivants :*

	Notation	Ensemble de définition	Formule explicite
Somme	$f+g$	$D_f \cap D_g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Produit	$f \times g$	$D_f \cap D_g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
Quotient	$\frac{f}{g}$	$(D_f \cap D_g) \setminus \{x / g(x) = 0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Remarques

On définit aussi les fonctions suivantes :

– produit d'une fonction par un réel $k : (kf)(x) = k \times (f(x))$, avec $D_{kf} = D_f$;

– puissance $n^{ième}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une fonction : $(f^n)(x) = [f(x)]^n$, avec $D_{f^n} = D_f$;

- inverse d'une fonction : $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$, avec $D_{\frac{1}{f}} = D_f \setminus \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0\}$;
- racine d'une fonction : $\left(\sqrt{f}\right)(x) = \sqrt{f(x)}$, avec $D_{\sqrt{f}} = D_f \setminus \{x \in \mathbb{R}/f(x) > 0\}$.

SEQUENCE 7

Fonctions associées

Objectifs

Déduire les courbes représentatives des fonctions associées à une fonction f : $x \longmapsto -f(x)$; $x \longmapsto f(-x)$; $x \longmapsto |f(x)|$ de celle de f.

NB : Dans ce paragraphe, on admettra que le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

On désigne par f une fonction, (c_f) sa représentation graphique, a et b deux nombres réels.

Les fonctions $x \longmapsto -f(x)$; $x \longmapsto f(-x)$; $x \longmapsto f(kx)$ ($k \in \mathbb{R}_+^*$); $x \longmapsto |f(x)|$; $x \longmapsto f(x-a)$; $x \longmapsto f(x) + b$ sont appelées des fonctions associées à la fonction f.

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment les courbes représentatives des fonctions associées à A se déduisent de celle de f notée (c_f).

Fonctions $x \longmapsto -f(x)$ et $x \longmapsto f(-x)$

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

- *La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ se déduit de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe (OI).*
- *La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ se déduit de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).*

Fonctions $x \longmapsto |f(x)|$

Propriété

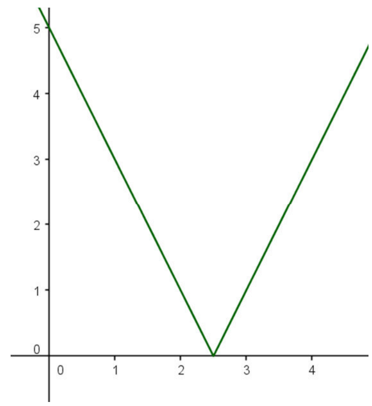
Dans un repère orthogonal (O, I, J) la courbe représentative de la fonction $g : x \longmapsto |f(x)|$ est la réunion des parties des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$ situées au – dessus de l'axe (OI).

Exemple

On donne $g(x) = |2x - 5|$.

Pour représenter la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal (O, I, J), on trace les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 2x - 5$ et $y = -2x + 5$.

La courbe représentative de la fonction g est la réunion de deux demi – droites situées au – dessus de (OI).



SEQUENCE 8

Fonctions associées

Objectif

Déduire les courbes représentatives des fonctions associées à une fonction f :
$x \longmapsto f(kx)$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$; $x \longmapsto f(x - a)$; $x \longmapsto f(x) + b$ de celle de f.

Fonction $x \longmapsto f(kx)$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$

Cas général

De manière générale, si $g(x) = f(kx)$; $(k \in \mathbb{R}_+^*)$, un point $M\binom{x}{y}$ appartient à la courbe (C_f) représentative de f équivaut à dire que le point $M'\begin{pmatrix} \frac{x}{k} \\ y \end{pmatrix}$ appartient à la courbe (C_g).

On obtient donc la courbe (C_g) représentative de la fonction $g(x) = f(kx)$; $(k \in \mathbb{R}_+^*)$:

- *par étirement de (C_f) si $0 < k < 1$;*
- *par contraction de (C_f) si $k > 1$.*

Fonctions $x \longmapsto f(x-a)$; $x \longmapsto f(x)+b$

Propriétés

f est une fonction, (C_f) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J).

- *La courbe représentative (C') de la fonction $x \longmapsto f(x-a)$ se déduit de (C_f) par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.*
- *La courbe représentative (C'') de la fonction $x \longmapsto f(x)+b$ se déduit de (C_f) par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$.*
- *La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x-a)+b$ se déduit de (C_f) par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$.*

Exercices

1) On donne $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - 4$.
   a) Mets $g(x)$ sous sa forme canonique.
   b) En considérant la fonction f: $x \longmapsto -\frac{2}{3}x^2$, déduit la représentation graphique de g à partir de celle de f. Conclus.

Remarques

De manière générale,

- la courbe représentative de la fonction f: $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est une parabole. En effet pour tout x réel, on a : $f(x) = \text{a}(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4^2}$
- la courbe représentative de la fonction f: $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}(c \neq 0 \ et\ ad - bc \neq 0)$ est une hyperbole.

  En effet pour tout x réel différent de $\frac{-d}{c}$, on a : $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{k}{x+\frac{d}{c}}$ où $k = \frac{bc-ad}{c^2}$.

Exercices

1) On donne $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$. Après avoir donné la forme canonique de $f(x)$, déduis la courbe représentative de f à partir de celle de
   la fonction $x \longmapsto x^2$.
2) Dans un repère orthogonal (O, I, J), trace la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{3x-2}{x-1}$.

SEQUENCE 9

Eléments de symétrie d'une courbe (Axe de symétrie)

Objectifs

Déterminer et utiliser l'axe de symétrie pour représenter graphiquement une fonction.

NB : Le plan étant rapporté à un repère orthonormal (O, I, J), on désigne par (C_f)la représentation graphique de la fonction *f*.

Axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées

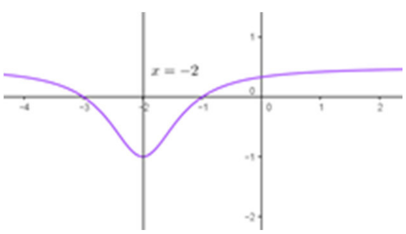
Soit a un réel.

Deux points M$\binom{x}{y}$ et M'$\binom{x'}{y'}$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ)

d'équation $x = a$ si le point A$\binom{a}{0}$ de l'axe des abscisses est milieu du segment $[xx']$ c'est-à-dire que $a = \frac{x+x'}{2} \Leftrightarrow x' = 2a - x$ (1)

Et comme M et M' sont symétriques par rapport à $x = a$, $y = y'$ (2).

(1) et (2) permettent de dire que deux points M$\binom{x}{y}$ et M'$\binom{x'}{y'}$sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = a$ si et seulement si $\begin{cases} x' = 2a + x \\ y' = y \end{cases}$



Cas général

a étant un réel, f une fonction D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J).

(C_f)admet la droite (Δ) d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si et seulement si :

$\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de} D_f \text{ , } 2a - x \text{ appartient à} D_f \\ \text{et } f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

Remarque

Pour montrer que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction *f*, on peut aussi procéder à un changement de repère de façon à obtenir dans ce nouveau repère une équation de (C_f) de la forme $Y = g(X)$ et vérifier que g est une fonction paire.

Exercice

On donne $f(x) = \frac{x^2+4x+5}{|x+2|}$. Montre que la courbe représentative de la fonction f admet la droite d'équation $x = -2$ pour axe de symétrie.

SEQUENCE 10

Eléments de symétrie d'une courbe (Centre de symétrie)

Objectifs

Déterminer et utiliser le centre de symétrie pour représenter graphiquement une fonction.

Centre de symétrie

a et b sont deux réels. Deux points M$\binom{x}{y}$ et M'$\binom{x'}{y'}$ sont symétriques par rapport au point A$\binom{a}{b}$ si et seulement si $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

Cas général

a et b étant un réel, f une fonction D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J).

(C_f) admet le point A$\binom{a}{b}$ pour centre de symétrie si et seulement si :

$\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de} D_f \text{ , } 2a - x \text{ appartient à} D_f \\ \text{et } f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

Remarque

Pour montrer que le point $A\binom{a}{b}$ est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction *f*, on peut aussi utiliser le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On forme alors l'équation *Y = g(X)* de (C_f)dans ce nouveau repère et vérifier que *g* est une fonction impaire.

Leçon : Limite, continuité et dérivation

SEQUENCE 11

Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Objectif

Déterminer la limite infinie ou finie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Notion intuitive de la limite

Limite en $-\infty$ ou $+\infty$

Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$

Vocabulaire et notation

f est une fonction définie pour des plus petites valeurs de x ($-\infty$) ou des plus grandes valeurs de x ($+\infty$).

- *Si l'on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut en choisissant x suffisamment grand, on dit que f(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note :* $lim_{x\longrightarrow +\infty}^{f(x)} = +\infty$. *« On lit : la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$) ».*
- *De même, si l'on peut rendre f(x) aussi négative (mais infiniment grand en valeur absolue) que l'on veut en choisissant x négatif (mais infiniment grand en valeur absolue), on dit que f(x) tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et on note :* $lim_{x\longrightarrow -\infty}^{f(x)} = -\infty$. *« On lit : la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$) ».*

Limite finie en $-\infty$ ou $+\infty$

Vocabulaire et notation

g est une fonction définie pour des plus petites valeurs de x ($-\infty$) ou des plus grandes valeurs de x ($+\infty$) et x_0 une valeur réelle donnée.

- *Si l'on peut rendre f(x) plus proche de y_0 en choisissant x suffisamment grand ($+\infty$), on dit que f(x) tend vers y_0 quand x tend vers $+\infty$ et on note :* $lim_{x\longrightarrow +\infty}^{f(x)} = y_0$.

- *De même, si l'on peut rendre f(x) plus proche de* y_0 *en choisissant x suffisamment petit* $(-\infty)$*, on dit que f(x) tend vers* y_0 *quand x tend vers* $-\infty$ *et on note :*

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.

SEQUENCE 12

Limite des fonctions élémentaires en $+\infty$ et en $-\infty$

Objectifs

Déterminer la limite des fonctions élémentaires en $+\infty$ et en $-\infty$

Limite en $-\infty$ ou $+\infty$ des fonctions élémentaires

On admet les résultats suivants.

- $f(x) = k.$

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k.$
- $f(x) = x$

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$
- $f(x) = \sqrt{x}$

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$
- $f(x) = x^2$

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$
- $f(x) = x^3$

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$
- $f(x) = \frac{1}{x}$

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

Remarques

- La limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$ lorsqu'elle existe, elle est unique.
- Certaines fonctions n'admettent pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.

  Exemple : la fonction mantisse m définie par $m(x) = x - E(x)$ n'admet de limite ni en $+\infty$ ou en $-\infty$.
- Une fonction n'admet pas de limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si son domaine de définition est majoré (respectivement minoré).

Exemple

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'admet pas de limite en $-\infty$ car son ensemble de définition $[0\,; +\infty[$ est minoré.

SEQUENCE 13

Limite d'une fonction en $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$

Objectifs

Déterminer la limite d'une fonction en $x_0 \in \mathbb{R}$

Limite infinie en $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$

Vocabulaire et notation

f est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.

- *Si l'on peut rendre f(x) suffisamment grand (+∞) en choisissant x plus proche de* x_0, *on dit que f(x) tend vers +∞ quand x tend vers* x_0 *et on note :*
  $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
- *De même, si l'on peut rendre f(x) suffisamment petit (− ∞) en choisissant x plus proche de* x_0, *on dit que f(x) tend vers − ∞ quand x tend vers* x_0 *et on note :*
  $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Limite finie en $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$

Propriété

f est une fonction définie en x_0. *Si f admet une limite en* x_0 *alors* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarques

- Lorsqu'une fonction admet une limite en x_0 alors cette limite est unique.
- Une fonction définie en x_0 n'admet pas nécessairement de limite en x_0.

Exemple

La fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(x) = \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$ n'admet pas de limite en 0.

Une fonction f n'admet pas de limite en x_0 s'il existe un intervalle ouvert K de centre x_0 tel que $D_f \cap K = \emptyset$.

SEQUENCE 14

Limite à gauche, limite à droite en $x_o \in \mathbb{R}$

Objectif

Déterminer la limite à gauche, la limite à droite en $x_o \in \mathbb{R}$ d'une fonction

Vocabulaire et notation

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, on ne peut calculer f($x_0$) mais on peut calculer f(x) pour des valeurs de x plus proches de x_0 à gauche ou à droite.

- *Pour des valeurs de x plus proches de x_0 à gauche, ou bien quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures ou négatives, on note :$\lim_{x\to x_0^<}^{f(x)}$ ou $\lim_{x\to x_0^-}^{f(x)}$.*
- *Pour des valeurs de x plus proches de x_0 à droite, ou bien quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures ou positives, on note :$\lim_{x\to x_0^>}^{f(x)}$ ou $\lim_{x\to x_0^+}^{f(x)}$.*

Exercice

On donne *f(x)*= $\sqrt{x}$.

Calcule *f(0)*et $lim_{x\to 0^+}^{f(x)}$. Conclus. Peux-tu calculer $lim_{x\to 0^-}^{f(x)}$? Pourquoi ?

SEQUENCE 15

Limite en x_o ($x_o \in \mathbb{R}$) des fonctions élémentaires

Objectif

Déterminer la limite en x_o ($x_o \in \mathbb{R}$) des fonctions élémentaires

Limite en x_o ($x_o \in \mathbb{R}$) des fonctions élémentaires

On admet les résultats suivants.

- *f(x) = k.*

  $lim_{x\to x_o}^{f(x)} = k.$
- *f(x) = x*

  $lim_{x\to x_o}^{f(x)} = x_o$.
- *f(x) =* $\sqrt{x}$

  $lim_{x\to 0}^{f(x)} = 0.$

- $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

  $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

- $f(x) = \frac{1}{x^n}$

  si $n \in \mathbb{N}^*$ *et n pair,*

  $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

  si $n \in \mathbb{N}$ *et n impair,*

  $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

  En particulier, pour $f(x) = \frac{1}{x}$

  $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Exercice

Dans chacun des cas suivants, conjecture à l'aide d'une calculatrice le comportement de *f(x)* lorsque *x* prend des valeurs de plus en plus grandes.

a) $f(x) = 5x^2 - 1000$.

b) $f(x) = 0{,}0003x^3 - 10x^2 - 10^6$.

SEQUENCE 16

Calculs de limites

Objectif

Calculer les limites d'une fonction en utilisant les propriétés de comparaison

Propriétés de comparaison

Majoration – Minoration

On admet les propriétés suivantes.

Propriétés

f est une fonction.

- *S'il existe une fonction g telle que pour tout* $x \in]A\,;+\infty[$, $f(x) \geq g(x)$

et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- *S'il existe une fonction g telle que pour tout* $x \in]A\,;+\infty[$, $f(x) \leq g(x)$

  et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple

On donne la fonction f définie par $f(x) = |x|(x+1)$.

$D_f = \mathbb{R}$ *et pour* $x \in [0\,;+\infty[$,

$f(x) = |x|(x+1)$

$= x^2 + x$

Donc $f(x) \geq x^2$ *pour* $x \in [0\,;+\infty[$ et comme $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque

On obtient une propriété analogue :

- quand x tend vers $-\infty$ en remplaçant l'intervalle $]A\,;+\infty[$ par $]-\infty\,;A[$;
- quand x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures) en remplaçant l'intervalle $]A\,;+\infty[$ par un intervalle ouvert de centre x_0 (éventuellement $]a\,;x_0[$ ou $]x_0\,;b[$).

SEQUENCE 17

Calculs de limites

Objectif

Calculer les limites d'une fonction en utilisant le théorème des gendarmes

Théorème des gendarmes

Propriété

f est une fonction.

S'il existe deux fonctions g et h telles que pour tout $x \in]A;+\infty[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = l$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Exemple

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+E(x)}$ où $E(x)$ désigne la fonction partie entière.

$D_f =]-\infty\,;-1[\cup[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]-\infty\,;-1[\cup[0\,;+\infty[$, $E(x) \leq x \leq E(x)+1$.

Ainsi, pour $x \in [\, 0\,;\, +\infty[\,,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Et comme $lim_{x\longrightarrow+\infty}^{0} = lim_{x\longrightarrow+\infty}^{\frac{1}{x}} = 0$

alors $lim_{x\longrightarrow+\infty}^{f(x)} = 0$

Remarque

- Le théorème des gendarmes est parfois formulée de la façon suivante : « *s'il existe une fonction g et un réel l tels que* $lim_{x\longrightarrow+\infty}^{g(x)}=0$ *et* $|f(x)-l| \leq g(x)$ *sur un intervalle* $]A;+\infty[$ *alors* $lim_{x\longrightarrow+\infty}^{f(x)}=l$ ».
- On a aussi une propriété analogue quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures).

Exemple

On donne $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$.

$D_f = \mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leq x^2$.

Or $lim_{x\longrightarrow 0}^{x^2} = 0$. On en déduit que $lim_{x\longrightarrow 0}^{f(x)} = 0$.

SEQUENCE 18

Comparaison de limites, limites et opérations sur les fonctions

Objectifs

- Comparer les limites de fonctions ;
- utiliser les opérations pour déterminer les limites de fonctions

Propriété

f et g sont deux fonctions telles que pour tout $x \in]A\,;\, +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$ *et si* $lim_{x\longrightarrow+\infty}^{f(x)}=l$ *et* $lim_{x\longrightarrow+\infty}^{g(x)}=l'$ *alors* $l \leq l'$.

Remarque

On a une propriété analogue quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers x_0 (éventuellement par valeurs inférieures ou supérieures).

Limites et opérations sur les fonctions

Dans ce paragraphe, sont données les propriétés relatives aux limites en x_0 des $f+g$; $f\times g$; $\frac{1}{g}$; $|f|$; $\sqrt{f}$ connaissant les limites en x_0 des fonctions f et g.

Ces propriétés restent vraies pour les limites de ces fonctions en $+\infty$, $-\infty$ et en x_0 par valeurs supérieures ou inférieures.

Lorsqu'on ne peut directement conclure, on dit qu'il y a indétermination et on signale par !!.

Limite de la somme de deux fonctions

$lim_{x\longrightarrow x_0}^{f(x)}$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$lim_{x\longrightarrow x_0}^{f(x)}$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$lim_{x\longrightarrow x_0}^{(f+g)(x)}$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	!!

Limite du produit de deux fonctions

$lim_{x\longrightarrow x_0}^{f(x)}$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$lim_{x\longrightarrow x_0}^{f(x)}$	l'	$l'(l'\neq 0)$	$l'(l'\neq 0)$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$lim_{x\longrightarrow x_0}^{(fg)(x)}$	ll'	$\begin{cases} -\infty\, si\, l' < 0 \\ +\infty\, si\, l' > 0) \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty\, si\, l' > 0 \\ +\infty\, si\, l' < 0) \end{cases}$	!!	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Remarque

On en déduit que si $lim_{x\longrightarrow x_0}^{f(x)} = l$ alors pour tout entier naturel n non nul,

$lim_{x\longrightarrow x_0}^{f^n(x)} = l^n$.

SEQUENCE 19

Limites et opérations sur les fonctions

Objectif

- Utiliser les opérations pour déterminer les limites de fonctions

Limite de l'inverse d'une fonction

$lim_{x\longrightarrow x_0}^{f(x)}$	$l(l\neq 0)$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$lim_{x\longrightarrow x_0}^{\frac{1}{f(x)}}$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Limite du produit de deux fonctions

Pour calculer la limite en x_0 de $\frac{f}{g}$, il suffit de remarquer que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et d'utiliser les propriétés précédentes.

Limite de la valeur absolue d'une fonction

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	l	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \lvert f(x) \rvert$	$\lvert l \rvert$	$+\infty$

Limite de la racine carrée d'une fonction

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$l (l \geq 0)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \lvert f(x) \rvert$	$\sqrt{l}$	$+\infty$

Limite de la fonction : $x \longmapsto f(ax+b)$

Propriété

f est une fonction, x_0 un nombre réel et $u : x \longmapsto ax + b$ une fonction affine non constante. La fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite en

$ax_0 + b$.

On a alors $\lim_{x \to x_0}^{f(ax+b)} = \lim_{u \to ax_0+b}^{f(u)}$

Remarque

Pour retrouver cette formule, il suffit de poser $u = ax + b$. Quand x tend vers x_0, u tend vers $ax_0 + b$ et on obtient : $lim_{x \to x_0}^{f(ax+b)} = lim_{u \to ax_0+b}^{f(u)}$.

SEQUENCE 20

Recherche de limite lorsqu'il y a indétermination

Objectif

Identifier les indéterminations et utiliser les propriétés pour les lever

Limite d'une fonction polynôme

Propriété

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ de son monôme de plus haut degré.

Exemples

1) Calculons la limite en $+\infty$ de la fonction polynôme f: $x \longmapsto 3x^4 - 2x^2$

   On sait que pour tout x réel, $3x^4 - 2x^2 = 3x^4\,(1 - \frac{2}{3x^2})$.

   Or $\lim_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{2}{3x^2}) = 1$. Ainsi $\lim_{x \to +\infty} (3x^4 - 2x^2) = +\infty$.

2) Calculons $\lim_{x \to -\infty} (-3x^5 - \sqrt{2}x^4 + \pi x^3 - 105x^2 - 16x - 1000) = \lim_{x \to -\infty} (-3x^5) = +\infty$.

Limite d'une fonction rationnelle

Propriété

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples

1) Calculons la limite en $+\infty$ de la fonction f: $x \longmapsto \frac{3x^4 - 2x^2}{-5x^5 + 12}$.

   $\lim_{x \to +\infty} (\frac{3x^4 - 2x^2}{-5x^5 + 12}) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{3x^4}{-5x^5}) = 0$.

2) $\lim_{x \to -\infty} (\frac{3x^6 + 2x^5 - 32x}{-7x^4 + 11x - 13}) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{3x^6}{-7x^4}) = \lim_{x \to -\infty} (\frac{3x^2}{-7}) = -\infty$.

NB : Dans le calcul des limites de fonctions, lorsqu'on obtient un résultat du type : « $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $\infty - \infty$ », on dit qu'il y a indétermination. On ne peut rien conclure mais l'on cherchera à lever l'indétermination en utilisant :

- soit l'expression conjuguée ;
- soit la factorisation ;
- soit les deux procédés successivement.

Exemple

Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction f: $x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$.

En effet, $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = +\infty - \infty$!!

Il y a indétermination ; on ne peut rien conclure mais on sait pour tout x réel, $\sqrt{x^2 + 1} + x \neq 0$.

On peut écrire, en utilisant l'expression conjuguée de $\sqrt{x^2 + 1} - x$:

pour tout x réel, $\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

Or $lim_{x \longrightarrow +\infty}^{(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x})} = 0$. Donc $lim_{x \longrightarrow +\infty}^{(\sqrt{x^2+1}-x)} = 0$.

SEQUENCE 21

Continuité

Objectif

Définir une fonction continue en un point x_0 et utiliser les propriétés de continuité

Définition et propriétés

Définition

f est une fonction et x_0 un nombre réel.

f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x \longrightarrow x_0}^{f(x)} = f(x_0)$.

Propriétés

- *Les fonctions suivantes sont continues en tout élément x_0 de leur ensemble de définition :*

  $x \longmapsto |x|$; $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \longmapsto \frac{1}{x^n}(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \longmapsto cosx$; $x \longmapsto sinx$.
- *f et g sont deux fonctions continues en x_0.*
  - *Les fonctions $f+g$; fg ; kf $(k \in \mathbb{R})$ et $|f|$ sont continues en x_0.*
  - *Si $g(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.*
  - *Si $f \geq 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.*
- *a et b étant deux réels tels que $a \neq 0$, f une fonction et g la fonction définie par $g(x) = f(ax+b)$. f est continue en $ax_0 + b$ si et seulement si g est continue en x_0.*

Exemples

- Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.
- La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ est continue en tout nombre réel x_0.
- La fonction f définie par $f(x) = cos(2x - \frac{\pi}{3})$ est continue en tout nombre réel x_0.

SEQUENCE 22

Prolongement par continuité

Objectif

Définir le prolongement par continuité d'une fonction en un point x_0

Définition

f est une fonction non définie en x_0 et *l* un nombre réel tel que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. *On appelle prolongement de f par continuité en* x_0 *la fonction g définie par :* $\begin{cases} g(x) = f(x) si x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$

Exemple

On donne la fonction *f* définie par *f(x)*= $\frac{sinx}{x}$. On sait que $D_f = \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{sinx}{x} \; si \; x \in D_f \\ g(0) = 1 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de *f* en 0.

SEQUENCE 23

Dérivation : Fonction dérivable en un nombre x_0

Objectif

Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point x_0 et déterminer le nombre dérivé

Nombre dérivé d'une fonction en x_0

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et x_0 un élément de I. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite finie l c'est-à-dire

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$.

Dans ce cas, l est appelé nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

Remarques

1- Dans cette définition, si on remplace *x* par $x_0 + h$ où *h* est un nombre quelconque de I, on peut écrire :$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$.

Cette deuxième écriture est souvent utilisée.

2- Par abus de langage on dira parfois que f est dérivable en un **point** x_0 de I

Exemple

On donne $f(x)=x^2$.Montrons que f est dérivable en un nombre réel a quelconque .

On a :$lim_{x\to a}\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}= lim_{x\to a}\ \frac{x^2-a^2}{x-a}=lim_{x\to a}\ \frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=2a\in\mathbb{R}$ donc fest dérivable en tout nombre réel a.

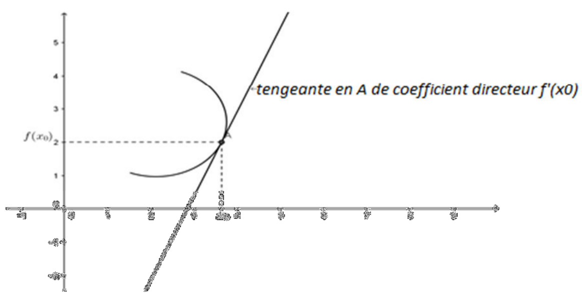
Interprétation graphique : équation de la tangente en un nombre x_0 de I.

Le taux d'accroissement de f en x_0 représente le coefficient directeur d'une droite passant par un point A(x_0, $f(x_0)$). Le nombre dérivé qui est un « taux limite » permet de définir une « droite limite »

Définition

Soit f une fonction dérivable en x_0

On appelle tangente à la courbe (C_f) d'une fonction f au point A(x_0, $f(x_0)$) la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$.



Une équation *de cette tangente est :* $y= f'(x_0)\ (x-x_0) + f(x_0)$.

SEQUENCE 24

Dérivabilité et continuité

Objectifs

Démontrer la continuité d'une fonction en utilisant sa dérivabilité

Propriété

Si une fonction f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0

En effet :

Supposons f dérivable en x_0 de I :

$\forall\in I, f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ (x-x_0) \Leftrightarrow lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))= \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0))$

$\Leftrightarrow lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) =lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{x} \lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0)$

$\Leftrightarrow lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) =f'(x_0)\ x_0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

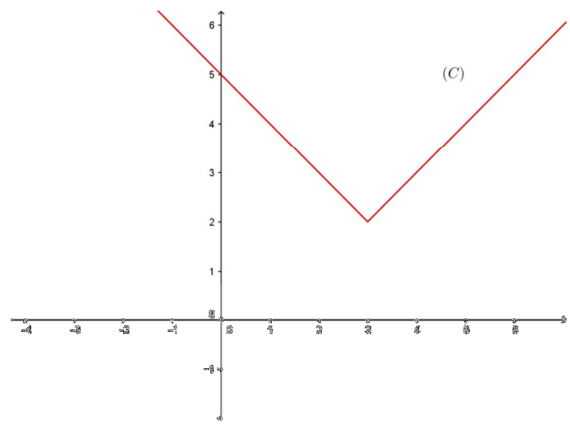
Donc f est continue en x_0.

Attention ! La réciproque est fausse.

En effet, si f est continue en un nombre x_0, cela ne veut pas dire qu'elle est forcément dérivable en ce nombre.

Exemple

La courbe de la fonction tracée ci-dessus est bien continue en 3 mais n'y est pas dérivable car on ne peut pas tracer la tangente en 3.



SEQUENCE 25

Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite x_0

Objectifs

Etudier la dérivabilité à gauche, la dérivabilité à droite d'un point

Définition

Soit f une fonction définie en un nombre x_0.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $]a,\ x_0]$ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à gauche en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé à gauche en x_0 noté $f'_g(x_0)$.

.On dit que f est dérivable à droite en x_0 si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0, b[$ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à droite en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé à droite en x_0 noté $f'_d(x_0)$.

Propriété

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$.

SEQUENCE 26

Fonctions dérivées

Objectif

Calculer la fonction dérivée de fonctions élémentaires

Définition

Soit f une fonction

L'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable est appelé ensemble de dérivabilité de f.

La fonction $x \longmapsto f'(x)$ *est appelé dérivée (ou fonction dérivée) de f.*

Exemple

Le tableau suivant donne la dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
$x \longmapsto f(x)=k$ $(k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto f'(x)=0$
$x \longmapsto f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto f'(x)=1$
$x \longmapsto f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto f'(x)=2x$
$x \longmapsto f(x)=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$	$x>0$	$x \longmapsto f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto f(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$	$x\neq 0$	$x \longmapsto f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

Dérivée des fonctions cosx et sinx

Propriété s

- *La fonction* $x \longmapsto f(x)= \cos x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* $f'(x)=-\sin x$.
- *La fonction* $x \longmapsto f(x)= \sin x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* $f'(x)= \cos x$.

SEQUENCE 27

Dérivées et opérations

Objectifs

Calculer la dérivée d'une somme, d'un produit et d'une puissance

Dérivée et somme

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I (intervalle ou réunion d'intervalle) alors la fonction u+v est dérivable sur I et (u+v)'=u'+v'

Exemple

Si $f(x)=x^2+x+1$ alors sa dérivée est $f'(x)=2x+1$.

Dérivée et produit.

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I(intervalle ou réunion d'intervalles),alors la fonction uv est dérivable sur I et (uv)'=u'v+v'u.

Cas particuliers

- *Pour k réel,(ku)'=ku'.*
- $(u^2)'=2u'u$

Exemple

Si $f(x)=2x^2+x\sqrt{x}$ alors $f'(x)=2\times 2x+(1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}})=4x+\frac{3\sqrt{x}}{2}$.

Dérivée et puissance

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur I et n un entier naturel non nul.

Alors la fonction u^n *est dérivable sur I et* $(u^n)'=nu'u^{n-1}$.

Cas particulier

$(x^n)'=nx^{n-1}$

Exemples

Si $f(x)=x^4+2x^3-5x+10$ alors $f'(x)=4x^3+2\times 3x^2-5\times 1=4x^3+6x^2-5x$.

Si $g(x)=3\cos^5x+\sin^3x$ alors $g'(x)=3(5\sin x\cos^4x)+3(\cos x\sin^2x)=15\sin x\cos^4x+3\cos x\sin^2x=3\sin x\cos x\,(\sin x-5\cos^3x)$

SEQUENCE 28

Dérivées et opérations (Suite et fin)

Objectifs

Calculer la dérivée de l'inverse d'une fonction, de la composée de fonctions et de la racine carrée d'une fonction

Dérivée de l'inverse d'une fonction

Propriétés

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec v(x)≠0 alors :

- *La fonction* $\frac{1}{v}$ *est dérivable sur I et* $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$
- *La fonction* $\frac{u}{v}$ *est dérivable sur I et* $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Propriété

La fonction tanx est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$ *et* $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Propriété

Soit $x \longmapsto ax+b$ *une fonction et* x_0 *un réel.*

Si la fonction u est dérivable au nombre $y_0 = ax_0 + b$, *alors la fonction* $f : x \longmapsto u(ax+b)$ *est dérivable en* x_0, *et* $f'(x_0) = au'(ax_0+b)$.

Exemple

Si $f(x) = \cos(5x+1)$ alors $f'(x) = -5\sin(5x+1)$.

Dérivée de la racine carrée d'une fonction dérivable

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout x élément de I, u(x)> 0.

La fonction $\sqrt{u}$ *est dérivable sur I et on a* $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x + 7}$. *En posant* $u(x) = x^3 - 5x + 7$ *on a* $u'(x) = 3x^2 - 5$ *et* $f'(x) = \frac{3x^2 - 5}{2\sqrt{x^3 - 5x + 7}}$.

SEQUENCE 29

Application de la dérivation à l'étude des variations

Objectif

Utiliser la dérivée pour étudier les variations de fonctions

Variation d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *Si f est croissante sur I, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I.*
- *Si f est décroissante sur I, alors $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I.*
- *Si f est constante sur I, alors $f'(x)= 0$ pour tout x de I*

Théorème (Principe de Lagrange)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *Si la dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I ;*
- *Si f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en des nombres isolés où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I ;*
- *Si f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en des nombres isolés où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .*

Exemple

Étudions les variations de la fonction $f(x)=2x^4-x^2-1$.

f est définie sur $\mathbb{R}$ *.*

Il est conseillé d'écrire l'ensemble de définition sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles afin de pouvoir calculer toutes les limites.

- $D_f= \mathbb{R} =]-\infty , +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
- f est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

  $f'(x)=8x^3-2x=2x\,(2x-1)\,(2x+1)$;
- Étudions le signe de f' :

Le tableau de signe permet de conclure :

$\forall x\in \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]0;\frac{1}{2}\right[$, $f'(x)<0$ et f est décroissante.

$\forall x\in \left]-\frac{1}{2}\,;0\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f'(x)>0$ et f est croissante.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ *ou* $x=0$ *ou* $x=\frac{1}{2}$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	[illegible]	↗	[illegible]	↘	[illegible]	↗	$+\infty$

SEQUENCE 30

Application de la dérivation à la détermination des extrémums de fonctions

Objectif

Utiliser la dérivée pour déterminer les extrema de fonctions

Extremums d'une fonction.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- *On dit que $f(x_0)$ est un maximum relatif (ou un maximum local) de f sur I,*

s'il existe un intervalle ouvert J ($x_0 \in J$ et $J \subset I$) tel que $f(x_0)$ soit le maximum de f sur J.

- *On dit que $f(x_0)$ est un minimum relatif (ou un minimum local) de f sur I,*

S'il existe un intervalle ouvert J ($x_0 \in J$ et $J \subset I$) tel que $f(x_0)$ soit le minimum de f sur J.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I :

- *Si f admet un extremum relatif en x_0, alors $f'(x_0)=0$.*
- *Si f ' s'annule en changeant de signe en x_0, alors f admet un extremum relatif en x_0.*

Remarque

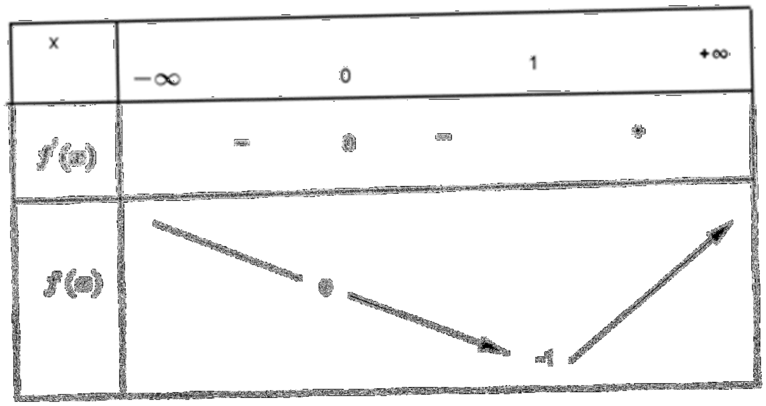
Les extremums relatifs sont facilement identifiables à l'aide des flèches qui sont dans le tableau de variation.

Exemple

Déterminons les extremums relatifs de la fonction $f(x)=3x^4-4x^3$ sur $\mathbb{R}$.

- $D_f = \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$.
- $\forall x \in \,]-\infty\,;\,1[$ $f'(x)<0$ et f est décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$.
- $\forall x \in \,]1;+\infty[$, $f'(x)>0$ et f est croissante sur $]1;+\infty[$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x=1$.



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

f admet seulement un extremum relatif en 1 car en o, *f'* s'annule mais tout en conservant le signe. Il s'agit ici d'un minimum.

SEQUENCE 31

Application de la dérivation à la détermination des extrémums de fonctions

Objectif

Utiliser la dérivée pour déterminer les extrema de fonctions

Approximation d'une fonction par une fonction affine.

Définition

Soit f une fonction dérivable en x_0.

On appelle application affine tangente de f en x_0 l'application

$x \longmapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

On écrit $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *pour x voisin de x_0 ou (avec $x = x_0 + h$),* $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$ *pour x voisin de 0.*

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

Si f est dérivable en x_0, pour tout nombre réel h tel que x_0+h appartient à I, on a :

$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + h\varphi(h)$ *où* $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

Démonstration

Posons $\varphi(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$ *donc* $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h)$ *et*

$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.

Exercices

Donne une approximation d'ordre 0 (ou en 0) de chacune des fonctions suivantes :

$x \longmapsto (1+x)^2$; $x \longmapsto \sqrt{1+x}$; $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$; $x \longmapsto \sin x$; $x \longmapsto \cos x$.

Leçons de la compétence de base 2 du premier trimestre

Leçon : les applications

SEQUENCE 32

Fonction et application

Objectif

Définir une fonction et une application

Définition

On rappelle qu'étant donné deux ensembles A et B, une correspondance f de A vers B est dite fonctonnelle, lorsque tout élément de A est lié à un élément au plus de B.

Notation : l'ensemble des fonctions définies de A vers B se note $\mathcal{F}(A, B)$

Si f est une telle fonction, on écrit $f \in \mathcal{F}(A, B)$

Exemple

Si P est l'ensemble des personnes et V l'ensemble des villes, la relation f de P vers V définie par x est né dans la ville y est une fonction et $f \in \mathcal{F}(P, V)$

Définition

On appelle application d'un ensemble A vers un ensemble B toute relation de A vers B telle qu'à tout élément de A est lié un élément unique de B.

Remarque

Une application de A vers B est donc une fonction de A vers B dont l'ensemble de définition est A.

SEQUENCE 33

Applications particulières

Objectif

Définir les applications particulières

Application surjective

Définition

soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. f est dite application surjective(ou f est une surjection) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F est l'image d'au moins un élément de l'ensemble de départ E.

En d'autre terme soit $f: x \mapsto y$ et posons (E) l'équation $y = f(x)$ ou y est donné et x est à chercher.

Alors f est surjective si (E) possède au moins une solution.

Application injective

Définition

soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

f est dite application injective (ou f est une injection) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F est l'image d'au plus un élément de l'ensemble de départ E.

En d'autre terme, f est injective si l'équation (e) précédente possède au plus une solution.

Application bijective

Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

f est dite bijective (ou f est une bijection) lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F est l'image d'un élément unique de E. L'équation (e) admet une et une seule solution.

En d'autre terme, f est bijective lorsque l'équation (e) précédente possède exactement une solution.

Conséquences des définitions :

Soit$f \in \mathcal{F}(E,F)$.

- *f est surjective si et seulement si :* $\exists y \in F, y = f(x) \forall x \in E$
- *f est injective si et seulement si :* $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2 \ \forall x_1 \in E, x_2 \in E$
- *f est bijective si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.*

Bijection réciproque

Définition

Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. *Lorsque* f *est une bijection de E sur F, à tout élément* y *de F, il est possible d'associer un élément et un seul* x *de E tel que* $y = f(x)$.

On définit ainsi une application de F vers E appelée application réciproque de f *notée* f^{-1}

$f : E \longrightarrow F$

$x \mapsto f(x) = y$

Et

$f^{-1} : F \longrightarrow E$

$y \mapsto f^{-1}(y) = x$

Remarque

Pour que la réciproque d'une application f soit une application, il faut et il suffit que f soit bijective.

SEQUENCE 34

Composition d'applications et application involutive

Objectif

Composer des applications et utiliser les propriétés de composée de fonctions

Définitions et propriétés

Définition

soit f *une application de E vers F et* g *une application de F vers G.*

On appelle composée de f *par* g *l'application* $g \circ f$ *définie de E vers G telle que pour tout élément de* D_f *et pour tout* $f(x) \in D_g$, $g \circ f(x) = g[f(x)]$

Propriété

Si f *et* g *sont des applications bijectives,* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Propriété

Si f^{-1} *est la bijection réciproque de* f *, alors* f *est la bijection réciproque de* f^{-1}

Et on a : $f^{-1} \circ f = Id_E$ *et* $f \circ f^{-1} = Id_F$

Application involutive

Définition

Soit f une application de E vers E (l'ensemble de départ est le meme que l'ensemble d'arrivée).

f est dite involutive lorsque $f^{-1} = f$ ou encore $f \circ f = Id_E$

Exercice

f est une transformation du plan dans lui- même qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

Leçon : équations, inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$ et systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

SEQUENCE 35

Equation du second degré dans $\mathbb{R}$

Objectifs

- Définir une équation du second degré ;
- donner la forme canonique d'un trinôme du second degré et calculer son discriminant.

Définition

On appelle équation du second degré une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont sont trois réels donnés avec a différent de 0.

Forme canonique

Propriété et définition

Il existe des réels α et β tels que pour tout x réel,

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$\quad = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Cette écriture $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée forme canonique de P.

Démonstration

On utilise la forme réduite du polynôme P du second degré pour retrouver la forme canonique

$P(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ P est bien de la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

Exercice

Déterminer la forme canonique des polynômes suivants :

$P(x) = -2x^2 + 24x - 3$ $Q(x) = -x^2 + 5x - 6$ et $R(x) = 4x^2 - 4x + 1$

Discriminant

Définition

On appelle discriminant du polynôme P(x)= $ax^2 + bx + c$ *le nombre réel note* Δ *défini par* $\Delta = b^2 - 4ac$

Remarque : Discriminant réduit

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ un polynôme du second degré.

Si $b' = \frac{b}{2}$ alors $\Delta = b^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$

Définition

Etant donné un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ *s'il existe un réel* b' *tel que* $b' = \frac{b}{2}$ *alors P admet un discriminant appelé discriminant réduit qu'on note habituellement* Δ' *défini par* $\Delta' = b'^2 - ac$

SEQUENCE 36

Factorisation et résolution des équations du second degré.

Objectifs

- Factoriser un trinôme du second degré ;
- Résoudre des équations du second degré.

Propriété

Soit P, le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *et* Δ *son discriminant.*

- *Si* $\Delta < 0$ *alors P n'est pas factorisable et n'admet pas de racine réelle.*
- *Si* $\Delta = 0$ *alors* $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ *et admet une racine unique* $-\frac{b}{2a}$ *appelée aussi racine double.*
- *Si* $\Delta > 0$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ *où* $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et P admet deux racines réelles distinctes* x_1 *et* x_2 *définies précédemment.*

Réciproquement, si un polynôme du second degré admet une forme factorisée, alors il admet deux racines éventuellement confondues. Cela permet de dire aussi que si un polynôme du second degré n'admet pas de racines (l'équation P(x)=0 n'admet pas de solution) alors il ne peut pas être mis sous forme factorisée .

Remarque

Lorsque le polynôme P admet un discriminant réduit, Δ' *,on a :*

- *Si* $\Delta' < 0$*, P n'admet pas de racines et n'est pas factorisable.*
- *Si* $\Delta' = 0$*, P admet une racine double* $x_o = \frac{-b'}{a}$ *et sa forme factoriée est*
  $P(x) = a(x - x_o)^2$
- *Si* $\Delta' > 0$*, P admet deux racines distinctes* $x_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ *et* $x_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$ *et sa forme factorisée est* $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exercice

Déterminer les racines éventuelles des polynômes suivants et factoriser-les si possible :

1) $2x^2 + 2x + 2$
2) $x^2 + 6x + 9$
3) $6x^2 - 13x + 6$

SEQUENCE 37

Somme des racines d'un polynôme du second dégré et interprétation graphique

Objectifs

- Déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit ;
- Interpréter graphiquement les solutions d'une équation du second degré.

Propriété

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si, ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$*.*

Exemple

Déterminons deux nombres réels ayant pour somme -1 et pour produit -12

Désignons par S la somme et par P le produit

On a $x^2 - Sx + P = 0$ *soit* $x^2 + x - 12 = 0$

Le polynôme $x^2 + x - 12$ a pour discriminant $\Delta = 49$ et les racines sont $x = -4$ *et* $x = 3$

Les deux nombres cherchés sont -4 *et* 3

On peut remarquer que la somme de ces deux nombres est effectivement -1 et le produit est -12

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

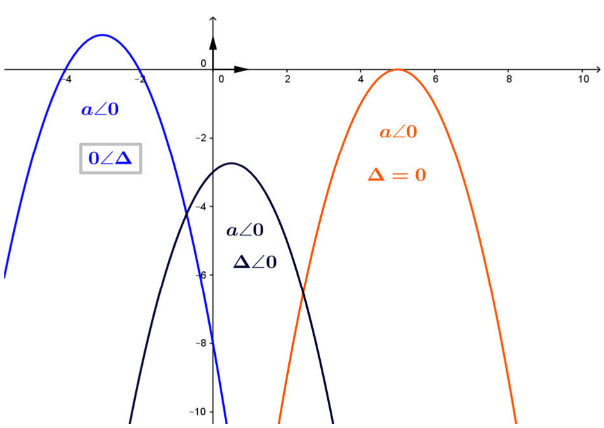
$\begin{cases} x + y = -9 \\ xy = 20 \end{cases}$ $\begin{cases} a + b = 2 \\ xy = -8 \end{cases}$

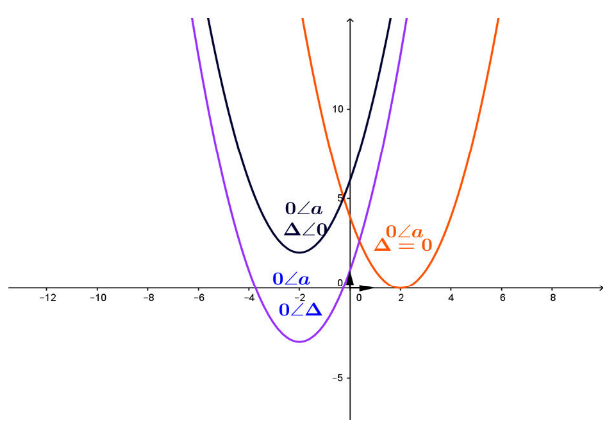
Interprétation graphique des solutions d'une équation du second degré

Propriété

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et P un polynôme du second dégré.

La représentation graphique de P est l'image par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{-b}{2a} \\ \frac{-\Delta}{4a} \end{pmatrix}$ de la parabole représentant la fonction $x \longmapsto ax^2$. C'est donc une parabole de sommet $S\left(\frac{-b}{2a}, P\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.





SEQUENCE 38

Inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$

Objectifs

- Etudier le signe d'un trinôme du second degré ;
- Résoudre des inéquations du second degré.

Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit P un polynôme du second degré et Δ son disciminant

- *Si* $\Delta > 0$ *,* x_1 et x_2 *désignant les deux racines avec* $x_1 < x_2$ *alors P(x) est du signe de a siet seulement si* $x \in \,]-\infty\,;\; x_1\,[\, \cup \,]x_2\,;\,+\infty[$ *et du signe de –a si et seulement si* $x \in \,]\,x_1;\; x_2\,[$ *. On dit dans ce cas que P est du signe de* a *« aux extérieurs » des racines et du signe de –* a *« à l'intérieur des racines ».*
- *Si* $\Delta = 0$*, P(x) est de signe de a sauf lorsque* $x = \frac{-b}{2a}$
- *Si* $\Delta < 0$*, P(x) est toujours du signe de a pour tout x réel.*

Démonstration

1er cas : $\Delta > 0$

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
Signe de a	Signe de a	Signe de a	Signe de a
Signe de $x - x_1$	$-$ 0	$+$	$+$
Signe de $x - x_2$	$-$	$-$ 0	$+$
Signe de $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	Signe de a 0	Signe de $-a$ 0	Signe de a

2ème cas : $\Delta = 0$

$P(x) = a(x - x_o)^2$ *où* $x_o = \frac{-b}{2a}$

$(x - x_o)^2 \geq 0$ donc $a(x - x_o)^2$ est du signe de *a.*

3ème cas : $\Delta < 0$

$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ or $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc pour tout réel x, $P(x)$ est du signe de *a.*

SEQUENCE 39

Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Définir et résoudre par substitution des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Définition

Un système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$ *est un ensemble* $(\sum)$ *de deux équations de la forme :*

$$(\sum)\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Où (x, y) *est le couple d'inconnues et a, b, c, a', b' et c' sont des constantes appelés coefficients du système et vérifiant les conditions* $(a, b) \neq (0,0)$ *et* $(a', b') \neq (0,0)$*.*

Résoudre le système revient à trouver le ou les couples $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *qui satisfont simultanément les deux équations* (1) *et* (2)*. Ces couples sont les solutions du système.*

Résolution par substitution

Résoudre un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ c'est trouver tous les couples (x, y) solutions de ce système.

Méthode de résolution par substitution

A partir de l'une des deux équations, on exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre. On remplace dans l'autre équation l'inconnue trouvée par son expression. On obtient une équation à une inconnue que l'on résout et on trouve la valeur de l'inconnue. On la remplace par sa valeur dans l'expression de la première inconnue.

Exemple

Résoudre par la méthode de substitution le système :

$$\begin{cases} 3x + 1 = 5y \\ 2y - 4 = 9x \end{cases}$$

SEQUENCE 40

Résolution par combinaison linéaire (par addition) ou par la méthode graphique des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Résoudre par combinaison linéaire ou par la méthode graphique des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Méthode

On multiplie chaque équation du système par un nombre bien choisi tel qu'en additionnant membres à membres les équations obtenues, l'une des deux inconnues disparaisse. On résout alors l'équation à une inconnue puis on termine par le calcul de l'autre inconnue en remplaçant l'inconnue trouvée par sa valeur dans l'une de deux équations initiales.

Exemple

Résoudre Σ le système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\begin{cases} 3x + 1 = 5y \\ 2y - 4 = 9x \end{cases}$$

Méthode graphique

Soit le système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$suivant :

$$(I)\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

Où (x, y) est le couple d'inconnues et a, b, c, a', b' et c' sont des constantes tels que$(a, b) \neq (0,0)$et $(a', b') \neq (0,0)$.

Construire (D) et (D') les droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ $et\ a'x + b'y + c' = 0$.

Les coordonnées du point d'intersection de (D) et (D') est le couple solution du système (I).

Exemple

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ x - y = -4 & (2) \end{cases}$$

SEQUENCE 41

Résolution par la méthode de Cramer des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Résoudre par la méthode de Cramer des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Méthode de Cramer

Cette méthode donne une expression générale de la solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues.

Comme l'étude se porte sur des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$, donc le cas où $n = 2$:

Considérons le système $(\sum)$ tel que :

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où $a, b, c, a', b' et\ c'$ sont des constantes fixées.

Calculons le déterminant associé à $(\sum)$ que l'on note Δ :

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Si$\Delta \neq 0$, alors le système $(\sum)$ admet un couple de solution (x, y) où$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}\ et\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

avec Δ_x et Δ_y respectivement déterminant de x et déterminant de y donnés par :

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

Si $\Delta = 0$, on démontre que dans ce cas le système n'a pas de solution ou admet une infinité de solutions.

Exemple

Résoudre par la méthode de Cramer le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ x - y = -4 & (2) \end{cases}$$

SEQUENCE 42

Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Objectif

Définir et résoudre par substitution des Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Définition

Un système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^3$ est un ensemble $(\sum)$ de trois équations à trois inconnues de la forme :

$$(\Sigma)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1(1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2(2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3(3) \end{cases}$$

Où (x, y, z) est le triplet d'inconnues et $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3$ et d_3 sont des constantes appelés coefficients du système et vérifiant les conditions $(a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$, $(a_2, b_2, c_2) \neq (0,0,0)$ et $(a_3, b_3, c_3) \neq (0,0,0)$. Résoudre le système revient à trouver le ou les couples $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui satisfont simultanément les trois équations(1), (2) et (3). Ces couples sont les solutions du système.

Résolution par Substitution

La méthode de substitution consiste à exprimer une des inconnues du système à trois inconnues en fonction de deux autres puis on la remplace par cette expression dans les autres équations. On se ramène ainsi à la résolution de système dans $\mathbb{R}^2$ ou encore à la résolution d'une équation à une inconnue.

Exemple

Résoudre par substitution le système à résoudre suivant

$$(\Sigma)\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 & l(1) \\ x + 3y + 4z = 10 & l(2) \\ 3x - 2y - z = 2 & l(3) \end{cases}$$

SEQUENCE 43

Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Objectif

Résoudre par le Pivot de Gauss des Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Résolution par le Pivot de Gauss

La méthode de Gauss connue sous le nom de Pivot de Gauss, dans le cas de la résolution du système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$, consiste à transformer un système donné en un système équivalent (c'est-à-dire un système admettant les mêmes solutions) par utilisation des seules opérations élémentaires suivantes sur les équations :

- échange de deux équations;
- multiplication d'une équation par un nombre non nul ;
- addition d'une équation avec une autre équation éventuellement ayant été multipliée par un nombre réel non nul.

Le but est d'obtenir un système triangulaire facilement résoluble.

Exemple

Résoudre par le pivot de Gauss le système ($\sum$) suivant :

$$(\Sigma)\ \begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \quad (1) \\ x + 3y - 5z = 16\ (2) \\ 5x - y + 7z = 0\ \ (3) \end{cases}$$

1ère étape

Eliminons l'inconnue x dans l'équation(2) et l'équation (3) en utilisant l'équation (1).

On aura :

(2') $\longrightarrow$ (2) $-\frac{1}{2} \times$ (1) : $x + 3y - 5z - \frac{1}{2} \times (2x - 2y + z) = 16 - 1$

$4y - \frac{11}{2} z = 15$

(3') $\longrightarrow$ (3) $-\frac{5}{2} \times$ (1) : $5x - y + 7z - \frac{5}{2} \times (2x - 2y + z) = -5$

$$4y + \frac{9}{2} z = -5$$

Ecrivons le système ($\sum$') équivalent au système ($\sum$) dans lequel, on a :

- l'équation (1) du système ($\sum$) est conservée ;
- l'équation (2) est remplacée par (2′) ;
- l'équation (3) est remplacée par (3′) ;

$$(\Sigma')\ \begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \quad (1) \\ \quad 4y - \frac{11}{2} z = 15\ (2') \\ \quad 4y + \frac{9}{2} z = -5\ (3') \end{cases}$$

2èmeétape

Eliminons y dans l'équation (3') en utilisant l'équation (2').Multiplions l'équation (2') par -1et ajoutons membre à membre l'équation obtenue et l'équation (3'), alors on obtient l'équation (3''):$\frac{20}{2} z = -20$

Nous pouvons écrire le système ($\sum$'')tel que les équations (1) et (2')du système ($\sum$')sont conservées et l'équation (3') est remplacée par (3'') :

$$(\Sigma'')\ \begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \quad (1) \\ \quad 4y - \frac{11}{2} z = 15\ (2') \\ \qquad \frac{20}{2} z = -20\ (3'') \end{cases}$$

$3^{ème}$étape : résolution

Le système$(\sum)$ a la même solution que le système triangulaire $(\sum'')$ que l'on résout facilement en «cascade » : la dernière équation donne$z = -2$, puis (2') donne $y = 1$ et finalement l'équation (1) donne $x = 3$.

D'où le triplet $(3; 1; -2)$ est solution du système $(\sum)$.

Remarque

Nous admettons qu'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ a :

- soit aucune solution ;
- soit une seule solution ;
- soit une infinité de solutions.

Leçons de la compétence de base 3 du premier trimestre

Leçon : calculs barycentriques

SEQUENCE 44

Barycentre de deux points pondérés

Objectifs

- Définir le barycentre (l'isobarycentre) de deux points pondérés
- Construire le barycentre de deux points pondérés

Points pondérés

Définition

A, B, C, … sont des points du plan, α, β, γ, …des nombres réels. Les couples (A,α), (B, β), (C,γ)…constitués à la première place des points A, B, C,…et à la seconde place des nombres réel,α, β, γ, …sont appelés des points pondérés.

On dit que le point A est affecté du coefficient α, le point B est affecté du coefficient β et le point C est affecté du coefficient γ …

Définition du barycentre de deux points pondérés

(A,α) et (B, β) sont deux pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Il existe un unique point G du plan tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés (A,α) et (B, β).

On note $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ ou $G = bar$

A	B
α	β

Remarques

- Si A = B alors les points A, G et B sont confondus.
- Si le coefficient α de A est nul ($\alpha = 0$) alors G = B car $\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $\beta \neq 0$, $\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc $G = B$.
  De même lorsque $\beta = 0$, G = A.
- La relation $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ permet de dire que le barycentre G des points pondérés *(A,α)* et *(B, β)* est le point de la droite (AB) ayant pour abscisse $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ dans le repère (A, B).
- *(A,α)* et *(B, β)* étant deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$, le barycentre G des points *(A,α)* et *(B, β)* est le point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Pour $k \neq 0$, on a $k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

- Et comme $k\alpha + k\beta = k(\alpha + \beta) \neq 0$, G est aussi barycentre des points pondérés *(A, $k\alpha$)* et *(B, $k\beta$)*.

On dit que le barycentre de deux points pondérés reste inchangé lorsqu'on multiplie les deux coefficients par un même nombre non nul.

Exemples

1) A et B sont deux points du plan tels AB = 6 cm. Plaçons le barycentre G des points pondérés *(A,– 3)* et *(B, 10)*.

En effet $\overrightarrow{AG} = \frac{10}{-3+10}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AB}$ soit $\mathrm{AG} = \frac{10}{7}\,\mathrm{AB}$

$$\mathrm{AG} = \frac{10}{7} \times 6cm$$

$$\mathrm{AG} \approx 8{,}6 \text{ cm}$$

On peut donc placer G avec une règle graduée.

2) Plaçons le barycentre G des points pondérés *(A, 3)* et *(B, –2)*.

En effet $\overrightarrow{AG} = \frac{-2}{3-2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG} = -2\,\overrightarrow{AB}$. G est le point d'abscisse –2 dans le repère (A, B).

3) Plaçons le barycentre G des points pondérés *(A, 3)* et *(B, 3)*.

En effet $3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Cette relation caractérise le milieu I du segment [AB].

$$G = I$$

SEQUENCE 45

Position du barycentre de deux points pondérés, ses coordonnées et transformation de $\alpha\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} + \boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}$

Objectifs

- Déterminer la position et les coordonnées du barycentre de deux points pondérés ;

- Transformer $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$.

Détermination de la position du barycentre de deux points pondérés

(A,α) et *(B, β)* sont deux pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$.

- La relation $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ montre que le barycentre G des points pondérés *(A,α)* et *(B, β)* appartient à la droite (AB).

Puis de l'égalité $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, on tire $\overrightarrow{GA}=\frac{-\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB}$.

- Or lorsque α et β sont de même signe, le nombre $\frac{-\beta}{\alpha}$ est négatif, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens contraires et le barycentre G se trouve nécessairement entre les points A et B.
  En particulier, si $\alpha=\beta$, on dit que G est l'isobarycentre de A et B. G est confondu au milieu I du segment[AB].
- Et lorsque α et β sont de signes contraires, le nombre $\frac{-\beta}{\alpha}$ est positif, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de même sens et le barycentre G se trouve nécessairement à l'extérieur du segment [AB].
  De A et de B, le point le plus près du barycentre G est celui dont le coefficient a la plus grande valeur absolue.

Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, *on considère les points* $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$ *et* $G(x_G;\ y_G)$ *où G est le barycentre de (A,α) et (B, β).*

En choisissant M = O dans la relation $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$, *on obtient :*

$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{OB}$.

Puis, passant aux coordonnées, on obtient : $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ *et* $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$.

Transformation de $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

Théorème

(A,α) et (B, β) étant deux pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$ *et G le barycentre de (A,α) et (B, β).*

Pour tout point M du plan, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

SEQUENCE 46

Barycentre de trois points pondérés, centre de gravité d'un triangle

Objectifs

Définir le barycentre de trois points pondérés et le centre de gravité d'un triangle

Extension des définitions et propriétés

Définition

(A,α), (B,β) et (C,γ) étant trois points pondérés tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Ce point G est appelé le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) et on note $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ ou $G = bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

Et pour tout point M du plan, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

Propriétés

1) *Si l'un des coefficients des points pondérés est nul, par exemple $\gamma = 0$, G devient le barycentre des deux points pondérés (A,α) et (B,β).*
2) *Le barycentre de trois points pondérés reste inchangé si l'on multiplie les trois coefficients par un même nombre non nul.*
3) *Lorsque le plan est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les coordonnées de G se calculent en fonction de celles des points A, B et C.*
   Si l'on donne $A(x_A;\, y_A)$, $B(x_B;\, y_B)$ et $C(x_C;\, y_C)$ alors les coordonnées du barycentre G de (A,α) et (B,β) et (C,γ) sont :
$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Centre de gravité d'un triangle

Définition et théorème

L'isobarycentre des sommets d'un triangle est le centre de gravité de ce triangle.

Théorème du barycentre partiel

G étant le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, si $\alpha+\beta\neq 0$, en notant K le barycentre (appelé barycentre partiel) de (A,α), (B,β) alors G devient le barycentre de $(K,\alpha+\beta)$ et (C,γ).

NB : Le choix des points A et B n'est pas obligatoire. On aurait pu choisir B et C à condition que $\beta+\gamma\neq 0$ ou bien A et C à condition que $\alpha+\gamma\neq 0$.

Ce résultat porte le nom de « théorème de barycentre partiel » ou « théorème d'associativité ».

Aussi la notation $G = bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ rend plus opérationnel ce résultat car

Si $G = bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ et si $\alpha + \beta \neq 0$ alors K = $bar\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ et G = $bar\begin{pmatrix} K & C \\ \alpha + \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

Exercice

Etant donné un triangle ABC, construis de diverses manières le barycentre G des points (A, 2) (B, 1) et (C, 1).

SEQUENCE 47

Barycentre de quatre pondérés

Objectif

Définir le barycentre de quatre points pondérés

Définition

(A,α), (B, β), (C, γ) et (D, δ) étant quatre points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$*, il existe un unique point G tel que* $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$*. Ce point G est appelé le barycentre de (A ,α), (B, β) , (C, γ) et (D, δ).*

On note $G = bar\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (D, \delta)\}$.

Et pour tout point M du plan, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MG}$.

Propriétés

1) *Si l'un des coefficients des points pondérés est nul, par exemple* $\delta = 0$, *G devient le barycentre de trois points pondérés (A ,α) et (B, β) (C, γ).*
2) *Le barycentre de quatre points pondérés reste inchangé si l'on multiplie les quatre coefficients par un même nombre réel non nul.*
3) *Lorsque le plan est muni d'un repère* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$*, les coordonnées de G se calculent en fonction de celles des points A, B, C et D.*

   Si l'on donne $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$, $C(x_C ; y_C)$ *et* $D(x_D ; y_D)$ *alors les coordonnées du barycentre G de (A,α) et (B, β), (C, γ) et (D, δ) sont :*

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}.$$

Théorème du barycentre partiel

G étant le barycentre des points pondérés (A,α), (B, β), (C, γ) et (D,δ) avec

$\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$,

si $\alpha + \beta \neq 0$, en notant K le barycentre (appelé barycentre partiel) de (A,α), (B,β) alors G devient le barycentre $(K, \alpha + \beta)$,(C,γ) et (D,δ).

Si de plus *$\gamma + \delta \neq 0$, en notant J le barycentre de (C,γ) et (D,δ) alors G est barycentre de $(K, \alpha + \beta)$ et de $(J, \gamma + \delta)$*

SEQUENCE 48

Résolution des problèmes d'alignement de points

Objectif

Résoudre des problèmes d'alignement des points

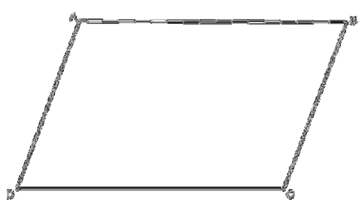
Problème

ABCD est un parallélogramme. On définit les points P et Q par :

- $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
- Q est le symétrique du milieu I de [AB] par rapport à A.

Montre à l'aide du calcul vectoriel que les points P, Q et C sont alignés.

Solution



- En effet $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}$ (relation de Chasles). Or $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ}$(relation de Chasles). Or $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BQ} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{AD} + \frac{-3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= 3\overrightarrow{PQ}$. Les points C, P et Q sont donc alignés.

Problème

ABCD est un parallélogramme. On définit les points P et Q par :

- $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

– Q est le symétrique du milieu I de [AB] par rapport à A.

Démontre l'alignement des points P, Q et C à l'aide du barycentre en montrant que P est le barycentre de (Q, 2) et (C, 1).

Solution

Choisissons le triangle ABD dans lequel nous allons travailler pour exprimer chacun des points P, Q et C comme barycentre des points A,B et D.

– Sur la figure précédente, par lecture directe, P = bar $\{(A, 2), (D, 1)\}$ et

  Q = bar $\{(A, 3), (B, -1)\}$

– Par le calcul vectoriel, comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$

  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

  C = bar $\{(A,\ 1), (B, -1), (D, -1)\}$ ou bien, en multipliant les coefficients de A, B et D par (–1),

C = bar $\{(A, -1), (B, 1), (D, 1)\}$.

En regroupant Q = bar $\{(A, 3), (B, -1)\}$ et C = bar $\{(A, -1), (B, 1), (D, 1)\}$, on tire

P = bar $\{(A, 2), (D, 1)\}$ et P = bar $\{(Q, 2), (C, 1)\}$. Les points P, Q et C sont alignés.

SEQUENCE 49

Résolution des problèmes de concours de droites

Objectif

Résoudre des problèmes de concours de droites

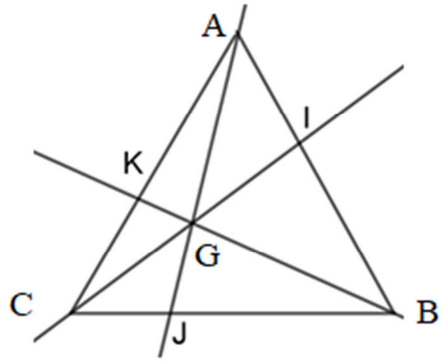
Problème

Soit ABC un triangle. On désigne par I, J et K les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$.

Démontre que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.

Solution



En effet $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB}$, I = bar $\{(A, 2), (B, 1)\}$

$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

$= \frac{1}{3+1}\overrightarrow{CB}$, J = bar $\{(B, 1), (C, 3)\}$

$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

$= \frac{2}{3+2}\overrightarrow{CA}$, K= bar $\{(A, 2), (C, 3)\}$

Posons G = bar $\{(A, 2), (B, 1), (C, 3)\}$. En appliquant trois fois le théorème des barycentres partiels à G, on obtient :

G = bar $\{(I, 3), (C, 3)\}$;

G = bar $\{(A, 2), (J, 4)\}$;

G = bar $\{(B, 1), (K, 5)\}$. Par conséquent les droits (IC); (AJ) et (BK) sont concourantes au point G.

SEQUENCE 50

Lignes de niveau des applications : M $\longmapsto \boldsymbol{MA^2 + MB^2}$ et M $\longmapsto \boldsymbol{MA^2 - MB^2}$

Objectif

Déterminer les lignes de niveau de l'application : M $\longmapsto MA^2 + MB^2$

et M $\longmapsto MA^2 - MB^2$

Définition des lignes de niveau

k est un réel et f une application du plan dans $\mathbb{R}$.

On appelle ligne de niveau k de l'application f , l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que f(M) = k.

Propriété 1

A et B étant deux points donnés du plan et f l'application du plan dans $\mathbb{R}$ définie par
f(M) = $MA^2 + MB^2$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] ; la ligne de niveau k de l'application f est :

- *soit vide ;*
- *soit réduit au seul point I ;*
- *soit le cercle de centre I et de rayon à déterminer.*

Exercice

A et B sont deux points du plan tels que AB = 2.

Détermine et trace, si possible, la ligne de niveau $k = 3$ de l'application f du plan dans $\mathbb{R}$ définie f(M) = $MA^2 + MB^2$.

Propriété 2

A et B étant deux points donnés du plan et f l'application du plan dans $\mathbb{R}$ définie par
f(M) = $MA^2 - MB^2$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par H le projeté orthogonal de M sur (AB) ; la ligne de niveau k de l'application f est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point H tel que $\overrightarrow{IH}\,.2\,\overrightarrow{AB} = k$.

Exercice

A et B sont deux points du plan tels que AB = 4.

Détermine et trace les lignes de niveau k de l'application f du plan dans $\mathbb{R}$ définie
f(M) = $MA^2 - MB^2$ pour *k = 1 ; k = –2 ; k = 4.*

SEQUENCE 51

Lignes de niveau de l'application : M $\longmapsto \boldsymbol{\alpha MA^2 + \beta MB^2}$ et M $\longmapsto \boldsymbol{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}$

Objectif

Déterminer les lignes de niveau des applications : M $\longmapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$ et M $\longmapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Lignes de niveau de l'application : M $\longmapsto \boldsymbol{\alpha MA^2 + \beta MB^2}$

Propriété

A et B sont deux points distincts du plan, α et β deux réels non tous nuls et f l'application du plan dans $\mathbb{R}$ définie par f(M) $= \alpha MA^2 + \beta MB^2$.

- *Si $\alpha + \beta \neq 0$, on désigne par G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B,β), la ligne de niveau k de l'application f est :*
    - *vide ;*
    - *le seul point G ;*
    - *ou bien le cercle de centre G et de rayon à déterminer.*
- *Si $\alpha + \beta = 0$, la ligne de niveau k de l'application f est une droite perpendiculaire à la droite (AB).*

Exercice

A et B sont deux points distincts du plan. Détermine l'ensemble des points M tels que $2MA^2 - 3MB^2 = 2$.

Lignes de niveau de l'application M $\longmapsto \boldsymbol{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}$

Propriété

A et B étant deux points distincts du plan et f l'application du plan dans $\mathbb{R}$ définie par f(M) $= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

La ligne de niveau k de l'application f : M $\longmapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est :

- *soit vide ;*
- *soit réduite au seul point I milieu de [AB] ;*
- *soit encore le cercle de centre I et de rayon à déterminer.*

Exercice

A et B étant deux points distincts du plan tel que AB $= 2$, détermine la ligne de niveau $k = 3$ de l'application f du plan dans $\mathbb{R}$ définie par *f(M)* $= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

SEQUENCE 52

Lignes de niveau des applications : M $\longmapsto \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ et M $\longmapsto \frac{\boldsymbol{MA}}{\boldsymbol{MB}}$

Objectif

Déterminer les lignes de niveau des applications : M $\longmapsto \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ et M $\longmapsto \frac{\boldsymbol{MA}}{\boldsymbol{MB}}$

Lignes de niveau de l'application M $\longmapsto \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

Propriété

A et B étant deux points distincts du plan et f l'application du plan dans $\mathbb{R}$ définie par f(M) = $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$.

La ligne de niveau k de l'application f : M $\longmapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$ est une droite orthogonale à (AB).

Exercice

A et B sont deux points distincts du plan. Détermine la ligne de niveau de k = 2 de l'application

f : M $\longmapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$.

Lignes de niveau de l'application M $\longmapsto \frac{\boldsymbol{MA}}{\boldsymbol{MB}}$

Propriété

A et B sont deux points distincts du plan, k un réel strictement positif et f l'application du plan dans $\mathbb{R}$ définie par f(M) = $\frac{MA}{MB}$.

La ligne de niveau k de l'application f est :

- *La médiatrice du segment [AB] si k = 1 ;*
- *Le cercle de centre G, barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, $-k^2$) si k ≠ 1.*

Leçon : les vecteurs

SEQUENCE 53

Points et vecteurs de l'espace

Objectif

Rappeler les généralités sur les points et les vecteurs

Généralités

A tout couple de points (A,B) de l'espace ($\mathcal{E}$), on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme.
- Soit O un point de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique de ($\mathcal{E}$) tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

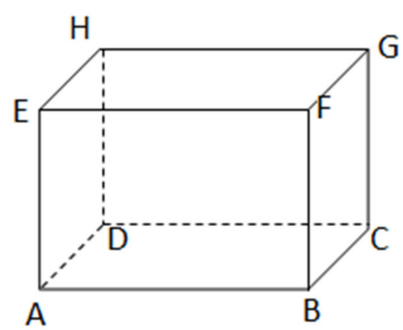
- La norme d'un vecteur $\vec{u}$ se définit comme la distance AB. (A,B) est un couple tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Pour tout point M de $(\mathcal{E})$, le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$ et l'on a $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.
- La direction d'un vecteur $\vec{u}$ non nul est l'ensemble des droites parallèles (AB) où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
- Deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$(non nuls) dont les directions sont orthogonales sont dits orthogonaux. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exemples

- Si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$ signifie que OMN est un triangle rectangle en O.
- Lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{PR}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{RS}$.

  L'orthogonalité de $\vec{u}$et $\vec{v}$ se traduit par « les droites (PQ) et (RS) sont orthogonales ».

Ainsi, avec un parallélépipède rectangle ABCDEFGH, nous avons $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$; $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{GF} \perp \overrightarrow{GH}$.



SEQUENCE 54

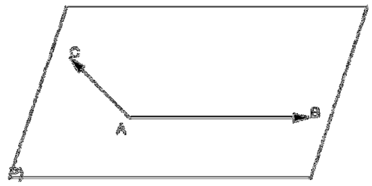
Parallélisme de l'espace

Objectif

Déterminer un couple de vecteurs directeurs d'un plan et des vecteurs coplanaires

Couple de vecteurs directeurs d'un plan

Pour définir un plan, il suffit de choisir 3 de ses points non alignés.



A ces points A, B et C, un point associe les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On dit que le couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan.

De manière générale, dire que deux vecteurs non colinéaires $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{EF}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (P) signifie que chacune des droites (CD) et (EF) est parallèle à (P).

Ainsi, on peut définir le plan (P) en choisissant l'un de ses points, A par exemple et un couple de vecteur $(\vec{u}, \vec{v})$ et on note ce plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

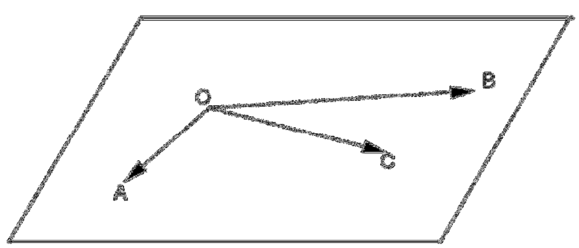
A est un point de $(\mathcal{E})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non colinéaires.

Vecteurs coplanaires

Définition

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$, O un point quelconque de $(\mathcal{E})$ et A, B, C les points définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

On dit que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque les points O, A, B et C sont dans un même plan.



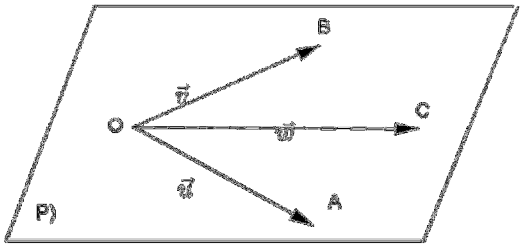
Remarque

- Deux vecteurs sont toujours coplanaires ; il existe toujours un plan contenant 3 points.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, quel que soit le vecteur $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Théorème

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et $\vec{w}$, un vecteur quelconque.

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels* x *et* y *tels que* $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.



$$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$$
$$= x\vec{u} + y\vec{v}$$

Méthode

Pour démontrer que trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont coplanaires, on peut démontrer :

- que deux d'entre eux sont colinéaires
- ou bien si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, par exemple, ne sont pas colinéaires, que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

SEQUENCE 55

Interprétation vectorielle du parallélisme de l'espace

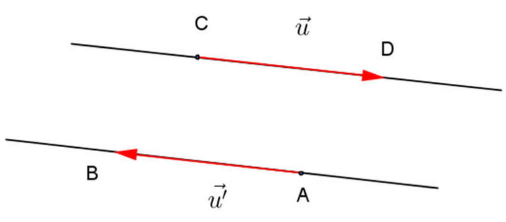
Objectif

Interpréter vectoriellement le parallélisme dans l'espace

Parallélisme deux droites

Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire qu'un vecteur directeur de l'une est un vecteur directeur de l'autre.

Pour démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, on peut démontrer que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ (k étant un nombre réel).



Parallélisme d'une droite et d'un plan

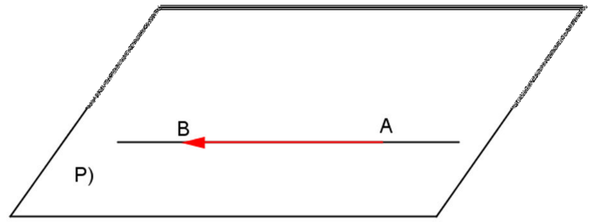
Pour démontrer que la droite (D) est parallèle au plan (P), on peut démontrer que le plan (P) contient deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).

Si l'on connait un couple de vecteurs directeurs de (P), $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit

$\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{w}$.

Démontrer que (D) est parallèle à (P) revient donc à démontrer que l'on peut écrire :

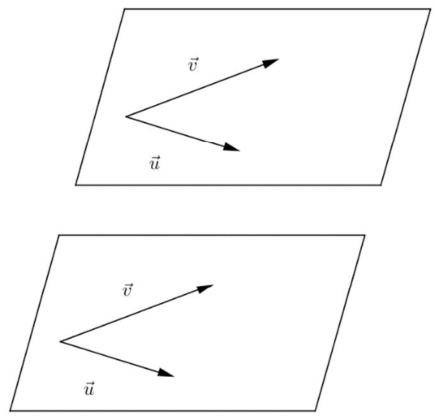
$\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{w}$, avec a et b des réels.



Parallélisme de deux plans

Pour démontrer que deux plans sont parallèles, on peut démontrer qu'un couple de vecteurs directeurs de l'un des plans est un couple de vecteurs directeurs de l'autre plan.

Réciproquement, si l'on sait que deux plans sont parallèles, on peut dire que tout couple de vecteurs directeurs de l'un est un couple de vecteurs directeurs de l'autre.



SEQUENCE 56

Repérage d'un point de l'espace

Objectif

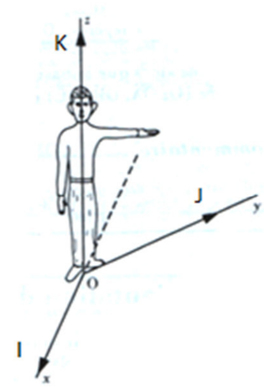
Orienter l'espace

Orientation de l'espace : Règle du bonhomme d'Ampère

(O, I, J, K) est un repère de l'espace.

Un « observateur d'Ampère » pour ce repère, est un personnage placé le long de (OK), les pieds en O, la tête en K fixant le point I.

Si J est à gauche de l'observateur comme l'indique la figure ci-contre, on dit que le repère (O, I, J, K) est direct si J se tourne à sa droite, le repère est dit indirect.

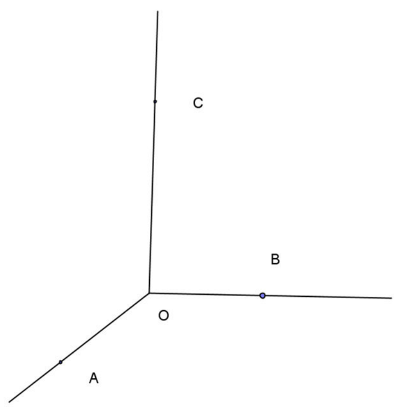


Remarque

L'ordre dans lequel sont donnés les points (ou les vecteurs) est fondamental pour la détermination du sens du repère.

Orienter un espace , c'est décider de distinguer deux types de repères : le repère direct et le repère indirect.

Exercice



Détermine l'orientation des repères suivants:

$(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$; $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$;

(O, C, A, B); (O, B, C, A) et (O, C, B, A).

Remarque

Dans la suite de la leçon, sauf indication contraire, tout repère de l'espace donné sera considéré comme direct.

SEQUENCE 57

Coordonnées d'un point de l'espace

Objectif

Déterminer les coordonnées d'un point de l'espace

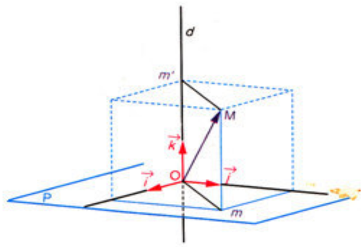
O est un point de l'espace, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.

Soit m le point projeté de M sur le plan de repère $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ parallèlement à $(o, \vec{k})$ et m' le point projeté de M sur $(o, \vec{k})$ parallèlement au plan de repère $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM}$

$= \overrightarrow{om} + \overrightarrow{om'}$

$= x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ car m est dans le plan $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.



$m' \in (o, \vec{k})$ donc il existe z réel tel que $\overrightarrow{om'} = z\vec{k}$.

Finalement $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

On admet que le triplet (x, y, z) est unique.

Théorème

$(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est un repère de l'espace.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels

tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

On dit que (x, y, z) est le triplet de coordonnées de point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

On note M(x, y, z) ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- x est l'abscisse de M
- y est l'ordonnée de M
- z est la côte de M.

Exercice

Place les points suivants dans le repère $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$:

A $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

SEQUENCE 59

Barycentre de points pondérés dans l'espace

Objectif

Déterminer le barycentre de points dans l'espace

Théorème et définition

Soit A, B, C trois points α, β *et* γ *trois réels tels que* $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Il existe un unique point G *tel que* $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ *et pour tout point* M *de l'espace* $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$.

Ce point G est appelé barycentre des points pondérés (A, α) ; (B, β) *et* (C, γ).

Propriété

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *est un repère de l'espace, A, B et C sont trois points de l'espace de coordonnés respectives* $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix}$, α, β *et* γ *trois réels.*

Les coordonnés de G, barycentre des points pondérés (A, α) ; (B, β) *et* (C, γ) *sont*

$$G\begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{\alpha y_A + \beta B_A + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{pmatrix}.$$

Leçon : Etude analytique des droites, cercles et plans

SEQUENCE 60

Equation cartésienne d'une droite dans le plan

Objectif

Déterminer l'équation cartésienne d'une droite

Propriété

Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *du plan, toute droite admet une équation cartésienne de la forme* $ax + by + c = 0$; a *et* b *étant deux réels dont l'un au moins n'est pas nul.*

Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ (a *et* b *réels non nuls) est celle d'une droite de vecteur normal* $\binom{a}{b}$.

Exemple

Soit $(\mathcal{D})$ une droite d'équation de la forme $3x - y + 1 = 0$.

On se propose de déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par A $\binom{-1}{2}$ et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$.

(Δ) étant perpendiculaire à $(\mathcal{D})$, tout vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est un vecteur normal à (Δ). Donc $\vec{u}\binom{1}{3}$ est normal à (Δ).

Le point $M\binom{x}{y} \in (\mathcal{D}) \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow x + 1 + 3(y - 2) = 0$

Soit $x + 3y - 5 = 0$.

$(\Delta) : x + 3y - 5 = 0$.

Remarque

Tout vecteur normal à $(\mathcal{D})$ dirige (Δ) donc $\vec{n}\binom{3}{1}$ dirige (Δ)

et $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\Delta) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{n}) = 0$ et on retrouve la même équation.

Exercice

Soit $A\binom{3}{1}$ et $B\binom{-5}{3}$.

Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].

SEQUENCE 61

Représentation paramétrique d'une droite dans le plan

Objectif

Donner une représentation paramétrique d'une droite dans le plan

Représentation paramétrique

Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{a}{b}$.

On se propose de déterminer une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$.

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$$

On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\binom{a}{b}$

$$\overrightarrow{AM} = t.\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Propriété

La représentation paramétrique d'une droite passant par un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{a}{b}$ est :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Exemple

Déterminer une représentation paramétrique d'une droite (L) de vecteur normal $\vec{n}\binom{-3}{2}$ passant par $A\binom{1}{1}$.

SEQUENCE 62

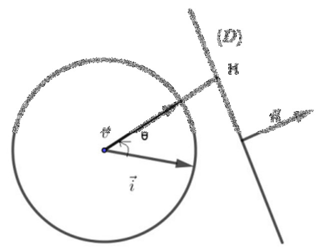
Equation normale d'une droite dans le plan

Objectif

Donner une équation normale d'une droite dans le plan

Equation normale d'une droite

Le plan étant rapporté à un repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $(\mathcal{D})$ une droite et θ, une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{\imath},\vec{n})}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{D})$.



Considérons le vecteur $\vec{v}=\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$, $\vec{v}$ est unitaire et colinéaire à $\vec{n}$ donc $\vec{v}\binom{Cos\theta}{Sin\theta}$.

$\vec{v}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{D})$ donc $(\mathcal{D})$:$(Cos\theta)x+(Sin\theta)y+c=0$.($c$ étant un réel à déterminer).

Propriété

Le plan étant rapporté à un repere$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $(\mathcal{D})$ une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathcal{D})$ et θ une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{\imath},\vec{n})}$.

$(\mathcal{D})$ admet une équation cartésienne de la forme $(Cos\theta)x+(Sin\theta)y+c=0$. ($c$ étant un réel).

Cette équation est appelée équation normale de $(\mathcal{D})$.

Exemple

Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par A$\binom{-1}{2}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{\sqrt{3}}$.

$\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire normal à $(\mathcal{D})$.

$(\mathcal{D})$ admet donc pour équation normale $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+c=0$.

Et comme A$\binom{-1}{2}\in(\mathcal{D})$ alors $\frac{1}{2}\times(-1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2+c=0$.

$$c=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$$

D'où $(\mathcal{D})$ a pour d'équation $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}-\sqrt{3}=0$.

Méthode

Etant donnée une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Pour trouver son équation normale, il suffit de diviser membre à membre par $\sqrt{a^2 + b^2}$, on obtient une équation normale :

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$

SEQUENCE 63

Distance d'un point à une droite dans le plan

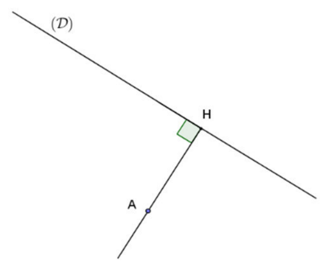
Objectif

Déterminer la distance d'un point à une droite dans le plan

Définition

Soit $(\mathcal{D})$ une droite, A un point du plan et H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

AH est appelé distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$.



Propriété

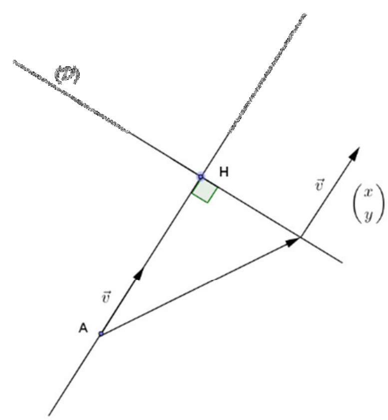
Soit A $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point du plan et $(\mathcal{D})$ une droite d'équation normale $(cos\theta)x + (sin\theta)y + c = 0$.

On a d(A,$\mathcal{D}$) $= |x_0 cos\theta + y_0 sin\theta + c|$

Démonstration

Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$ et M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point quelconque de $(\mathcal{D})$.

$\vec{v}\begin{pmatrix} cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire normal à $(\mathcal{D})$.



On a $\overrightarrow{AH}.\vec{v} = AH \times \|\vec{v}\| cos\left(\widehat{\overrightarrow{AH}, \vec{v}}\right)$

$\overrightarrow{AH}.\vec{v} = AH$ car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $\|\vec{v}\| = 1$.

Soit $AH = |\overrightarrow{AH}.\vec{v}| = |(x - x_0)cos\theta + (y - y_0)\sin\theta|$

$|(cos\theta)x + (\sin\theta)y - x_0 cos\theta - y_0 \sin\theta|$

Or $M \in (\mathcal{D})$ donc $(cos\theta)x + (\sin\theta)y + c = 0$

Donc $AH = |-x_0 cos\theta - y_0 \sin\theta - c| = |x_0 cos\theta + \sin\theta + c|$.

Remarque

Le nombre $|c|$ désigne $d(O,\mathcal{D})$ (O étant l'origine du repère).

Propriété

Soit $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *un point et* $(\mathcal{D})$ *une droite d'équation cartésienne* $ax + by + c = 0$.

On a $d(A,\mathcal{D}) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercices

1) Déterminer une équation normale de la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A\binom{2}{1}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{12}{-5}$.
2) Déterminer la distance du point $B\binom{5}{3}$ à la droite $(\mathcal{D})$.

SEQUENCE 64

Equation cartésienne d'un cercle dans le plan

Objectif

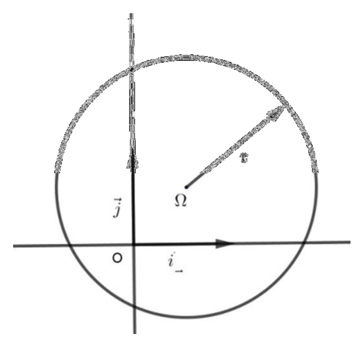
Déterminer une équation cartésienne d'un cercle dans le plan

Cercle défini par son centre et son rayon

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre $\Omega\binom{a}{b}$ et de rayon r.

$$\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega\mathrm{M} = r$$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$.



Cercle défini par un diamètre

Soit A et B deux points distincts du plan et $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre [AB].

$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$.

Exemple

Dans le plan muni du repère orthonormal $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne $\mathrm{A}\binom{2}{3}$ et $\mathrm{B}\binom{2}{5}$.

a) Déterminer une équation cartésienne du cercle passant par B et de centre A.
b) Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB].

SEQUENCE 65

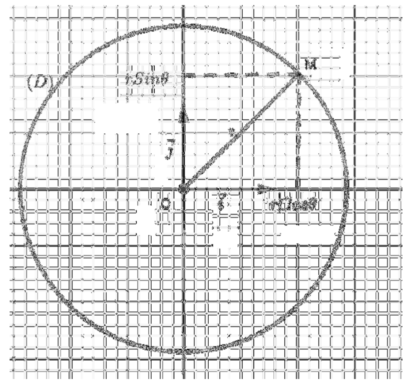
Représentation paramétrique du cercle de centre O, origine du repère

Objectif

Donner une représentation paramétrique du cercle de centre O, origine du repère

Cercle de centre O, origine du repère

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle centré en O et de rayon r .



$$\mathrm{M}\binom{x}{y} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathrm{OM} = r$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, cos\theta = \frac{x}{r} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, x = rcos\theta \text{ et } \mathrm{y} = r\mathrm{Sin}\theta$$

Propriété

La représentation paramétrique d'un cercle de centre O et de rayon r est :

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases} \ (\theta \in \mathbb{R}).$$

Exemple

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 9$.

Sa représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 3cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$

SEQUENCE 66

Représentation paramétrique du cercle de centre quelconque

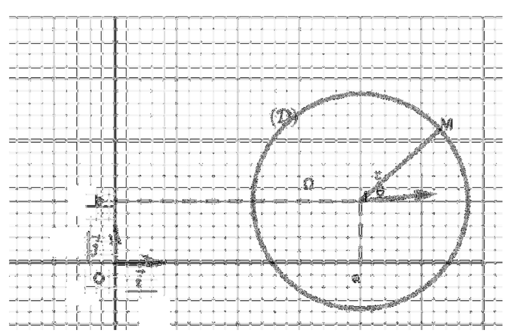
Objectif

Donner une représentation paramétrique du cercle de centre quelconque

Cercle de centre quelconque

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre $\Omega\binom{a}{b}$ et de rayon r.

On sait que son équation est :



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{x-a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, cos\theta = \frac{x-a}{r} \text{ et } \sin\theta = \frac{y-b}{r}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta + a \\ y = r\sin\theta + b \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$$

Propriété

La représentation paramétrique d'un cercle de centre $\Omega\binom{a}{b}$ et de rayon r est :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + a \\ y = r\sin\theta + b \end{cases} (\theta \in \mathbb{R}).$$

Exemples

1) Déterminer une représentation paramétrique du cercle de diamètre [AB] avec $A\binom{-2}{3}$ et $B\binom{5}{1}$.

2) Déterminer une équation cartésienne de cercle d'équation $\begin{cases} x = 2\cos\theta + a \\ y = 2\sin\theta + b \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$.

SEQUENCE 67

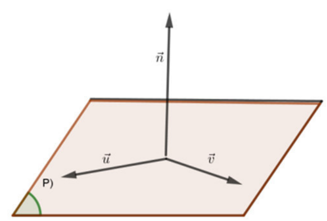
Etude dans l'espace : plans de l'espace

Objectif

Définir un vecteur normal à un plan et utiliser ses propriétés

NB : Les calculs dans l'espace se font de la même façon dans le plan, notamment le calcul de coordonnées de vecteurs, de distance entre deux points, du produit scalaire dans une base orthonormée

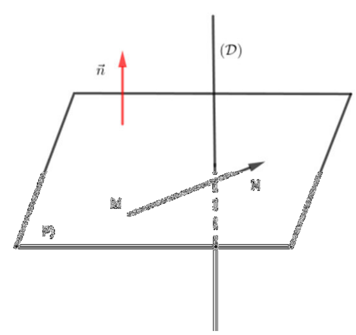
Définition



Soit (P) un plan de l'espace, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On appelle vecteur normal à (P) tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Remarque



- Si $\vec{n}$ est normal à (P), il est un vecteur directeur de toute droite $(\mathcal{D})$ orthogonale à (P).
- Si $\vec{n}$ est normal à (P), pour tous points M et N de (P), $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$.
- Un plan possède une infinité de vecteurs normaux tous colinéaires.

Propriété 1

Si A est un point de l'espace et $\vec{n}$, un vecteur non nul, il existe un et un seul plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriété 2

Soit (P) un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal à (P) et A un point de (P).

Pour tout point M de l'espace, $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$

SEQUENCE 68

Equation cartésienne d'un plan de l'espace

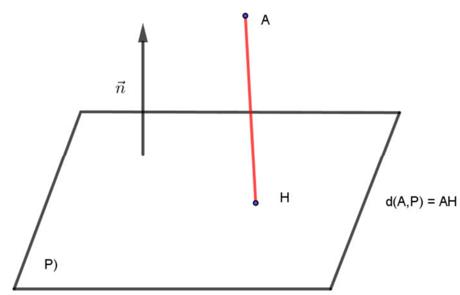
Objectif

Déterminer une équation cartésienne d'un plan de l'espace

Equation cartésienne d'un plan de l'espace

Soit (P) un plan passant par A$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal

$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.



$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Propriété

Soit a, b, c des réels tous non nuls.

- *Tout plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme :*

  $ax + by + cz + d = 0.$
- *Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.*

SEQUENCE 69

Distance d'un point à un plan de l'espace et représentation paramétrique

Objectifs

- Déterminer la distance d'un point à un plan de l'espace ;
- donner une représentation paramétrique d'un plan de l'espace

Distance d'un point à un plan de l'espace

Propriété

Comme établi dans le plan, la distance d'un point $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *à un plan (P) de l'espace d'équation cartésienne* $ax + by + cz + d = 0$ *est* $d(A, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exemple

(P) est le plan passant $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

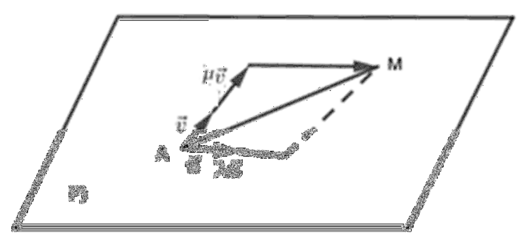
a) Déterminer une équation cartésienne de (P)

b) Déterminer la distance du point $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ au plan (P).

Représentation paramétrique d'un plan de l'espace

On sait qu'un plan (P) est défini par un point et deux vecteurs directeurs.

$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$



Alors : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \; ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2) \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$ est une représentation paramétrique du plan P.

Propriété

La représentation paramétrique d'un plan passant par $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *et de vecteurs directeurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ *est :* $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \; ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2). \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$

Exercice

Soit A$\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$,$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont les vecteurs définis par :

$\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{w} = \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

2) Déterminer une représentation paramétrique du plan $(A, \vec{v}, \vec{w})$.

SEQUENCE 70

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Objectif

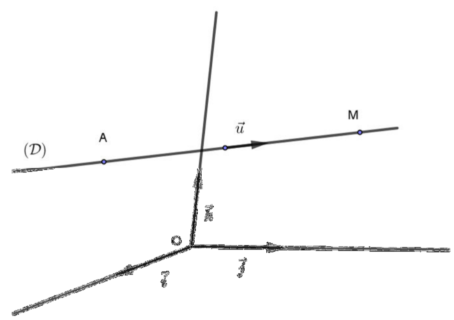
Donner une représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit A$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ un point de l'espace

Et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur directeur d'une droite $(\mathcal{D})$.

M$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$



Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + tc \end{cases}$

Propriété

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, une représentation paramétrique d'une droite $(\mathcal{D})$ passant par A$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$est :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

Remarque

Comme le choix du vecteur n'est pas unique, une droite peut avoir plusieurs représentations paramétriques.

SEQUENCE 71

Détermination d'une droite à partir de deux plans

Objectif

Déterminer une droite à partir de deux plans

Exemple

(P) et (Q) sont les plans d'équation respectives.

$x + y - 2z + 1 = 0$ et $x - y - z + 4 = 0$

Montrons qu'il existe une droite intersection de ces deux plans. Si un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à une telle droite alors,

$$\begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ x - y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

On résout ce système

$$\begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \ (1) \\ x - y - z + 4 = 0 \ (2) \end{cases}$$

$$\overline{\quad 2x - 3z + 5 = 0 \quad}$$

$$x = \frac{3}{2}z - \frac{5}{2}$$

Donne $y = x - z + 4$

$= \frac{3}{2}z - \frac{5}{2} - z + 4$

$y = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}$.

Posons $z = \lambda$

On a $\begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda - \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ est une équation de la droite intersection de (P) et (Q).

Remarque

On peut poser comme paramètre $x = \lambda$ pour trouver $y \ et \ z$ en fonction de λ ou poser comme paramètre $y = \lambda$ pour trouver $x \ et \ z$ en fonction de λ.

Dans tous les cas, les représentations paramétriques qu'on trouve sont équivalentes.

Exercice

On donne le système (S) suivant : $\begin{cases} x + 2y + 5z + 6 = 0 \\ y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$

a) Montrer que l'ensemble solution du système (S) est l'ensemble des triplets de la forme $\{(-2+\lambda\,;\ -2-3\lambda\,;\ \lambda)\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

b) Pour les valeurs suivantes de λ, place les points correspondants dans le plan muni du repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et vérifier que ces points sont alignés :

$\lambda = 1$; $\lambda = 0$ et $\lambda = -2$.

SEQUENCE 72

Orthogonalité dans l'espace

Objectif

Déterminer des droites orthogonales dans l'espace

Orthogonalité de deux droites

Définition

On dit que deux droites (Δ) *et* (Δ') *de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont orthogonales dans le plan qu'elles déterminent.*

Théorème

Deux droites de vecteurs directeurs respectives $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonales si et seulement si* $\vec{u}\,.\vec{v} = 0$

Orthogonalité d'une droite et d'un plan de l'espace

Définition

On dit qu'une droite (Δ) *et un plan (P) sont orthogonaux lorsque* (Δ) *est orthogonale à toute droite de (P).*

SEQUENCE 73

Parallélisme de deux plans de l'espace

Objectif

Déterminer des plans parallèles dans l'espace

Propriété

Deux plans (P) et (P') d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ *et* $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ *sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux respectifs* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ *sont colinéaires ; c'es-à-dire :*

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = \lambda a' \\ b = \lambda b' \\ b = \lambda c' \end{cases}$$

Exercice

(P), (Q) et (R) sont les plans définis par :

(P) :$x - y + z + 2 = 0$ (Q) : $2x + y - z = 0$ et (R) :$-4x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Vérifier que (P) et (Q) sont orthogonaux et que (Q) et (R) sont parallèles.

Exercices d'entrainement de la compétence de base 1 du premier trimestre

Exercice 1

On donne $f(x) = -|x|$ et $g(x) = \frac{-x^2}{|x|}$

1) f et g sont- elle égales?
2) Déterminer la plus grande partie E de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g ont la même restriction.

Exercice 2

On donne la fonction $f(x) = \frac{3x^2-2x-1}{x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Déterminer une application affine ayant même restriction que f à D_f.

Exercice 3

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les fonctions $2f - 3g$; $f \times g$ et $\frac{f}{g}$.

1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$;
2) $f(x) = \frac{-4x}{x^2-4}$ et $g(x) = \frac{x(x-2)}{x+2}$;
3) $f(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ et $g(x) = \frac{x-\frac{1}{x}}{x^2+\frac{1}{x}}$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J). Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$ et (C_f), sa courbe représentative.

1) Démontrer que pour tout x reel, $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
2) En déduire que (C_f) est l'image de lla paraboled'équation y $= x^2$ par une transformation simple que l'on déterminera. Construire (C_f).
3) On considère les fonctions f_1; f_2; f_3 et f_4 définies par $f_1(x) = f(-x)$; $f_2(x) = -f(-x)$; $f_3(x) = |f(x)|$ et $f_4(x) = f(x+1) + 2$. Construire les courbes représentatives de chacune des fonctions f_1; f_2; f_3 et f_4.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J). Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$ et (C_f), sa courbe représentative.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de D_f,

   $f(x) = \frac{a}{x-3} + b$.
3) En déduire que (C_f) est une hyperbole dont on déterminera le centre.

   Construire (C_f).

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J).

Dans chacun des cas suivants, tracer la courbe représentative de la fonction f et en déduire la courbe représentative de la fonction g.

1) $f(x) = -3x^2$ et $g(x) = -3x^2 + 2x + 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{2x}$ et $g(x) = \frac{3-4x}{2x-1}$;
3) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3 - \sqrt{2-x}$.

Exercice 7

f est la fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+3}$.

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel,

   $f(x) = \frac{a}{x^2+3} + b$.
2) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

f est la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$.

Démontrer que $\forall\ x \in\ ]1; +\infty[$, $f(x) > \sqrt{x} + 1$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 9

f étant une fonction donnée, calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

1) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7$;
2) $f(x) = -x^4 - 3x^2 + x$;
3) $f(x) = \frac{4+3x}{-x+3}$;

4) $f(x) = \frac{4+3x}{-x+3}$;

5) $f(x) = \frac{x^2- 2x+3}{-x+3}$;

6) $f(x) = \frac{x^3- 2x+3}{-2x+1}$;

7) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+2}}{3x-2}$;

8) $f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}$;

9) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$;

10) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$.

Exercice 10

f étant une fonction donnée, calculer la limite de f en x_0(éventuellement à gauche ou à droite de x_0) :

1) $f(x) = \frac{5}{(x-1)^2}$; $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$; $x_0 = -3$;

3) $f(x) = \frac{5}{(x-1)^2}$; $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$; $x_0 = 1$;

5) $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; $x_0 = 9$;

6) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; $x_0 = 2$;

7) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}- 8}{4-x}$; $x_0 = 4$;

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite en 0 de la fonction f:

1) $f(x) = \frac{x}{sinx}$;

2) $f(x) = \frac{tanx}{x}$;

3) $f(x) = \frac{sinx}{x} + tanx$;

4) $f(x) = \frac{sin3x}{2x}$;

5) $f(x) = \frac{tan3x}{5x}$;

6) $f(x) = \frac{sin5x}{sin3x}$;

7) $f(x) = \frac{sin3x}{xcosx}$;

8) $f(x) = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}}{x}$.

Exercice 12

f étant une fonction donnée, étudier la continuité de f en x_0 :

1) $f(x) = x^2 - 3x + 5$ et $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \sqrt{9 - x}$ et $x_0 = 9$;

3) $f(x) = \frac{3x^2-5x-7}{8x^3-5x+3}$ et $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ et $x_0 = -3$.

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants,

- calcule le nombre dérivé de la fonction f *en* x_0;
- donne une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f.

a) $f: x \longmapsto x$, $x_0=1$ *c)* $f: x \longmapsto 2\sqrt{x} - 1$ $x_0=3$

b) $f: x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$, $x_0=2$

Exercices 14

Dans chacun des cas suivants, justifie que f est dérivable sur ℝ et dresse son tableau de variation :

a) $f(x)=x^3-3x$;

b) $f(x)=2x^3+5x^2+6$;

c) $f(x)=x^2(x-1)^3$;

d) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$;

e) $f(x)=x^4-4x$;

f) $f(x)=1-x^3-x^5$;

g) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$;

h) $f(x)=\frac{-3}{x^2+x+1}$.

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, étudie les variations de f sur l'intervalle I indiqué :

a) $f(x)=x+\frac{16}{x}$; $I=\left]0,+\infty\right[$;

b) $f(x)=x+\frac{16}{x}$; $I=]0,+\infty[$;

c) $f(x)=x(1-x)$; $I=\mathbb{R}$

d) $f(x)=3-\cos^2 x$; $I=[0,\pi]$;

e) $f(x)=2\sin x-\sin 2x$; $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

f) $f(x)=\frac{3x-5}{x+1}$ $I=]-1,+\infty[$;

g) $f(x)=2x-1+\frac{3}{x+1}$; $I=]-2,+\infty[$;

h) $f(x)=x-4\sqrt{x}$; $I=]0,+\infty[$;

i) $f(x)=\sqrt{x}(x-1)$; $I=]0,+\infty[$;

j) $f(x)=(x^2-1)^2$; $I=\mathbb{R}$;

k) $f(x)=(x^2-3x+4)^2$; $I=\mathbb{R}$.

Exercice 16

Dans chacun des cas suivants :

- Précise l'ensemble de dérivabilité de la fonction f;
- Détermine la dérivée de f et étudie son signe ;
- Dresse le tableau de variation de f.

a) $f(x)=x^2+x$;

b) $f(x)=x^3+3x^2+1$;

c) $f(x)=\frac{2x+5}{2-x}$;

d) $f(x)=\frac{4x^2-11x-2}{x-3}$;

e) $f(x)=\sqrt{2-3x}$

f) $f(x)=x-\sqrt{x}$

Exercices d'entrainement de la compétence de base 2 du premier trimestre

Exercice 1

Soient f une application d'un ensemble E vers un ensemble F, et g une application de F vers un ensemble G. Montrer que :

a) si $g\circ f$ est injective, alors f est injective ;

b) si $g\circ f$ est surjective, alors g est surjective ;

c) si $g\circ f$ est injective et f injective, alors g est injective ;

d) si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective

e) si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f est injective :

a) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$; *b)* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; *c)* $f : \mathbb{R}\mathbf{x}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x - 3$ $\quad$ $x \mapsto 2x^2+1$ $\quad$ $(x, y) \mapsto x + y$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f est surjective :

a) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$; *b)* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$; *c)* $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$;

$x \mapsto 2|x|$ $\quad$ $x \mapsto 2x^2+1$ $\quad$ $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, démontre que l'application f est bijective et détermine sa bijection réciproque.

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; *b)* $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x \mapsto 5 - 3x$ $\quad$ $x \mapsto \frac{4x-1}{2x-4}$.

b) $f : \mathbb{R}\mathbf{x}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{x}\mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto (x - 2y; x + 3y)$

Exercice 5

Etudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^2 - 11x + 10$
2. $f(x) = -3x^2 + 4x + 4$
3. $f(x) = -3x^2 + x - 2$
4. $f(x) = -9x^2 + 12x - 4$
5. $f(x) = \frac{x^2+4x-21}{-2x^2+9x+5}$
6. $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{6x^2-23x+7}$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\left(2x^2 - 2x\sqrt{5} + 1\right)(-2x^2 - 9x + 5) > 0$
2. $(2x - 3)^2 - (2x - 3)(x^2 + x + 1) \quad \leq 0$
3. $(3x + 2)^2 < (x^2 + 5x + 2)^2$
4. $(3x^2 - x + 1)^2 \geq (2x^2 + 9x - 4)^2$
5. $\frac{x^2-6x-7}{5-2x} \leq 0$
6. $\frac{x^2+2x-15}{-x^2+2x+5} > 0$
7. $\frac{3x^2-6x+4}{2x^2-x-1} > 0$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\sqrt{3x^2 - 11x - 21} = 2x - 3$
2. $2x + 1 + \sqrt{-7x - 5} = 7$
3. $\sqrt{x + 2} + \sqrt{3x - 5} = 7$
4. $\sqrt{2x + 5} - \sqrt{x - 4} = 1$
5. $\sqrt{5x + 9} - \sqrt{x - 4} = \sqrt{3x + 1}$
6. $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{4x^3 - 3x^2 - 32x + 28}$
7. $\sqrt{2x^2 - x + m} = x - 1 \quad m \in \mathbb{R}$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x^2 - 3xy + y - 7x = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 - xy = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy^2 + x^2y = -30 \\ xy + x + y - 7x = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3y = 9 \\ 3x^2 + 3y^2 - x + 5y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 10y = -21 \\ 2x^2 - x - y = -3 \end{cases}$$

Exercice 9

Résoudre chacun des systèmes suivants:

a) $\begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7 \end{cases}$; c) $\begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 2x + 9y + 5z = 0 \end{cases}$.

Exercice 10

Résoudre chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7 \end{cases}$

Exercices d'entrainement de la compétence de base 1 du premier trimestre

Exercice 1

A et B sont deux points du plan.

Construire le point G, barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, 3).

Construire le point G', barycentre des points pondérés (A, – 1) et (B, 3).

Exercice 2

Sur la figure suivante, placer le barycentre des points pondérés (A, 3) et (B, 2) puis celui des points pondérés (A, – 1) et (B, 13).

Exercice 3

A, B, C et D sont quatre points tels que D est l'isobarycentre des points A, B et C.

Ecrire A comme barycentre des points B, C et D.

Exercice 4

ABC est un triangle.

1) En utilisant la définition du barycentre, construire le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, – 1) et (C, 2).
2) En utilisant le théorème des barycentres partiels, construire le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 3).

Exercice 5

ABCD est un parallélogramme.

1) Construire, en utilisant le théorème des barycentres partiels, les points G et G' définis par: G = bar $\{(A, -1); (B, 4); (C, 1); (D, 2)\}$ et

$G' = \text{bar}\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,4)\}$.

2) Le plan étant muni d'un repère (A, B, C), calculer les coordonnées des points G et G'.

Exercice 6

A et B étant deux points distincts du plan, construire l'ensemble (E) des points M tels que :

a) $MA^2 - MB^2 = AB^2$

b) $MA^2 - MB^2 = 2AB^2$.

c) $MA\sqrt{2} = MB$.

Exercice 7

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère orthogonal de l'espace.

On considère les points A(1, 0, 2) B(–1, 1, 4) et C(5, –1, 3).

a) Calcule les coordonnées de D tel que ABCD soit soit un parallélogramme. Puis calcule les coordonnées du centre I de ce parallélogramme.

b) E est un point d'abscisse 3. Comment choisir les autres coordonnées de E pour que la droite (OE) soit parallèle à la droite (AB).

c) F est le oint de coordonnées (3, 10,-2) ? Démontre que la droite (OF) est perpendiculaire au plan (ABC).

Exercice 8

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est une base directe de l'espace.

On considère les vecteurs $\vec{u}(-2, 3, -1)$ $\vec{v}(1, -1, -2)$ et $\vec{w}(4, -2, -18)$.

a. Existe-t-il des réels a,b et c tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$?

b. Déduis-en que le point M (5, –1,–14) appartient au plan qui passe par A (1, 1, 4) et qui admet $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme vecteurs directeurs.

Exercice 9

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est une base directe de l'espace.

Dans chacun des cas suivants, vérifie si $\vec{u}\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires :

a) $\vec{u}(-2, -1, 1)$ $\vec{v}(1, -1, -2)$ et $\vec{w}(-3, 1, -1)$.

b) $\vec{u}(1, 0, 3)$ $\vec{v}(-1, -1, -4)$ et $\vec{w}(8, -2, 5)$.

c) $\vec{u}(1, 0, 4)$ $\vec{v}(3, -2, 5)$ et $\vec{w}(1, 1, 1)$.

Exercice 10

a) A quelle condition trois vecteurs $\vec{u},$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base de vecteurs de l'espace ?

b) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}(0, -1, 1)\vec{v}(-2, -1, 3)$ et $\vec{w}(-1,-1, -1)$ forment une base.

Exercice 11

OABC est un tétraèdre.

a) Place le point R tel que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$;

b) Place le point S tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

c) On note G le centre de gravité du triangle ABC.

Quel est le vecteur $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$?

Déduis-en que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

d) Déduis de l'égalité précédente que les points O, G et S sont alignés.

Exercice 12

a) Soit $A\binom{3}{1}$ et $B\binom{-5}{3}$. Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB]

b) Déterminer une représentation paramétrique d'une droite (L) de vecteur normal $\vec{n}\binom{-3}{2}$ passant par $A\binom{1}{1}$.

Exercice 13

3) Déterminer une équation normale de la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A\binom{2}{1}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{12}{-5}$.

4) Déterminer la distance du point $B\binom{5}{3}$ à la distance $(\mathcal{D})$.

Exercice 14

Dans le plan muni du repère orthonormal $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne $\mathrm{A}\binom{2}{3}$ et $\mathrm{B}\binom{2}{5}$.

c) Déterminer une équation cartésienne du cercle passant par B et de centre A.

d) Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB].

Exercice 15

1) Déterminer une représentation paramétrique du cercle de diamètre [AB] avec $\mathrm{A}\binom{-2}{3}$ et $\mathrm{B}\binom{5}{1}$.

2) Déterminer une équation cartésienne de cercle d'équation $\begin{cases} x = 2cos\theta + a \\ y = 2\sin\theta + b \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

Exercice 16

(P) est le plan passant A$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une équation cartésienne de (P)

b) Déterminer la distance du point B$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ au plan (P).

Evaluation

Exercice 1

On donne $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

a) Précise l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

b) Détermine la dérivée de f et étudie son signe .

c) Dresse le tableau de variation de *f.*

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7 \end{cases}$$

Exercice 3

I)

ABC est un triangle.

1) En utilisant la définition du barycentre, construire le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, – 1) et (C, 2).

2) En utilisant le théorème des barycentres partiels, construire le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 3).

II)

Soit A$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$,$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont les vecteurs définis par :

$\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{w} = \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

2) Déterminer une représentation paramétrique du plan $(A, \vec{v}, \vec{w})$.

Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice

- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………

Conseils et orientation de l'enseignant

- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………

Evaluation de la compétence

☐

☐

☐

Deuxième trimestre

Programmation horaire du 2e trimestre

2e Trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombres d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
Du 02 Janvier au 31 Mars 13 semaines	CB1	3	Trigonométrie et fonctions circulaires	9H	2H	2H	13H	65H
		4	Suites numériques	9H	2H	2H	13H	
	CB2	3	Lois de composition interne	5H	2H	2H	8H	
		4	Analyse combinatoire	6H	2H		9H	
	CB3	4	Angles	5H	2H	2H	7H	
		5	Homothétie	5H	1H		7H	
		6	Isométrie	5H	2H		8H	

FICHE DE PROGRESSION

Trimestre	Période	Contenus		
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité	CB3 : Géométrie
2	2 Janvier au 10 Février	- Trigonométrie et fonctions circulaires	- Lois de composition interne	- Angles - Homothétie
	11 Fevrier au 31Mars	- Suites numériques	- Analyse combinatoire	- Isométries

Deuxième trimestre

Compétence de Base 1

Première S/E–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre la trigonométrie et les fonctions circulaires et les suites numériques.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
– Trigonométrie et fonctions circulaires	– Placer sur le cercle trigonométrique les images des arcs remarquables. – Utiliser les formules d'addition et de multiplication. – Résoudre des équations et des inéquations trigonométriques. – Etudier la parité, la périodicité et déterminer l'ensemble d'étude des fonctions circulaires. – Calculer la dérivée des fonctions circulaires et étudier leurs signes.	– Repérage sur le cercle trigonométrique des images des arcs remarquables. – Utilisation des formules d'addition et de multiplication. – Résolution des équations et des inéquations trigonométriques. – Etude de la parité, de la périodicité et détermination de l'ensemble d'étude des fonctions circulaires. – Calcul de la dérivée des fonctions circulaires et étude de leurs signes.
– Suites numériques	- Définir une suite numérique. - Exprimer une suite numérique de façons diverses. - Représenter graphiquement les termes d'une suite numérique.	- Définition d'une suite numérique - Expression d'une suite numérique de façons diverses. - Représentation graphique des termes d'une suite numérique.

		- Etudier les suites numériques (minoration, majoration, croissance et convergence). - Etudier les suites arithmétiques et les suites géométriques. - Appliquer le principe du raisonnement par récurrence dans des situations simples.	- Etude des suites numériques (minoration, majoration, croissance et convergence). - Etude des suites arithmétiques et des suites géométriques. - Application du principe de raisonnement par récurrence dans des situations simples.

Compétence de Base 2

Première S/E–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les lois de composition interne et l'analyse combinatoire.			
	Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
	Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
	- Lois de composition interne - Analyse combinatoire	- Définir une loi de composition interne. - Etudier les propriétés des lois de composition interne (associativité, commutativité, élément neutre, éléments symétriques). - Définir un groupe. - Dénombrer un ensemble fini. - Déterminer la partition d'un ensemble fini. - Déterminer le cardinal du produit cartésien d'ensembles. - Déterminer le nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre (p-listes). - Déterminer le nombre d'arrangements, de combinaisons et de permutations des éléments d'un ensemble fini.	- Définition d'une loi de composition interne. - Etude des propriétés des lois de composition interne (associativité, commutativité, élément neutre, éléments symétriques). - Définition d'un groupe. - Dénombrement d'un ensemble fini. - Détermination de la partition d'un ensemble fini. - Détermination du cardinal du produit cartésien d'ensembles. - Détermination du nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre (p-listes). - Détermination du nombre : . d'arrangements, . de combinaisons,

			. et de permutations des éléments d’un ensemble fini.

Compétence de base 3

Première S/E–CB3 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les angles, les homothéties et les isométries.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
– Les angles	- Déterminer la mesure d'un angle orienté à partir d'un couple de vecteurs. - Etudier la congruence des angles orientés modulo 2π. - Déterminer la mesure principale des angles orientés. - Exploiter la relation de Chasles. - Déterminer la somme et le double d'angles orientés. - Reconnaitre un angle inscrit orienté. - Appliquer le théorème des angles inscrits orientés. - Démontrer que des points sont cocycliques.	- Détermination de la mesure d'un angle orienté à partir d'un couple de vecteurs. - Etude de la congruence des angles orientés modulo 2π. - Détermination de la mesure principale des angles orientés. - Exploitation de la relation de Chasles. - Détermination de la somme et du double d'angles orientés. - Reconnaissance d'un angle inscrit orienté. - Application du théorème des angles inscrits orientés. - Démonstration des points cocycliques.
– Homothétie	– Définir analytiquement une homothétie. – Déterminer les éléments caractéristiques d'une homothétie à partir de sa définition analytique. – Déterminer la réciproque d'une homothétie. – Déterminer la composée de deux homothéties de rapports non inverses. – Déterminer la composée d'une homothétie et d'une translation. – Résoudre un problème de construction, de lieu géométrique, de démonstration en utilisant une homothétie.	– Expression analytique d'une homothétie. – Détermination des éléments caractéristiques d'une homothétie à partir de sa définition analytique. – Détermination de la réciproque d'une homothétie. – Détermination de la composée de deux homothéties de rapports non inverses. – Détermination de la composée d'une homothétie et d'une translation. – Résolution d'un problème de construction, de lieu géométrique, de démonstration en utilisant une homothétie. – Définition d'une isométrie.

	– Isométries	– Définir une isométrie. – Composer, entre elles, deux symétries orthogonales et deux rotations puis déterminer leurs éléments caractéristiques. – Classifier des isométries connues comme déplacements ou antidéplacements. – Reconnaitre et démontrer que deux triangles sont isométriques. – Décomposer une rotation ou une translation en composée de deux symétries orthogonales. – Utiliser les isométries pour résoudre les problèmes de construction, de recherche de lieux géométriques ou d'étude de configurations.	– Composition, entre elles : . de deux symétries orthogonales, . de deux rotations en déterminant leurs éléments caractéristiques. – Classification des isométries connues comme déplacements ou antidéplacements. – Reconnaissance et démonstration de deux triangles isométriques. – Décomposition d'une rotation ou d'une translation en composée de deux symétries orthogonales. – Utilisation des isométries dans la résolution des problèmes de construction, de recherche de lieux géométriques ou d'étude de configurations.

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du deuxième trimestre

Leçon : Trigonométrie

SEQUENCE 1

Repérage sur le cercle trigonométrique

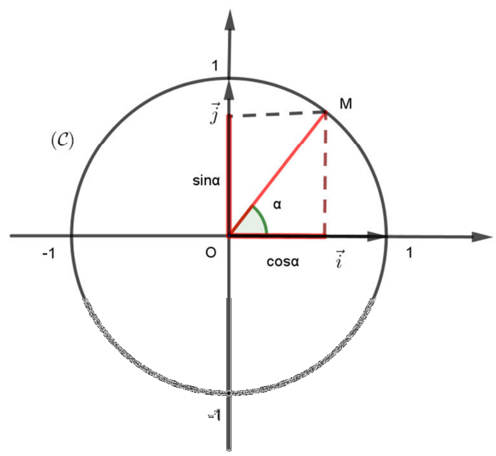
Objectif

Repérer un point sur le cercle trigonométrique

Coordonnées et propriétés

Définition

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *et M un point du cercle trigonométrique* $(\mathcal{C})$*, image du réel* $\alpha\left[\left(\vec{\imath},\overrightarrow{OA}\right) = \alpha[2\pi].\right]$



On appelle abscisse de M le cosinus de α *noté* $\cos\alpha$ *et ordonnée de M, le sinus de* α *noté* $\sin\alpha$

Le couple de réel $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ *est le couple de coordonnées du point M.*

On écrit : $\overrightarrow{OM} = \cos\alpha\vec{\imath} + \mathrm{Sin}\alpha\vec{\jmath}$ *.*

Propriétés

Pour tout réel x et pour tout entier naturel k*, on a :*

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ *et* $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

Exercices

1) Calcule la valeur de $\sin x$ sachant que x est un réel tel que $0 \leq x \leq \pi$ et $\cos x = \frac{1}{3}$.

2) Détermine la valeur de $\cos x$ sachant que x est un réel tel que $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

3) Trouve la valeur de $\sin x$ sachant que x est un réel tel que $\pi < 2 < 2\pi$

et $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) Quelle est la valeur de $\cos x$ sachant que x est un réel tel que $0 \leq x \leq \pi$

et $\sin x = \sqrt{3}$.

SEQUENCE 2

Valeurs remarquables et angles associés

Objectif

Déterminer quelques valeurs remarquables et établir des relations entre les angles associés

Valeurs remarquables

Les nombres trigonométriques ont des valeurs remarquables qui correspondent aux lignes trigonométriques usuelles des angles aigus.

On résume ces données dans un tableau présentant les valeurs des cosinus et des sinus de ces nombres :

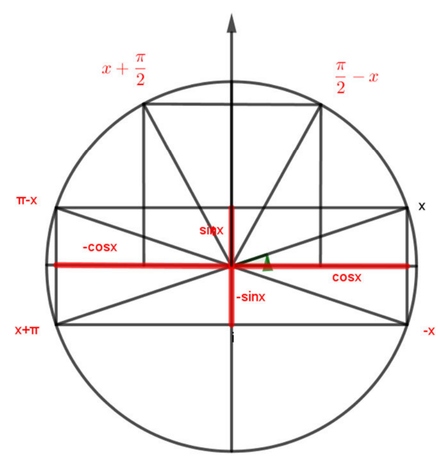
α en degré	0	30	45	60	90
α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Angles associés

Propriétés

Pour tout réel x :

- $cos(-x) = cosx \; et \, sin(-x) = -sinx.$
- $cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -sinx \; et \, sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cosx.$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sinx \; et \, sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx.$
- $cos(x + \pi) = -cosx \; et \, sin(x + \pi) = -sinx.$
- $cos(\pi - x) = -cosx \; et \, sin(\pi - x) = sinx.$



Remarques

1) Ces égalités se retrouvent aisément à partir du dessin. C'est pourquoi il faut savoir lire le dessin et reconnaitre les relations entre les angles par symétrie soit orthogonale par rapport aux axes soit centrale.

2) Les relations $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ et $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$ sont très importantes car elles permettent de transformer un cosinus en sinus ou un sinus en cosinus.

Exemples

1) Déterminons $\cos(-\frac{\pi}{6})$ et $\sin(-\frac{\pi}{6})$.

D'après les propriétés données $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ et $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

Or par lecture du tableau des valeurs remarquables on a :

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ donc $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

2) Calculons $\cos\frac{3\pi}{4}$ et $\sin\frac{3\pi}{4}$.

On peut décomposer $\frac{3\pi}{4}$ en la somme $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$.

On a donc $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$ or par lecture du tableau des valeurs remarquables, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $-\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

De même : $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

SEQUENCE 3

Repérage polaire d'un point du plan

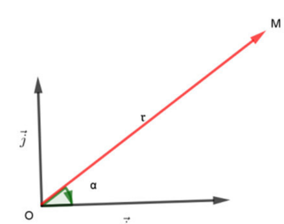
Objectifs

- Déterminer les coordonnées polaires d'un point ;
- établir les relations entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes d'un point

Coordonnées polaires d'un point

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2}$. *Pour tout M distinct de O, on appelle couple de coodonnées polaires du point M le couple de réels* (r,α) *où* $r = OM$ *et* $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{OM}\right) = \alpha$.



Relation entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes

Propriété

Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x,y) *et de coordonnées polaires* (r,α).

On a les trois égalités suivantes :

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $x = rcos\alpha \;\; ou\, cos\alpha = \frac{x}{r}$.
- $y = rsin\alpha \; ou\, sin\alpha = \frac{y}{r}$.

Exercices

1) Le point M du plan a pour coordonnées polaires $\left(3, \frac{3\pi}{3}\right)$.

Détermine ses coordonnées cartésiennes.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne le point N de coordonnées cartésiennes $(2, -2)$.

Quelles sont les coordonnées polaires du point M ?

SEQUENCE 4

Calculs trigonométriques

Objectif

Calculer en utilisant les formules trigonométriques d'addition et de duplication

Formules d'addition

Propriété

Pour tous réels a et b, on a :

- $cos(a + b) = cos\, a\, cos\, b - sin\, a\, sin\, b$
- $sin(a + b) = sin\, a\, cos\, b + sin\, b\, cos\, a$
- $cos(a - b) = cos\, a\, cos\, b + sin\, a\, sin\, b$
- $sin(a - b) = sin\, a\, cos\, b - sin\, b\, cos\, a$

Formules de duplication

Propriétés

Pour tout réel x ;on a :

1) $cos\, 2x = cos^2 x - sin^2 x = 2\, cos^2 x - 1 = 1 - 2\, sin^2 x$

2) $sin\, 2x = 2\, sin\, x\, cos\, x$

Exercices

1) On considère un réel a tel que $\frac{\pi}{2} \leq a \leq \pi$et $\sin a = \frac{1}{3}$.

Calcule les valeurs exactes de $\cos a$,$\sin 2a$, $\cos 3a$ et $\sin 3a$

2) Exprime en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

a) $\cos(x-\frac{\pi}{3})$; $\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

b) $\cos(\frac{\pi}{3}-2x)$; $\cos(2x+\frac{\pi}{6})$et $\sin(2x-\frac{\pi}{4})$.

3) a) En utilisant les formules d'addition, déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

a) En utilisant les formules de duplication, déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. Vérifier que : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

SEQUENCE 5

Equations trigonométriques élémentaires

Objectifs

Résoudre des équations trigonométriques élémentaires

Résolution d'équations trigonométriques élémentaires

Une équation trigonométrique est une équation dans laquelle l'inconnue apparait par l'intermédiaire d'un nombre trigonométrique.

Exemple

$\cos x=\frac{1}{3}$ ou encore $\sin 3x=\cos y$ ou encore $\sin x=b$

Méthode

Pour résoudre une équation trigonométrique, on utilise généralement les propriétés des angles associés. Les équations trigonométriques fondamentales obtenues peuvent, par la suite, être transformées en équations algébriques équivalentes induisant, chacune, un ensemble de solutions.

Le passage d'équation trigonométrique «de base» aux équations algébriques s'appuie sur certaines propriétés d'équivalence.

Il est courant de devoir présenter les solutions fondamentales (une solution comprises dans l'intervalle $[0,2\pi]$) sur le cercle trigonométrique afin de comparer des ensembles des solutions qui paraissent différents.

Propriétés d'équivalences fondamentales

Propriété 1

$cos\, x = cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \; ou \; x = -a + 2k\pi, k\epsilon z$

Propriété 2

$sin\, x = sin\, a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \; oux = \pi - a + 2K\pi, k\epsilon z.$

Ce sont ces propriétés qui permettent le passage d'équation trigonométrique fondamentales aux équations algébriques.

Exemples

1) Résoudre l'équation : $\cos x = \cos \frac{\pi}{12}$.

   Il suffit d'appliquer la propriété1.

   On a donc :$\cos x = \cos \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \; ou \; x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k\epsilon z.$

   On note donc l'ensemble des solutions S par :

   $S = \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k\epsilon z\right\} \mathrm{U} \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k\epsilon z\right\}$

   On voit que l'équation trigonométrique résolue admet une infinité de solutions .

2) Résoudre l'équation :$\sin x = \sin \frac{\pi}{12}$.

   On a : $\sin x = \sin \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \; ou \; x = \pi - \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k\epsilon z.$

   Donc $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \; ou \; x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k\epsilon z.$

   On a alors : $S = \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k\epsilon z\right\} \mathrm{U} \left\{\frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k\epsilon z\right\}.$

SEQUENCE 6

Equations trigonométriques de type $\boldsymbol{\cos x = a \; ou \; \sin x = a}$

Objectif

Résoudre des équations trigonométriques de type $\cos x = a \; ou \sin x = a$

Résolution d'équations trigonométriques de type $\boldsymbol{\cos x = a ou \sin x = a}$

Pour résoudre des équations trigonométriques du type $\cos x = a \; ou \sin x = a$ pour un réel a donné, il est indispensable de s'assurer de la validité de l'équation proposée.

En effet, on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq 1$et $|\cos x| \leq 1$.

Donc les équations du type :

$\cos x = a ou \sin x = a$ n'admettent de solutions que si $|a| \leq 1$.

Lors que la condition $|a| \leq 1$ est vérifiée, on détermine un nombre x_0 tel que $\cos x_0 = a$(repectivement $\sin x_0 = a$)

Ce qui nous permet de faire les transformations :$\cos x = \cos x_0$

(respectivement $\sin x = \sin x_0$)

Dont les solutions se déduisent des propriétés 1 et 2 ci- haut énoncées.

Exemples

1) Résolvons l'équation trigonométrique :$\cos x = \frac{1}{2}$.

On sait que $\frac{1}{2} < 1$ donc l'équation admet des solutions. D'autre part , d'après le tableau des valeurs remarquables on sait que $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$.

On a donc : $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

Finalement, on a : S= $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k\epsilon\mathbb{Z}\right\}U\left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$.

2) Résolvons l'équation : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a : $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet des solutions.

D'autre part, on sait que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$ d'après le tableau des valeurs remarquables.

L'équation initiale est transformée en l'équation :

$\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ or $\sin x = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ou\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k\epsilon z\right\}$U $\left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$.

SEQUENCE 7

Equation déductible du type: $\cos \alpha x = \cos a\ ou$

$\cos \alpha x = \cos ax\ ou\ \sin \beta x = \sin b\ ou \sin \beta x = \sin bx$.

Objectif

Résoudre des équations du type $\cos \alpha x = \cos a\ ou$

$\cos \alpha x = \cos ax\ ou\ \sin \beta x = \sin b\ ou \sin \beta x = \sin bx$.

Pour résoudre ces différents types équations trigonométriques, on peut les assimiler aux équations de type $\cos x = \cos a\ ou\ de\ type \sin x = \sin a$ et procéder par les mêmes démarches.

Exemples

1) Résolvons l'équation trigonométrique : $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

on constate que $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc l'équation en question admet des solutions. D'autre part on sait que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ donc l'équation initiale peut êtretransformée en équation :

$\sin 3x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi ou\ 3x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k\epsilon\mathbb{Z})$.

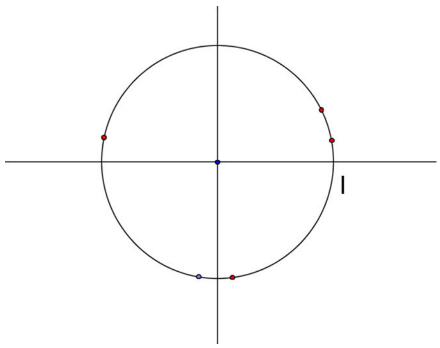
Donc $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} oux = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} (k\epsilon\mathbb{Z})$.

Et $S = \left\{\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} : k\epsilon\mathbb{Z}\right\} \text{U} \left\{\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} : k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$.

Les solutions fondamentales de l'équation (solution comprises dans l'intervalle $[0; 2\pi]$) sont :

- $x_0 = \frac{\pi}{9}; x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}; x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{9}$
- $x_{0'} = \frac{2\pi}{9}; x_{1'} = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{9}; x_{2'} = \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}$

On peut représenter ces solutions sur le cercle trigonométrique :



2) Résoudre l'équation trigonométrique :$\sin x + \cos 2x = 0$

On a donc $\sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x \Leftrightarrow \cos 2x = \sin(-x)$

Cette équation est de la forme $\cos \alpha x = \sin \beta x$.

Pour résoudre de telles équations, on peut utiliser les propriétés des angles associés pour transformer l'un des membres de l'équation afin d'obtenir une équation de la forme

$\cos \alpha x = \cos \beta x \ ou \sin \alpha x = \sin \beta x$.

Ici , on a donc : $\cos 2x = \sin(-x)$ or $\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right)$.

Donc nous obtenons

L'équation :$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Or $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \ ou \ 2x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi, (k\epsilon\mathbb{Z})$.

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ou x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$.

$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k\epsilon z\right\} U \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} : k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$

SEQUENCE 8

Equations du type $\boldsymbol{P(\cos\alpha x) = 0}$ ou $\boldsymbol{P(\sin\alpha x) = 0}$

Objectif

Résoudre des équations type $P(\cos\alpha x) = 0$ ou $P(\sin\alpha x) = 0$

Résolution des équations du type $\boldsymbol{P(\cos\alpha x) = 0}$ ou $\boldsymbol{P(\sin\alpha x) = 0}$

Ce sont des équations dont le 1$^{\text{er}}$ membre est un polynôme en cosinus ou en sinus.

Exemple : $2\sin^2 x - \sin x + 4 = 0$ ou $-3\cos^3 x + 2\cos^2 x + \cos x = 0$

sont des équations de la forme $P(\sin x) = 0$ ou $P(\cos x) = 0$.

Méthode

Pour résoudre de telles équations, on pose $y = \cos\alpha x$ ou $y = \sin(\alpha x)$, pour ramener l'équation initiale sous la forme $P(y) = 0$.

Chaque solution y de l'équation $P(y) = 0$ telle que $|y| \leq 1$ donnera une ou (des) famille de solutions.

Exemple

Résoudre l'équation trigonométrique : $2\sin^3 x - \sin^2 x - \sin x = 0$

On pose $y = \sin x$

L'équation proposée devient : $2y^3 - y^2 - y = 0 \Leftrightarrow (2y-1)(y+1)y = 0$

Les solutions en sinus de l'équation initiale sont donc :

$$\sin x = \frac{1}{2} \; ou \; \sin x = -1 \; ou \; \sin x = 0$$

Déterminons les solutions des 3 équations obtenus.

- $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

  donc $S_1 = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} U \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- $\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

  donc $S_2 = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

  donc$S_3 = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

l'ensemble des solutions S de l'équation proposée est donc :

$$S = S_1 U S_2 U S_3 = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} U \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\} U \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} U \{k\pi\} \; (k \in \mathbb{Z})$$

SEQUENCE 9

Equations linéaires en $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}\;\;\boldsymbol{et}\;\;\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$

Objectif

Résoudre des équations linéaires en $\sin x\;\; et\;\; \cos x$

Equations linéaires en $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}\;\;\boldsymbol{et}\;\;\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$

Ce sont les équations de la forme $a \sin x + b \cos x = c$ où a, b et c sont tous non nuls.

Méthode

Pour résoudre de telles équations, on va poser : $a = rsin\alpha$ et $b = rcos\alpha$ où r est défini positif et $\alpha\epsilon[0,2\pi[$.

Comme a et b sont des réels connus, on peut déterminer les valeurs correspondantes de r et α.

Ainsi, en faisant $a^2 + b^2$, on a :$a^2 + b^2 = r^2cos\alpha^2 + r^2sin\alpha^2 = r^2(cos^2\alpha + sin^2\alpha)$.

Donc : $a^2 + b^2 = r^2$.

Il s'ensuit que : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On obtient par la suite la valeur de α en revenant aux deux égalités posées :

$a = rcos\alpha$ et $b = rsin\alpha(1)$.

On a donc : $sin\alpha = \frac{a}{r}$ et $cos\alpha = \frac{b}{r}$.

En portant ces valeurs dans l'équation initiale, on a :$rsin\alpha sinx + rcos\alpha cosx = c$ d'où $sin\alpha sinx + cos\alpha cosx = \frac{c}{r}$.

Or, d'après les formules d'addition :

$sin\alpha sinx + cos\alpha cosx = \cos(x - \alpha)$ donc l'équation initiale est transformée en l'équation :

$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{r}$ qui se résoud aisément en utilisant les démarches explicitées plus haut.

Il est important de souligner que l'équation $\cos(x - \alpha) = \frac{c}{r}$ n'admet de solutions que si $\left|\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{r}}\right| \leq 1$ i.e $\frac{c^2}{r^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^{2+}b^2} \leq 1 \Leftrightarrow c^2 \leq a^2{+}b^2$.

Cette inégalité représente la condition pour que l'équation linéaire proposée admette des solutions.

Exemple

Résolvons l'équation trigonométrique : $\sqrt{3}\, sin2x - cos2x = 2$.

On remarque que $2^2 = 4$ alors que $\left(\sqrt{3}\right)^2{+}(-1)^2 = 3 + 1 = 4$

Donc $2^2 \leq 4$ si $a = \sqrt{3}$; $b = -1$ et $c = 2$.

On a bien : $c^2 \leq a^2 + b^2$. L'équation admettra des solutions.

Cherchons à transformer l'équation proposée.

On a : $r = \sqrt{4} = 2$ et l'angle α s'obient à partir des égalités :

$sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $cos\alpha = \frac{1}{2}$ d'où $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Des valeurs de r et α obtenues, l'équation linéaire proposée devient donc :

$$sin\frac{2\pi}{3}sin2x + cos\frac{2\pi}{3}cos2x = 1 \Leftrightarrow cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{2\pi}{3} = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

D'où $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Et donc : S=$\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercices

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

a) $cosx = cos\frac{\pi}{7}$; b) $cosx = -2$; c) $2cosx + 1 = 0$; $d)$ $sin3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, représenter les solutions sur un cercle trigonométrique puis donne les solutions dans $[-\pi, \pi]$.

a) $sin3x = 1$; b) $cosxsinx = \frac{1}{4}$; c) $cos3x = sin2x$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations trigonométriques suivantes :

a) $2cos^2x + cosx - 1 = 0$; b) $2sin^2x - 3sinx - 2 = 0$; c) $2sin^2x - 1 = 0$;

d) $\sqrt{2}(cosx - sinx) = 2$; e) $sin2x = cos3x$.

SEQUENCE 10

Inéquations trigonométriques

Objectif

Résoudre des inéquations trigonométriques de base

Inéquations de base

Ce sont les inéquations de type $cosx \geq 0$ ou $cosx \leq 0$ ou $sinx \geq 0$ ou $sinx \leq 0$

Méthode

Pour résoudre une inéquation trigonométrique, la démarche consiste à :

1) résoudre l'équation correspondante ;

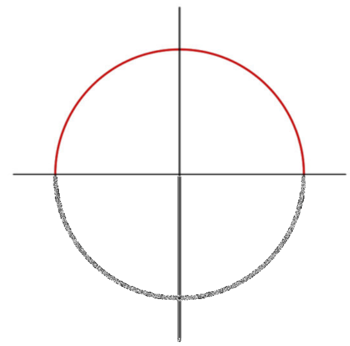
2) identifier les solutions de l'équation correspondante sur le cercle trigonométrique ;
3) déterminer les solutions de l'inéquation trigonométrique qui se présentent, généralement, sous la forme d'une union d'intervalles dont les bornes sont les solutions de l'équation correspondante.

Exemple

Résous l'inéquation trigonométrique : $sinx \geq 0$

L'équation correspondante est : $sinx = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi$ ou $x = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

On place les points correspondants au réel $x = 0$ et $x = \pi$ sur le cercle trigonométrique et on identifie assez aisément l'ensemble des solutions de l'équation posée.



On a donc:$sinx = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Donc : S= $[2k\pi; \ \pi + 2k\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$).

SEQUENCE 11

Inéquations trigonométrique du 1er degré

Objectif

Résoudre des inéquations du premier degré

Résolution des inéquations du 1er degré

Les inéquations du premier degré sont les inéquations de la forme $sin\alpha x \geq a$ ou $sin\alpha x \leq a$ ou $cos\alpha x \geq 0$ ou $cos\alpha x \leq a$ avec leurs variantes strictes.

Méthode

La résolution des inéquations dépend de la valeur du réel a.

Supposons qu'on veuille résoudre l'inéquation : $sinx \geq a$.

- Si $a < -1$, l'inéquation est toujours vérifiée car on sait que $-1 \leq sinx \leq 1$.
  Donc S $= \mathbb{R}$.
- Si $a > 1$, l'inéquation ne peut avoir de solutions, donc S= $\emptyset$.
- Si $a = -1$, l'inéquation $sinx \geq -1$ devient $sinx = -1$.
- Si $a = 1$,on résoud l'inéquation en procédant par :
  - ➢ la résolution de l'équation $sinx = a$
  - ➢ la détermination de l'arc de cercle les solutions de l'inéquation.

Exemples

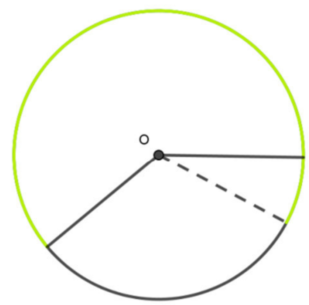
1) Résolvons l’inéquation : $sinx \geq \frac{1}{2}$.

On a $sinx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sinx = sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow a = -\left(\frac{\pi}{6}\right) + \ 2k\pi \ \text{ ou } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Donc } x = -\frac{\pi}{6} + \ 2k\pi \ \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

On en déduit les solutions de l’inéquation qui sont les valeurs de l’arc d’extrémités $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$ dans le sens direct.



On a donc : $-\frac{\pi}{6} + \ 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

D’où S $=\left[\frac{\pi}{6} + \ 2k\pi ; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2) Résolvons l’inéquation : $cos2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

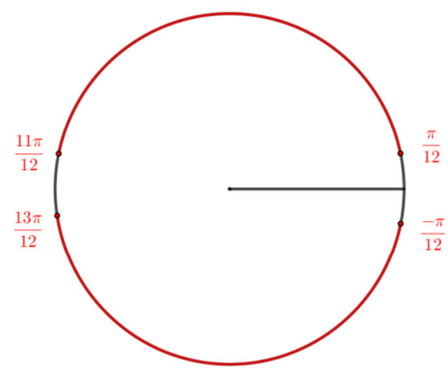
$\frac{\sqrt{3}}{2} \in]-1{,}1[$ donc l’inéquation admet des solutions.

Pour ce faire, cherchons d’abord les solutions de l’équation : $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a : $cos2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow cos2x = cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

La représentation faite ci-contre nous permet de déterminer les arcs de cercle dont les points sont associés aux solutions de cette inéquation.



On a donc :

$$cos2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \\ -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Donc S $=\left[\frac{\pi}{12} + \ 2k\pi ; \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \ \right] \cup \left[-\frac{11\pi}{12} + \ 2k\pi ; -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \ \right]$.

Exercice

Résous les inéquations trigonométriques suivantes :

$sin2x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cosx > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

SEQUENCE 12

Tangente d'un réel

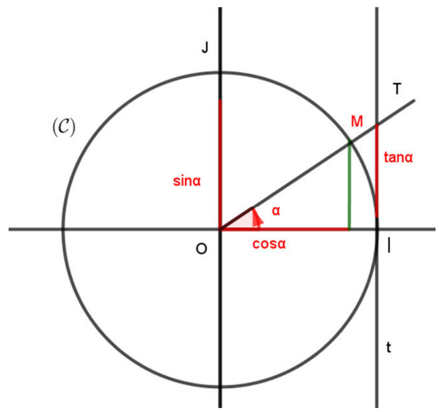
Objectif

Définir la tangente d'un réel

Définition

On considère le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ *d'origine* I *et* t *la tangente au cercle* $(\mathcal{C})$ *passant*

par I.



Soit M *un point de* $(\mathcal{C})$ *associé au réel* α *et* T *le point d'intersection de la droite (OM) et* (t).

On appelle tangente de l'angle orienté α*, l'ordonnée du point T, intersection de la droite (OM) et de la tangente* t *au cercle* $(\mathcal{C})$.

La tangente de l'angle α *se note* $t_g\alpha$ *ou* $tan\alpha$.

Sur la figure, le point T a pour coordonnées le couple (1, $tan\alpha$*).*

L'existence de $tan\alpha$ *dépend de la position du point M associé à la tangente* α.

Ainsi, si la droite (OM) n'est pas parallèle à la tangente t *ou à l'axe (OJ) , la tangente de l'angle* α *existe.*

Ainsi, on a donc : $tan\alpha$ existe si et seulement si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

On établit aisément que : $t_{g\alpha} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ pour tout $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

SEQUENCE 13

Propriétés de la tangente d'un réel et quelques valeurs particulières

Objectif

Propriétés

La fonction tangente est définie par :

$tanx = \frac{sinx}{cosx}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

P_1 *: Pour tout* $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$*, on a* $tan(x) = -tanx$.

La fonction tangente est donc impaire..

P_2 *: Pour tout* $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), tan(a + \pi) = tanx$.

La fonction tangente est périodique, de période π.

Valeurs particulières

On détermine facilement les valeurs de tangente pour des valeurs particulières de l'angle α à partir de l'identité $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$.

On a le tableau suivant :

α en degré	0	30	45	60	90	
α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
$tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini	

Aussi , pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, on a : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$; $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Leçon : Suites numériques

SEQUENCE 14

Définition d'une suite numérique

Objectif

Définir et exprimer une suite numérique

Définition

Une suite numérique (u_n) est une fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

En général, on note u_n le terme d'indice n au lieu de (u_n) qui est une suite c'est-à-dire une fonction.

Exemples

1) Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n}$

(u_n) *est définie sur* $\mathbb{N}$ $|\{0\}$, c'est-à-dire pour tout entier n $\geq$ 1

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \frac{1}{n} \end{aligned}$$

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que

$$u_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto 2n - 5$$

Expression d'une suite numérique

En général, une suite numérique (u_n) est déterminée par :

- soit une formule explicite permettant de calculer u_n en fonction de n ;
- soit le premier terme et une formule de récurrence exprimant u_n en fonction de u_{n-1} .

Exemples

1) soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{6n+3}{n+1}$

(u_n) est une suite déterminée par une formule explicite.

2) soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ V_n = \frac{1}{2}V_{n-1} + 3, \ \forall\, n \in N \end{cases}$

(v_n) est une suite définie par son premier terme v_0 et une formule de récurrence.

SEQUENCE 15

Représentation graphique d'une suite numérique définie par une formule explicite

Objectif

Représenter graphiquement une suite numérique définie par une formule explicite

NB

Une suite numérique étant une fonction, elle peut être représentée graphiquement dans le plan muni d'un repère.

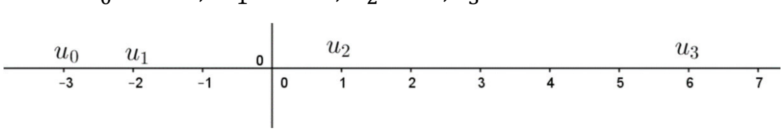
Il est également possible de représenter les termes d'une suite numérique sur un axe.

Suites définies par une formule explicite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = n^2 - 3$

- Représentation sur un axe.

On a : $u_0 = -3$; $u_1 = -2$; $u_2 = 1$; $u_3 = 6$

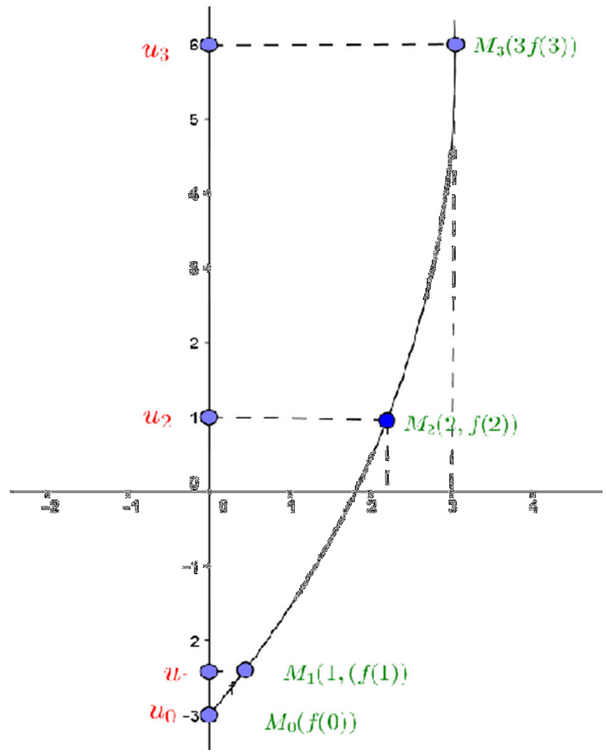


- Représentation dans le plan

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit (C) la courbe représentative de la fonction $f: x \longmapsto x^2 - 3$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on désigne par M_n le point de coordonnées$(n, f(n))$. L'ensemble des points M_n est une représentation graphique de la suite (u_n) dans le plan. Lorsqu'on projette les points M_n sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des termes de la suite sur l'axe (OJ).



SEQUENCE 16

Représentation graphique d'une suite numérique définie par une relation de récurrence

Objectif

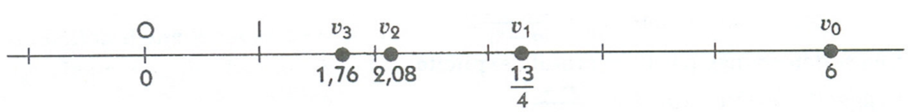
Représenter graphiquement une suite numérique définie par une relation de récurrence

Suites définies par une formule de récurrence

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 6 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{3}{v_n}\right) \end{cases}$

– Représentation sur un axe

On a: $v_0 = 6$; $v_1 = \frac{13}{4}$; $v_2 = \frac{217}{104}$; $v_3 \simeq 1{,}76$



– Représentation dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthornormé (O, I, J).

Soit (C) la courbe représentative de la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ et (D) la droite d'équation $y = x$.

Construisons v_1.

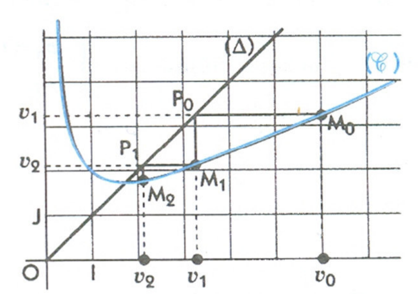
Soit M_0, point de (C) d'abscisse $v_0 = 6$; l'ordonnée de M_0 est $v_1 = g(v_0)$.

Soit P_0, point de (D) d'ordonnée v_1 ; l'abscisse de P_0 est v_1.

Soit M_1, point (C) d'abscisse v_1 ; l'ordonnée de M_1est $v_2 = g(v_1)$.

Soit P_1, point de (D) d'ordonnée v_2 ; l'abscisse de P_1est v_2.

Cette méthode permet une construction de proche en proche sur l'axe (OI) des termes d'une suite définie par une formule de récurrence.



SEQUENCE 17

Etude d'une suite numérique

Objectifs

- Minorer, majorer une suite numérique ;
- étudier les variations d'une suite numériques.

Minoration, majoration

Définitions

Soit (u_n) *une suite numérique.*

– *On dit que* (u_n) *est minorée s'il existe un nombre réel* m *tel que, pour tout entier naturel n,* $(u_n) \geq m$.

– *On dit que* (u_n) *est majorée s'il existe un nombre réel* M *tel que, pour tout entier naturel n,* $(u_n) \leq M$.

– *On dit que* (u_n) *est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.*

Remarque

Une suite est positive (respectivement négative) si elle est minorée (respectivement majorée) par 0.

Sens de variation

Définitions

Soit n_0 *un entier naturel donné et* (u_n) *une suite numérique définie pour tout entier naturel* $n \geq n_0$ *.*

- u_n *est dite croissante si et seulement si pour tout entier* $n \geq n_0, u_n \leq u_{n+1}$.
- u_n *est dite décroissante si et seulement si pour tout entier* $n \geq n_0, u_n \geq u_{n+1}$.
- u_n *est dite constante si et seulement si pour tout entier* $n \geq n_0, u_n = u_{n+1}$.

Exercice

On donne les suites numériques (u_n) et (v_n)suivantes :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 4n + 4$

$\forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Démontrer que la suite (u_n)est croissante et que (v_n) est décroissante.

SEQUENCE 18

Suites arithmétiques

Objectif

Définir une suite arithmétique

Définition

Une suite numérique (u_n) *est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n, on a :* $u_{n+1} = u_n + r$ *.*

Le nombre r est appelé raison de la suite(u_n)*.*

Exemples

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 7 - 9n$
2) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :$\begin{cases} v_0 = -1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n - 3 \end{cases}$

Propriété

Soit (u_n) *une suite arithmétique de premier terme* u_0 *et de raison r.*

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Exercice

Considérons la suite arithmétique (u_n) telle que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.

a) Détermine la raison et le premier terme de (u_n)
b) Exprime u_n en fonction de n et u_0.

Remarques

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de montrer que:

- soit la différence de deux termes consécutifs de la suite est un nombre réel indépendant de n :
- soit ou écrire (u_n) sous la forme $u_n = an + b$,où a et b sont deux nombres réels indépendants de n.

SEQUENCE 19

Variations et somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Objectifs

- Etudier les variations d'une suite arithmétique ;
- calculer la somme des (n + 1) premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Sens de variation

Propriété

Soit (u_n) *une suite arithmétique de raison r :*

- *si* $r > 0$ *, alors* (u_n) *est croissante ;*
- *si* $r < 0$ *, alors* (u_n) *est décroissante ;*
- *si* $r = 0$ *, alors* (u_n) *est constante.*

Somme des (n + 1) premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes consécutifs de la suite (u_n), c'est-à-dire :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \cdots u_n$.

Alors, on a :

$S_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}$

Exemple

La somme de n premiers nombres entiers naturels non nuls est:

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(1+n)}{2}$

SEQUENCE 20

Suites géométriques

Objectifs

Définir une suite géométrique

Définition

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique s'il existe un nombre réel* q *tel que, pour tout entier naturel n, on a*: $u_{n+1} = qu_n$.

Le nombre réel q est appelé raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 10^{-n}$.

   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme 1.

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = -4\times 2^n$

   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme – 4.

Propriété

Soit (u_n) *une suite géométrique de raison q et de premier terme* u_0.

Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = u_0q^n$.

Exemple

Soit la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$

Détermine la raison et le premier terme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarques

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, on utilise l'un des procédés suivants :

– soit établir que le quotient de deux termes consécutifs de (u_n) (si (u_n) est à termes non nuls) est un nombre réel indépendant de n : $\frac{u_n}{u_{n-1}} = q$

– soit écrire (u_n) sous la forme $u_n = aq^n$, où a et q sont deux nombres réels indépendants de n.

Exercices

a) Soit la suite géométrique (u_n) de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 0,2$.

   Calculer u_4, u_{20} et u_{100}.

b) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2}{3^n}$.

Montrer que cette suite est géométrique.

SEQUENCE 21

Variations et somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique

Objectifs

- Etudier les variations d'une suite géométrique ;
- Calculer les (n + 1) premiers termes consécutifs d'une suite géométrique.

Variations

Propriétés

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite géométrique de raison* q *et de premier terme non nul* u_0.

Pour $u_0 > 0$, *on a :*

– *Si* $q > 1$*, alors la suite* u_n *est dite croissante.*

– *Si* $0 < q < 1$*, alors la suite* u_n *est dite décroissante.*

Pour $u_0 < 0$, *on a :*

– *Si* $q > 1$*, alors la suite* u_n *est dite décroissante.*

– *Si* $0 < q < 1$*, alors la suite* u_n *est dite croissante.*

NB : Si la raison $q < 0$ alors la suite géométrique (u_n) n'est pas monotone.

Exemples

1) $u_n = 2(\sqrt{3})^n$ étant une suite géométrique,

(u_n) est une suite croissante car $u_0 = 2 > 0$ *et* $q = \sqrt{3} > 1$.

2) $v_n = \frac{3}{2^n}$ étant une suite géométrique alors (v_n) est croissante car $v_0 = 3$et $0 < q < 1$.

Somme des (n + 1) premiers termes consécutifs d'une suite géométrique

Théorème

Soit (u_n) *une suite géométrique de raison q (avec* $q \neq 1$*) et de premier terme* u_0*. On note* S_n *la somme de* $(n+1)$ *premiers termes de la suite* (u_n) *c'est-à-dire :*

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Alors, on a : $S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

SEQUENCE 22

Notion de limite d'une suite numérique

Objectifs

Etudier la limite d'une suite numérique

Suites convergentes

Définition

Soit (u_n) *une suite numérique et* l *un nombre réel.*

On dit que (u_n) *admet pour limite* l *si tout intervalle contenant* l *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

On dit alors que la suite (u_n) *est convergente.*

On note $lim_{n\to+\infty} u_n = l$

Exemple

Pour tout $n \geq 1, u_n = \frac{2n+1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ alors (u_n) est convergente.

Remarque

Si une suite est convergente alors sa limite est unique.

Suites divergentes

Définition

Soit (u_n) *une suite numérique.*

(u_n) *est dite suite divergente si la limite de* (u_n) *tend vers l'infini ou* (u_n) *n'admet pas de limite.*

Exemples

Prenons par exemple $u_n = \sqrt{n}, v_n = n \; et \; w_n = (-1)^n$

On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et

$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n = \begin{cases} -1, & si \; n \; est \; impair \\ 1, & si \; n \; est \; pair \end{cases}$

Donc les suites $u_n, v_n \; et \; w_n$ sont toutes des suites divergentes.

Théorème (limite d'une suite géométrique)

Soit (u_n) *une suite géométrique de raison q avec q non nul et différent de 1. Si* $-1 < q < 1$*, alors la suite* (u_n) *converge vers 0 :* $lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Si $q > 1$*, alors la suite* (u_n) *est divergente.*

Si $q \leq -1$, alors la suite n'admet pas de limite.

SEQUENCE 23

Raisonnement par récurrence

Objectifs

Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer une propriété

NB

Un raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une propriété $P(n)$ qui dépend de l'entier naturel n est vraie ou fausse pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Définition (Principe de récurrence)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on introduit une propriété* $P(n)$*.*

- Si on montre que $P(0)$ *est vraie (Etape d'initialisation)*

- On suppose que $P(n)$ *est vraie*

- Si on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $P(n+1)$ *est vraie (Etape d'hérédité)*

alors pour tout $n \in N$*,* $P(n)$ *est vraie.*

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$.

Appliquons le principe de récurrence

On a $\forall\, n \in N$,

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Montrons que $\forall\, n \in N, u_n = 2^n - 1$.

On considère la propriété P définie pour $n \geq 0$ par

$P(n): u_n = 2^n - 1$.

Etape d'initialisation

pour $n = 0$:

En effet $u_0 = 0$ et pour $n = 0$, on a $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc $P(0): u_0 = 2^0 - 1$ est vraie au rang $n = 0$.

Etape d'hérédité

Supposons que, pour un certain entier $n > 0$ fixé, on ait la propriété $P(n)$ vraie c'est-à-dire $P(n): u_n = 2^n - 1$.

Montrons la propriété $P(n+1)$: $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$:

on a

$u_{n+1} = 2u_n + 1$, d'après la définition de u_n

$u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$, car par hypothèse on a $u_n = 2^n - 1$.

$u_{n+1} = 2.2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

Donc la propriété $P(n+1)$: $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ est vraie.

D'où $\forall\, n \in N, u_n = 2^n - 1$.

Leçon de la compétence de base 2 du deuxième trimestre

Leçon : Lois de composition internes

SEQUENCE 24

Objectif

Définir une loi de composition interne

Définition

Soit E un ensemble non vide.

On appelle loi de composition interne sur E, toute application de E×E dans E :

$$*: \begin{array}{l} E\times E \longrightarrow E \\ (x,y) \longmapsto x*y \end{array}$$

*On dit que * est une loi de composition interne sur E.*

Exemples

1) L'addition notée + est une loi de composition interne sur $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$.
2) Le produit noté . ou × est une loi de composition interne sur $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
3) La différence notée – est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.
4) Dans $\mathbb{N}^*$, le PGCD et le PPCM sont des lois de composition interne.

Exercices

1) On définit l'ensemble:

   $\mathbb{Z}\left|\sqrt{2}\right| = \{k + \ell\sqrt{2}, \ell \in \mathbb{Z}\}$.

   Montre que + est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}\left|\sqrt{2}\right|$.
2) Soit E = ⌈0,1⌉.

   On définit une loi * sur E par:

   $\forall x, y \in \mathrm{E}$, $x * y = x + y - xy$.

   Montre que la loi * est une loi de composition interne sur E.

SEQUENCE 25

Commutativité et associativité d'une loi de composition interne

Objectif

Etudier la commutativité et l'associativité des lois de composition internes

Commutativité

Définition

*Soit * une loi de composition interne définie sur un ensemble E.*

** est commutative* $\Leftrightarrow \forall(x,y) \in E^2, x * y = y * x$.

Exemples

1) L'addition et la multiplication sont des lois commutatives dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$.
2) La composition des applications affines notée o n'est pas une loi de commutative car, généralement on a: sur $fog \neq gof$.

Exercices

1) On définit dans sur $\mathbb{R}$, une loi de composition interne notée * telle que:
   $\forall x \in \mathbb{R}, x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.
   La loi * est-elle commutative ? Justifie ta réponse.
2) On définit sur $\mathbb{N}^*$, l'exponentiation qui est l'application: $(a,b) \longmapsto a^b$.
   a) Montre que cette loi est interne dans $\mathbb{N}^*$.
   b) Montre que l'exponentiation n'est pas une loi commutative

Associativité

Définition

*Une loi * est dite associative si et seulement si pour tous éléments* a, b, c *de* E,

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Exercices

1) Soit E_A , l'ensemble des applications affines de E dans E.
   a) Montre que la loi o est associative.
   b) Cette loi est-elle aussi commutative? Justifie.
2) On considère la soustraction dans l'ensemble des entiers relatifs.
   a) Est-elle un loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$?
   b) Cette loi est-elle commutative? Justifie

SEQUENCE 26

Distributivité d'une loi sur une autre

Objectif

Etudier la distributivité d'une loi sur une autre

Définition

*Soient E un ensemble non vide, * et ⊥ deux lois de composition internes sur E.*

*⊥ est distributive sur * si et seulement si pour tous éléments* x, y, z *de* E*,*

$x \perp (y * z) = (x \perp y) * (x \perp z)$ *et* $(y * z) \perp x = (y \perp x) * (z \perp x)$.

Remarque

Si ⊥ est une loi commutative, une et une seule des 2 égalités ci-dessus suffit.

Exemple

La multiplication des nombres réels est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$ car, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, on a : $a \times (b + a) = (a \times b) + (a \times c)$.

SEQUENCE 27

Eléments neutre

Objectif

Etudier l'élément neutre d'une loi de composition interne

Définition

*Soit E un ensemble non vide et * une loi de composition interne sur E.*

Soit e *un élément de* E*.*

e *est l'élément neutre pour la * si et seulement si pour tout* x *élément* E,

$e * x = x * e = x$.

** admet un élément neutre dans* E *si et seulement s'il existe un élément* e *de* E *tel que pour tout* x *de* E, $x * e = e * x = x$

Exemple

1) Dans $\mathbb{R}$, 0 est l'élément neutre pour l'addition et 1 est l'élément neutre pour la multiplication.

2) Dans P(E), ∅ est l'élément neutre pour la réunion.

Théorème

*Si * admet un élément neutre, celui-ci est unique.*

Exercice

On considère l'ensemble noté GL(E), l'ensemble des applications linéaires de E et soit o la loi de composition des applications linéaires.

1) o est-elle une loi de composition interne?
2) Est-elle commutative? Associative?
3) Admet-elle un élément neutre? Lequel?

SEQUENCE 28

Eléments symétrisables

Objectif

Etudier l'élément symétrisable d'une loi de composition interne

Définition

Soit un ensemble E possédant un élément neutre e.

Soit $x \in E$.

x *admet un symétrique à gauche pour la loi*

$*$ *si et seulement s'il existe* x' *élément de E tel que* $x' * x = e$

x *admet un symétrique à droite pour la loi*

$*$ *si et seulement s'il existe* x' *élément de E tel que* $x * x' = e$

x *admet un symétrique pour* $*$ *si et seulement s'il existe* x' *élément de E tel que* $x * x' = x' * x = e$

x *admet un symétrique à gauche pour* $*$ *si et seulement si* x *admet un symétrique à gauche pour* $*$

x *admet un symétrique à gauche pour* $*$ *si et seulement si* x *admet un symétrique à droite pour* $*$

x *est un symétrisable pour* $*$ *si et seulement si* x *admet un symétrique pour* $*$

Théorème

Soit x *un élément de E.*

Si $*$ *est associative, possède un élément neutre* e *et si* x *admet un symétrique pour* $*$*, celui-ci est unique.*

Exemples

1) Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, le symétrique d'un nombre entier relatif x pour l'addition est son opposé.

Ainsi, -456 est l'élément symétrique de 456 pour l'addition des entiers relatifs.

2) Si on considère la loi o de composition des applications , les éléments de E^E(ensemble des applications de E sur E) qui admettent un symétrique pour cette loi sont les bijections de E sur E et le symétrique d'une bijection f pour la loi o est sa réciproque f^{-1}.

SEQUENCE 29

Structure de groupe

Objectif

Définir un groupe

Définition

*Soit G, un ensemble non vide puis * une loi de composition interne sur G.*

(G,) est un groupe si et seulement si :*

– *la loi $*$ est associative*

– *La loi $*$ possède un element neutre dans G.*

– *Tout élément de G possède un symétrique pour * dans G.*

Si de plus, la loi $*$ est commutative, le groupe (G,) est dit commutatif ou abélien.*

Exemples

1) $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{D},+)$, $(\mathbb{Q}\ ,+)$ et $(\ \mathbb{R},+)$ sont des groupes commutatifs.

2) $(\ \mathbb{D}^*,\times)$, $(\ \mathbb{Q}^*,\times)$, $(\ \mathbb{D}^*,\times)$ et $(\ \mathbb{R}^*,\times)$ sont des groupes commutatifs.

Exercices

1) $(\ \mathbb{Z},\times)$ est-il un groupe commutatif ? Justifie ta réponse.

2) Soit E l'ensemble défini par : $E = \{a, b, c\}$.

3) a) Définis en extension l'ensemble P€ des parties de l'ensemble E. On a donc : P(E)=∅..

b) On munit l'ensemble P(E) de la loi ∩(intersection).

– Montre que ∩ est une loi de composition interne dans P(E).

– Montre que (P(E),∩) est un groupe.

– Ce groupe est-il commutatif ? Justifie ta réponse.

SEQUENCE 30

Partie stable d'un groupe

Objectif

Déterminer une partie stable d'un groupe

Définition

*Soit E un ensemble non vide puis * une loi de composition interne sur E.*

Soit F une partie non vide de E.

F est stable pour *$\Leftrightarrow \forall(x,y) \in F^2, x * y \in F$.

Exemples

1) Dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres pairs est stable pour la multiplication.

2) Dans E^E, l'ensemble des bijections est stable pour la loi o(composition des applications).

Exercice

L'ensemble $\mathbb{N}_I$ des nombres entiers naturels impairs est-il stable pour la multiplication dans $\mathbb{N}$? justifie ta réponse.

Leçon : Analyse combinatoire

SEQUENCE 31

Les ensembles et parties d'un ensemble

Objectifs

- Définir et dénombrer un ensemble fini ;
- déterminer les parties d'un ensemble fini

Définition

Un ensemble est une collection d'objets de même nature ou non appelés éléments.

Il est toujours désigné par une lettre majuscule.

Un ensemble est dit fini si l'on peut compter et donner le nombre exact de ses éléments.

Ce nombre d'éléments est appelé son cardinal noté Card.

Dénombrer un ensemble fini, c'est déterminer son cardinal.

Un ensemble est infini lorsqu'on ne peut déterminer le nombre de ses éléments.

Exemples

1) L'ensemble des lettres de l'alphabet français est

   A $= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$.

Il compte 26 éléments. Son cardinal est donc 26 et on note: Card A $= 26$.

2) L'ensemble des entiers naturels est $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Il a un nombre infini d'éléments.
3) L'ensemble des chiffres arabes est : $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Card B $= 10$.

Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

A est un ensemble fini.

L'ensemble des parties de A noté P (A) est constitué de toutes les parties vide ou non de A.

Si Card A= n, alors Card P (A)= 2^n.

Exemple

On donne $A = \{1; 2; 3\}$.

Card A $= 3$.

P (A)$=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}\{2; 3\}\{1; 2; 3\}\}$.

Card *P (A)*$=2^3 = 8$.

NB: Les éléments de P (A) sont des parties de A *donc des sous-ensembles de A.*

L'ensemble vide et la partie constituée de tous les éléments de A sont les éléments de P (A).

La partie constituée de tous les éléments de A est appelé la partie pleine de A.

Exercice

On donne $A = \{a, b, 1, 2\}$.

Ecrire l'ensemble *P (A)* et déterminer Card *P (A)*.

SEQUENCE 32

Partition d'un ensemble

Objectifs

Constituer une partition d'un ensemble

Définition

A est un ensemble.

Des parties de l'ensemble A forment une partition de A si :

- *elles sont toutes non vides ;*
- *elles sont deux à deux disjointes ;*

– *leur réunion forme l'ensemble A.*

Exemple

On donne l'ensemble $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e\}$.

– Les parties $\mathrm{B} = \{a, e\}$; $\mathrm{C} = \{b, c, d\}$ forment une partition de l'ensemble A car :
  - $\mathrm{B} \neq \emptyset$ et $\mathrm{C} \neq \emptyset$;
  - $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \emptyset$;
  - $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \mathrm{A}$.

– Les parties $\mathrm{E} = \{a, c, d\}$; $\mathrm{F} = \{b, c, e\}$ et $\mathrm{D} = \{a, d\}$ ne forment pas une partition de A car elles ne sont pas deux à deux disjointes.

Propriété

A est un ensemble fini.

On désigne par $A_1, A_2, A_2, \dots, A_p$ des parties de A formant une partition de A.

On a : Card A= Card A_1 + Card A_2 + Card A_3 + ...+ Card A_p car chaque élément de A est un élément d'une et d'une seule des parties $A_1, A_2, A_2, \dots, A_p$ formant la partition de A.

Conséquences

– *Pour toute partie B d'un ensemble fini A, Card A = Card B + Card ($A \setminus B$).*

– *Pour toutes parties B et C d'un ensemble fini A,*
  Card ($B \cup C$) = Card B + Card C – Card ($B \cap C$).

Exercice

A, B et C sont trois parties d'un ensemble fini E.

Etablis le Card ($\mathrm{A} \cup B \cup C$).

SEQUENCE 33

Produit cartésien d'ensembles

Objectif

Etablir le produit cartésien d'ensembles

Définition

A et B sont deux ensembles.

Le produit cartésien de A par B noté $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.

$A \times B$ se lit : « A croix B ».

Remarques

- Cette définition peut s'étendre à un nombre quelconque donné d'ensembles. Le produit cartésien des ensembles $\mathrm{A_1, A_2, A_2, \dots, A_p}$ est l'ensemble $\mathrm{A_1 \times A_2 \times A_2 \times \dots \times A_p}$.
- Le produit cartésien de l'ensemble A × A × A × …× A (p fois A) est noté A^p.
- Les éléments du produit cartésien de deux ensembles sont appelés des couples ; ceux de trois ensembles des triplets ; ceux de quatre ensembles des quadruplets et les éléments de $\mathrm{A_1 \times A_2 \times A_2 \times \dots \times A_p}$, des p-uplets.

Exemple

On donne les ensembles $\mathrm{A} = \{a, b; c\}$ et $\mathrm{B} = \{1, 2\}$.

Déterminons les éléments du produit cartésien A × B.

Dans un tableau à double entrée, il est pratique de déterminer ces éléments :

B / A	1	2
a	(a,1)	(a, 2)
b	(b, 1)	(b, 2)
c	(c, 1)	(c, 2)

Ainsi, $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

Propriété

A et B étant deux ensembles finis, Card (A× B) = Card A × Card B.

Remarques

La propriété précédente peut être généralisée à p ensembles :

- Pour tous ensembles finis $\mathrm{A_1, A_2, A_2, \dots, A_p}$,

$$\mathrm{Card}\ (\mathrm{A_1 \times A_2 \times A_2 \times \dots \times A_p}) = \mathrm{Card}\ \mathrm{A_1} \times \mathrm{Card}\ \mathrm{A_2} \times \mathrm{Card}\ \mathrm{A_2} \times \dots \times \mathrm{Card}\ \mathrm{A_p}.$$

- Pour tout ensemble fini A à n éléments, Card $(A^p) = n^p$.

Exercice

On lance deux dés ayant des faces numérotées de 1 à 6. Le résultat d'un lancer est un couple de nombres apparaissant sur la face supérieure de chaque dé.

a) Combien y a-t-il de résultats possibles ?

b) Combien y a-t-il de résultats pour lesquels la somme des deux nombres est-elle supérieure ou égale à 10 ?

SEQUENCE 33

Les premiers outils de dénombrement : le comptage et les diagrammes

Objectifs

Utiliser le comptage ou les diagrammes pour dénombrer un ensemble

Le comptage

Exemple

On donne l'ensemble $A = \{a, b, c, d\}$.

Ecrivons tous les mots de trois lettres distinctes ayant ou non de sens avec les lettres de l'ensemble A et déterminons leur nombre.

On a :

abc, acb, bac, bca, cab, cba,

abd, adb, bad, bda, dab, dba,

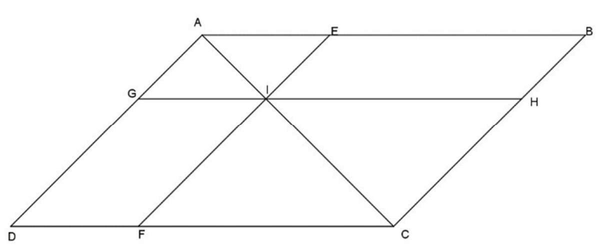
acd, adc, cad, cda, dac, dca,

bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb.

Il y a au total 24 mots de trois lettres distinctes ayant ou non de sens que l'on peut former avec les quatre lettres de l'ensemble A.

Exercice

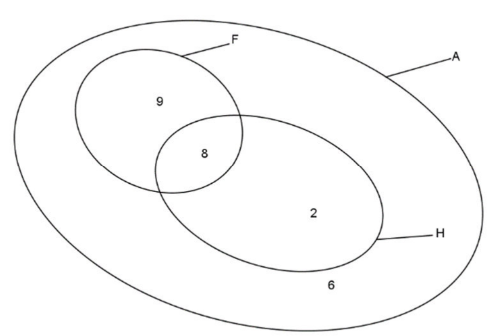
Sur la figure suivante, combien a-t-on de triangle ? De parallélogramme ?



Les diagrammes

Exemple

Dans une classe de 25 élèves, 17 jouent au football, 10 jouent au handball et 8 pratiquent les deux sports.



Déterminons à l'aide d'un diagramme le nombre d'élèves jouant seulement au football, seulement au handball et le nombre des élèves ne pratiquant aucun des deux sports.

Sur le diagramme ci-dessus, on a désigné par :

A la classe considérée, Card A $= 25$; F l'ensemble des élèves jouant au football, Card F $=$ 17 ; H l'ensemble des élèves jouant au handball, Card H $= 10$ et par $F \cap H$ l'ensemble des élèves pratiquant les deux sports, Card $F \cap H = 8$.

Comme Card $F \cap H = 8$, il ne restera que $17 - 8 = 9$ élèves ne jouant seulement qu au football.

De même, il ne restera que $10 - 8 = 2$ élèves ne jouant seulement qu'au handball.

Finalement, dans cette classe, il y a $9 + 2 + 8 = 19$ élèves pratiquant au moins l'un des deux sports.

Il restera donc $25 - 19 = 6$ élèves ne pratiquant aucun des deux sports.

Exercice

Dans un établissement scolaire, il 55% de filles et 45% de garçons. 12% des garçons et 18% des filles n'ont jamais redoublé une classe.

1) Quelle est la proportion d'élèves n'ayant jamais redoublé ?
2) Quelle est la proportion de filles parmi les élèves n'ayant jamais redoublé ?

SEQUENCE 34

Les premiers outils de dénombrement : les arbres

Objectifs

Utiliser les arbres pour dénombrer un ensemble

Les arbres

Exemples

1) On donne l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Combien peut- on former des nombres de trois chiffres distincts avec les éléments de A ?

A l'aide d'un arbre, formons ces nombres et déterminons combien ils sont :

On dénombre au total 24 nombres formés de trois chiffres distincts choisis parmi les éléments de A.

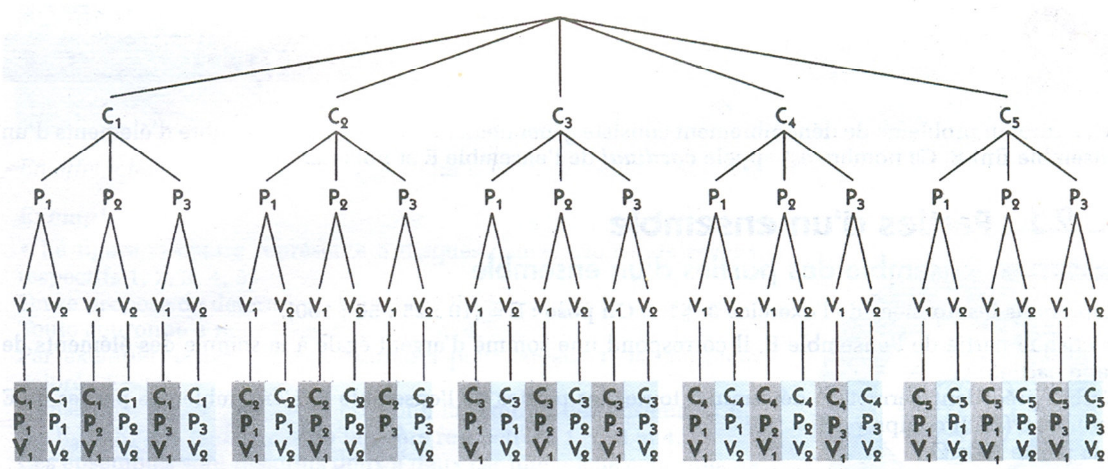
2) Pour aller à une cérémonie de mariage, Monsieur Narem peut choisir la chemise, le pantalon et la veste qu'il portera. Il possède 5 chemises, 3 pantalons et 2 vestes.

   Combien de choix distincts peut-il effectuer ?

   A l'aide d'un arbre, effectuons ces différents choix et déterminons leur nombre.

   A cet effet, désignons par C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 les 5 chemises, par P_1, P_2, P_3 les 3 pantalons et par V_1 et V_2 les 2 vestes.

   On obtient l'arbre suivant :



Il y a au total 30 choix distincts possibles que peut effectuer Mr Narem.

Exercices

1) On dispose de quatre pièces de monnaie : une pièce de 5F, une pièce de 10F, une pièce de 25F et une pièce de 50F. Quelles sont toutes les sommes possibles que l'on peut constituer avec ces pièces ?

2) Quatre couples sont réunis pour une soirée dansante. Les quatre hommes invitent chacun une femme à danser.

   De combien de façons peut se faire cette invitation sachant qu'aucun homme ne danse avec son épouse ?

SEQUENCE 35

Les arrangements avec remise

Objectifs

Utiliser les arrangements avec remise pour dénombrer un ensemble

Les arrangements avec remise : les p-uplets d'un ensemble

Définition

A est un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul.

Un p-uplet d'éléments de A est un arrangement avec remise des n éléments de A p à p.

Un p-uplet est donc un élément de A^p

Propriété

Le nombre des p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p *.*

C'est aussi le nombre des applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

Exemples

1) On donne l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4,5\}$. Combien de nombres de trois chiffres distincts ou non peut-on former avec les éléments de A ?

   En effet, former un nombre de trois chiffres distincts ou non choisis parmi les éléments de l'ensemble A, c'est faire un triplet d'éléments de A.

   Le nombre total de ces triplets est : $5^3 = 125$ nombres.

2) De combien de façons peut-on ranger 9 livres dans une bibliothèque comportant 3 étagères ?

   Ranger 9 livres dans une bibliothèque à 3 étagères, c'est définir une application d'un ensemble à 9 éléments vers un ensemble à 3éléments.

   Le nombre total de ses applications est :3^9.

SEQUENCE 36

Les arrangements sans remise

Objectif

Utiliser les arrangements sans remise pour dénombrer un ensemble

Les arrangements sans remise

Définition

E est un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$.

Un arrangement sans remise des n éléments de A p à p est un p-uplet d'éléments tous distincts de E.

Propriété

Le nombre total des arrangements sans remise p à p des n éléments d'un ensemble E est noté A_n^p.

C'est aussi le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

Remarques

– Le nombre de facteurs du produit $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$ est p.

Exemple

$A_{12}^5 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$.

Il y a 5 facteurs dans le produit.

– Si $p > n$, il est impossible de choisir p éléments tous distincts dans E tout comme il est impossible d'établir une application injective d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

Notation factorielle et propriété

On note : $n\,!$ et on lit : « factorielle n ».

$n\,! = n \times (n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Par convention, $0\,! = 1$.

Ainsi, n et p étant deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$,

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Par convention, $A_n^0 = 1$

SEQUENCE 37

Les permutations

Objectifs

Utiliser les permutations pour dénombrer un ensemble

Définition

A est un ensemble à n éléments.

Une permutation des n éléments de A est un arrangement sans remise de tous les n éléments de A.

Le nombre total de ces permutations est n !

C'est aussi le nombre des bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments.

Exemples

1) Déterminons le nombre de façons de disposer 5 drapeaux de 5 pays différents sur 5 mâts.

   Il y a en effet $5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ façons de disposer 5 drapeaux de 5 pays différents sur 5 mâts.

2) 6 athlètes prennent le départ d'une course à pied. Chacun d'eux prend au hasard un des 6 couloirs de la piste. Déterminons le nombre de départs possibles.

   Il y a $6\,! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ départs possibles.

SEQUENCE 38

Les combinaisons

Objectif

Utiliser les combinaisons pour dénombrer un ensemble

Définition

A est un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que $p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de A tout sous-ensemble de A ayant p éléments.

Le nombre total des combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments noté C_n^p est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarques

- une combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments ne peut exister que si $p \leq n$.
- A est un ensemble à n éléments.
    - Il y a une seule partie à 0 élément de A ; c'est la partie vide : $C_n^0 = 1$.
    - Il y a une seule partie à n éléments de A ; c'est l'ensemble A lui-même : $C_n^n = 1$.
    - Il y a n singletons inclus dans A : $C_n^1 = n$.

Propriétés

n et p sont deux nombres entiers tels que $p \leq n$.

- $C_n^{n-p} = C_n^p$;
- *Si de plus $0 < p < n$ alors, on a :* $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

SEQUENCE 39

Binôme de Newton

Objectifs

Utiliser la formule du binôme de Newton pour développer des expressions

Formule du binôme de Newton : propriété

a et b sont deux nombres réels et n, un nombre entier naturel non nul. On a :

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^p a^{n-p} b^p + \dots + + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$

En utilisant le symbole Σ, on écrit : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$.

Exemples

1) $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^{2-1} b^1 + C_2^2 a^{2-2} b^2$.
2) $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^{3-1} b^1 + C_3^2 a^{3-2} b^2 + C_3^3 a^{3-3} b^3$.

Triangle de Pascal

La propriété $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$ et les égalités $C_n^0 = C_n^n = 1$ nous permettent de calculer de proche en proche les valeurs de C_n^p.

On utilise, à cet effet, la disposition ci-dessous appelée « triangle de Pascal » :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$$

n \ p	1	2	3	4	5	6	7	8	…	…
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
…										

Ce tableau permet de retrouver facilement les coefficients de la formule du binôme de Newton.

Exemple

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

SEQUENCE 40

Principe de dénombrement : tirage de boules d'une urne

Objectif

Modéliser les différents types de tirages

NB : Pour résoudre des problèmes de dénombrement, on a utilisé le comptage, les diagrammes, les arbres.

On a aussi utilisé les arrangements avec remise (les p-uplets), les arrangements sans remise, les permutations et les combinaisons.

Il est donc nécessaire de connaitre les caractéristiques de ces différentes notions et de préciser leurs domaines d'utilisation.

Tirages de boules d'une urne

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire 3 boules de cette urne.

Calcule le nombre de tirages distincts dans les trois cas suivants :

a) les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne ;
b) les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne ;
c) les trois boules sont tirées simultanément.

Attention

On peut récapituler ces différents tirages de p boules et leur dénombrement par le tableau suivant où A désigne un ensemble ayant n éléments :

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Outils	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	Oui	Non	p-uplets	n^p
Tirages successifs sans remise	Oui	Oui	Arrangements sans remise	A_n^p n$\geq p$
Tirages simultanés	Non	Oui	Combinaisons	C_n^p n$\geq p$

SEQUENCE 41

Principe de la somme et du produit

Objectifs

Utiliser le principe de la somme et du produit

Exemple

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 dont 5 sont rouges, 3 vertes et 4 blanches. On tire successivement et avec remise 3 boules de cette urne.

Calcule le nombre de tirages distincts dans les deux cas suivants :

1) Les 3 boules tirées sont de même couleur ;
2) La première et la troisième boules tirées sont vertes.

Solution

Désignons par U l'ensemble des 12 boules contenues dans l'urne et par R, V et B les parties de U contenant respectivement les boules rouges, vertes et blanches.

On sait que le nombre total des tirages est : 12^3.

1) Avoir 3 boules de même couleur revient à obtenir soit 3 boules rouges, soit 3boules vertes, soit 3 boules blanches. Les ensembles de tirages correspondant à ces trois cas forment une partition de l'ensemble des tirages cherchés.

   L'ensemble des tirages de 3 boules rouges est l'ensemble des triplets de R, de même l'ensemble de tirages de 3 boules vertes et de 3 boules blanches sont respectivement les triplets de V et de B.

   Le nombre total des tirages de 3 boules de même couleur est:

   $5^3 + 3^3 + 4^3 = 216$.

2) La première et la troisième constituent un couple de V, c'est-à-dire un élément de V^2, la deuxième boule est un élément de U. L'ensemble des tirages cherchés est $V^2 \times$U. On a : Card $(V^2) = 3^2$ et Card(U) $= 12$. Le nombre de tirages distincts dans lesquels la première et la troisième boules sont vertes est : $3^2 \times 12 = 108$.

Méthode

Pour dénombrer un ensemble A, on peut utiliser l'un des deux principes suivants.

- Principe de la somme : on définit une partition de A par des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_3$.

  On a alors $Card\,(A) = Card(A_1) + Card\,(A_2) + \ \dots + Card(\,A_3)$.

- Principe du produit : on décompose l'ensemble A en un produit cartésien d'ensembles $A_1, A_2, \dots, A_3$.

  On a alors $Card\,(A) = Card(A_1) \times Card\,(A_2) \times \ \dots \times Card(\,A_3)$.

Leçons de la compétence de base 3 du deuxième trimestre

Leçon : les angles orientés

SEQUENCE 42

Orientation du cercle, du plan

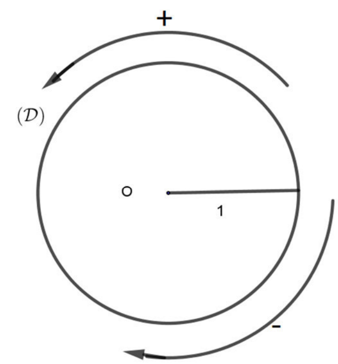
Objectif

Orienter un cercle, un plan

Orientation du cercle

Il n'y a que deux sens de parcours sur le cercle $(\mathcal{C})$.

Par convention, le sens direct ou trigonométrique ou sens positif est le sens inverse du déplacement des aiguilles d'une montre.



L'autre sens est appelé sens indirect ou rétrograde ou encore sens négatif.

Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O, de rayon 1 sur lequel est fixé un point origine I et muni du sens trigonométrique est appelé cercle trigonométrique.

La circonférence d'un cercle trigonométrique est 2π.

Orientation du plan

On dit que le plan est orienté lorsque tous les cercles du plan sont orientés dans le même sens.

En général, on l'oriente dans le sens positif (ou direct).

SEQUENCE 43

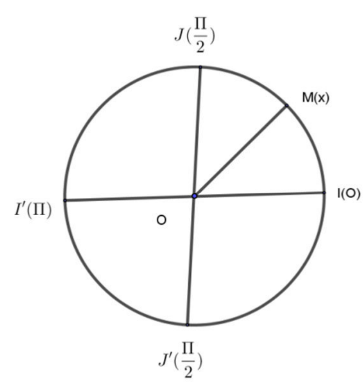
Repérage de points sur le cercle trigonométrique

Objectif

Répérer un point sur le cercle trigonométrique

Repérage de points

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique d'origine I.



L'origine I est repérée par le réel 0 (zéro) alors que les points J, I' et J' sont repérés par les réels respectifs $\frac{\pi}{2}$, π et $-\frac{\pi}{2}$.

On dit que ces réels $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont des abscisses curvilignes respectives des points I, J, I’ et J’.

Le point J a pour abscisse curviligne $\frac{\pi}{2}$ car l’angle au centre $\widehat{IOJ}$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. Il en est de même pour I’ car $mes\widehat{IOI'} = \pi$.

Cependant, si $\frac{\pi}{2}$ est une abscisse curviligne du point J, il n’est pas le seul car les réels $\frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \frac{\pi}{2} + 6\pi, \ \ldots, \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ constituent aussi des abscisses curvilignes du point J.

On dira donc que les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ sont des réels curvilignes du point J sur le cercle $(\mathcal{C})$.

De manière générale : si x est une abscisse curviligne d’un point M sur le cercle $(\mathcal{C})$ alors toutes les autres abscisses curvilignes du même point M sont de la forme $x + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

On dit que les abscisses curvilignes d’un même point de $(\mathcal{C})$ sont égales modulo 2π.

En d’autres termes, x', x et y sont des abscisses curvilignes du même point M alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$.

Exercice

On considère le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ d’origine I et soit J le point de $(\mathcal{C})$ associé au réel $\frac{\pi}{2}$. O est le centre de ce cercle $(\mathcal{C})$.

a) Construis la bissectrice de l’angle au centre $\widehat{IOJ}$ qui rencontre le cercle aux points M et M’, M’ étant placé entre I et J.
b) Détermine les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

SEQUENCE 44

Arcs orientés

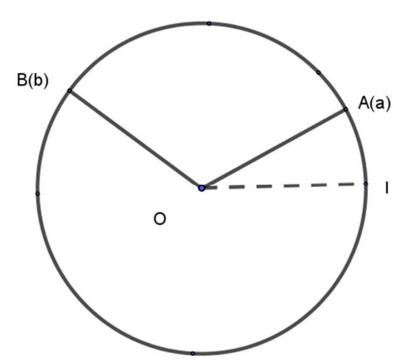
Objectif

Définir et noter un arc orienté

Définition

On appelle arc orienté un couple de points du cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$*.*

Etant donné deux points A et B du cercle $(\mathcal{C})$, $\overset{\curvearrowright}{AB}$ désigne l’arc orienté d’origine A et d’extrémité B.



Si $a\ et\ b$ sont deux abscisses curvilignes respectives A et B, le réel $b-a$ est la mesure de l'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

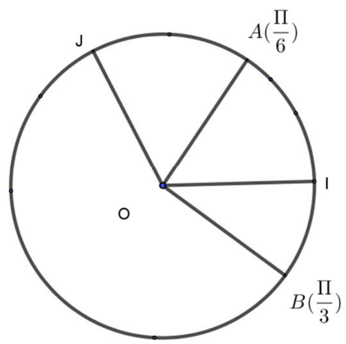
On a donc :

Si A(a) et $B(b)$ sur un cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$, alors $mes\ \overset{\curvearrowright}{AB} = b-a$.

Un arc orienté a une infinité de mesures qui sont égales modulo π.

On écrit donc : $mes\ \overset{\curvearrowright}{AB} = a-b[2\pi]$.

Exemple



Calculons $mes\ \overset{\curvearrowright}{AJ}$, $mes\ \overset{\curvearrowright}{AB}$.

On a $mes\ \overset{\curvearrowright}{AJ} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $mes\ \overset{\curvearrowright}{AJ} = \frac{2\pi}{6}[2\pi]$

Donc $mes\ \overset{\curvearrowright}{AJ} = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

De même, on a : $mes\ \overset{\curvearrowright}{BA} = \frac{\pi}{6} - (\frac{\pi}{3})[2\pi]$

Donc $\overset{\curvearrowright}{BA} = \frac{2\pi}{2}[2\pi]$.

SEQUENCE 45

Angles orientés

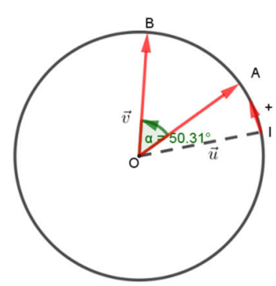
Objectif

Définir et noter un angle orienté

Définition

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle trigonométrique de centre O, A et B deux points de $(\mathcal{C})$ et soient $\vec{u}$,$\vec{v}$ les vecteurs tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires et par définition :



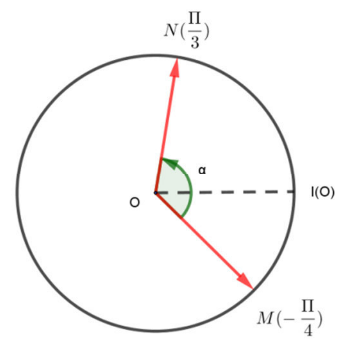
- *Les mesures de l'arc orienté mes $\overset{\curvearrowright}{BA}$ sont les mesures de l'angle orienté du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.*
- *La mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ s'appelle la mesure principale de l'angle orienté donné.*

Ainsi, si α est la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ alors toutes les mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ sont de la forme $\alpha + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Exemples

1) Considérons sur un cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ de centre O les points M et N associés respectivement aux réel $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.

   Déterminons les mesures de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$.



   L'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{MN}$ est tel qu'on a:

$$mes\ \overset{\curvearrowright}{MN} = \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right) [2\pi] = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

   Donc $mes\ \overset{\curvearrowright}{MN} = \frac{7\pi}{12} [2\pi]$

   On se rend compte que $\frac{7\pi}{12} \in]-\pi, \pi]$ donc elle est la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$.

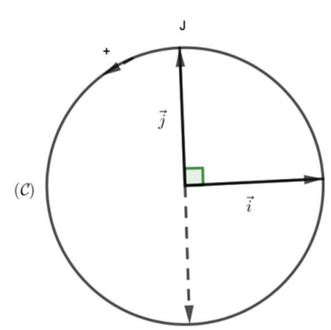
   On a donc : $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = \frac{7\pi}{12} [2\pi]$.

   Les réels de la forme $\frac{7\pi}{12} + 2k\pi (\in k\mathbb{Z})$ constituent l'ensemble des mésures de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$.

2) Soient $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ duex vecteurs unitaires tels que $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$.

   On a :

- Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- Soit $(\vec{\jmath}, \vec{\imath}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.



Remarque :

Si l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ a pour mesure principale α alors l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ a pour mesure la valeur absolue de , c'est-à-dire $mes\widehat{AOB} = |\alpha|$.

Exercice

Sur un cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ de centre O, on considère les points A, B, M et N associés respectivement aux réels $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

a) Fais la figure et repère ces points sur le cercle $(\mathcal{C})$.

b) Déterminer les mesures des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{ON}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{MOB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{ON}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}})$;$(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OA}})$.

SEQUENCE 46

Cas d'angles orientés de couples de vecteurs colinéaires

Objectif

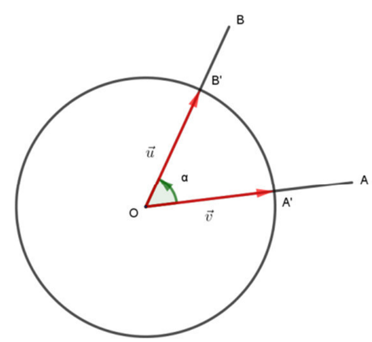
Déterminer la mesure d'angles orientés de couples de vecteurs colinéaire

Angles orientés de vecteurs non nuls

Définition

Soient A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ *et* $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *non nuls.*

L'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ *est défini comme étant aussi l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}})$ *où* $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{OA'}$ *et* $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{OB'}$ *sont des vecteurs unitaires avec :* $\overrightarrow{u'} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ *et* $\overrightarrow{v'} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.



Cas particuliers d'angles orientés

Théorèmes

1) Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires si et seulement si* $(\widehat{\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}}) = 0$ *où* $(\widehat{\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}}) = \pi$.

On a : $(\widehat{\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}}) = 0$ *pout vecteur* $\vec{u}$ *non nul.*

De même, on a : $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = \pi$ *pour tout vecteur* $\vec{u}$ *non nul.*

2) *Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si on a :* $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = 0$ *ou* $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \pi$.

SEQUENCE 47

Mesure principale d'un angle orienté

Objectif

Distinguer la mesure principale des autres mesures d'un angle orienté

Mesure principale d'un angle orienté

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure α.

On sait que α est la forme $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Or parmi toutes ces mesures $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), il en est une et une seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi[$. C'est la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Quelques fois, la valeur exprimée de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ nécessite certaines transformations pour déterminer la mesure principale de l'angle concerné, soit pour des commodités de calcul, soit pour le repérage des points sur un cercle trigonométrique.

Ainsi, à partir de quelques exemples précis, montrons comment déterminer le mesure principale d'un angle orienté donné.

Exemples

1) Soit l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{32\pi}{3}$. Déterminons sa mesure principale.

On va décomposer le nombre $\frac{32\pi}{3}$ afin de l'exprimer sous la forme $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)où $\alpha \in]-\pi; \pi[$.

On sait que : $\frac{32\pi}{3} = \frac{30\pi+2\pi}{3} = 10\pi + \frac{2\pi}{3}$. Cette écriture est bien de la forme $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) avec $\alpha = \frac{2\pi}{3} \in]-\pi, \pi]$ et $k = 5$.

Donc $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{32\pi}{3} = [\pi]$.

2) Considérons l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{-135\pi}{4}$ et déterminons sa mesure principale.

On sait que $\frac{-135\pi}{4} = \frac{\pi-136\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 16\pi$ avec $\frac{\pi}{4} \in]-\pi, \pi]$.

Donc :$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

3) Déterminons la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{v},\vec{u}) = \frac{1240\pi}{12}$.

L'astuce que nous allons utiliser consiste à désigner par $\alpha \frac{1240\pi}{12}$ et par a la mesure principale associée α.

On pose donc : $a = \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) , c'est-à-dire $\alpha \frac{1240\pi}{12} + 2k\pi$ et comme a la mesure principale donc $-\frac{1}{2} - \frac{1240}{24} < k < \frac{1}{2} - \frac{1240}{24}$ ce qui nous donne :

$-52{,}16 < k < 51{,}08$ d'où $k = -52$.

On détermine la valeur de α an effectuant le calcul : $a = \frac{1240\pi}{12} + 2(-52)\pi$

Donc $a = \frac{8\pi}{12} = -\frac{2\pi}{3}$.

La mesure orienté de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est donc $-\frac{2\pi}{3}$, associé à la mesure $\frac{1240\pi}{12}$.

SEQUENCE 48

Méthode de la détermination de la mesure principale $\boldsymbol{a}$, associée à une abscisse curviligne $\boldsymbol{\alpha}$.

Objectif

Appliquer la méthode de détermination de la mesure principale d'angles

Méthode

Pour déterminer la mesure principale a associée à une abscisse curviligne α, on peut procéder en utilisant les trois étapes suivantes :

1ère étape

On pose les conditions suivantes :

a) : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = \alpha + 2k\pi$.

b) On considère que : $-\pi < a \leq \pi$.

2ème étape

On calcule k à partir de la double inégalité :

$-\pi < \alpha + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2} < k \leq \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{1}{2}$

Puis en posant $x = \frac{\alpha}{2\pi}$, on a donc :

$$k \in \left]x - \frac{1}{2} ; x + \frac{1}{2}\right]$$

3ème étape

On détermine la valeur de a en remplaçant k par sa valeur obtenue ci-dessous.

Exercice

Quelle est la mesure principale associée à chaque mesure :

$-\frac{81}{4}\pi$; $\frac{131\pi}{6}$; $\frac{253}{12}\pi$.

SEQUENCE 49

Relation de Chasles

Objectif

Utiliser la relation de Chasles dans le calcul d'angles

Théorème

Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{w}})$ *: relation de Chasles sur les angles orientés.*

2) $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$.

3) $-(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{-\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) + \pi$.

4) $(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ *(k élément non nul)*

Exercices

1) Soit ABC un triangle. Démontre que :$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \pi[2\pi]$
2) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Montre qu'il n'est pas possible d'avoir$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = +\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Déduis-en que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Justifie de même que $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

3) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit A',B',C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

Détermine $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA'})$, $(\overrightarrow{CA'},\overrightarrow{CB'})$, $(\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{C'A})$, $(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{C'B})$.

(tu justifieras les réponses obtenues).

Double d'un angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

L'angle $2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ *se définit comme la somme* $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{u},\vec{v})$ *et s'appelle le double de l'angle* $(\vec{u},\vec{v})$.

Propriété

L'angle $2(\vec{u}, \vec{v})$ *ne change pas si l'on remplace* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *par des vecteurs qui leur sont respectivement colinéaires.*

SEQUENCE 50

Cosinus et sinus d'un angle

Objectif

Définir et déterminer le cosinus et le sinus d'un angle orienté

Cosinus et sinus d'un angle orienté

Définition

Le plan muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *[i.e* $(\vec{\imath}, , \vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2}$*].*

A tout réel tel que α*, on associe le point M du cercle trigonométrique tel que* α *est une mesure de l'angle orienté* $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}})$*.*

On appelle cosinus α *l'abscisse de M et sinus* α *l'ordonnée du même point M dans le repère* $(o, \vec{\imath}, , \vec{\jmath})$*. Le vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *s'écrit donc :*

$\overrightarrow{OM} = cos\alpha\vec{\imath}, + sin\alpha\vec{\jmath}$ *.*

Cosinus et sinus d'angle de vecteurs

Définition

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *un repère orthonormé direct, alors le cosinus (resp. le sinus) d'un angle orienté* $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$*,est égal au cosinus (resp. sinus) d'une mesure principale en radians de cet angle orienté.*

On note ce cosinus : $cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$*, et ce sinus,* $sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$*.*

Exemple

On considère un angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ dont une mesure en radians est $\frac{\pi}{6}$.

On sait que toute autre mesure de cet angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{\pi}{6} + 2k\pi\vec{u}(k \in \mathbb{Z})$.

On a donc $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = cos\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$ or $\cos(a + 2k\pi)$ =cos a donc

$cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

De même, on a : $sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = sin\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Exercice

Soit M, le point de $(\mathcal{C})$ associé au réel $\frac{\pi}{4}$. Fais la figure en considérant que le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(\vec{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Place le point M', image de M par rapport à l'axe des ordonnées .

Détermine :

- l'expression des abscisses curvilignes du point M',
- le cosinus et le sinus de l'angle orienté$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$.

SEQUENCE 51

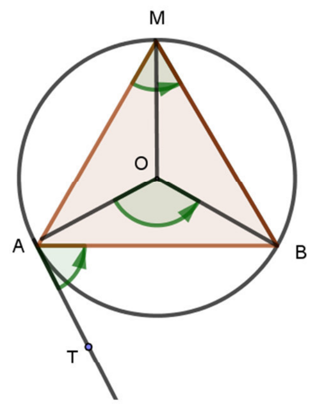
Angles orientés inscrits dans un cercle

Objectif

Etablir et utiliser les relations liant les angles inscrits dans un cercle

Angles au centre et angles inscrits

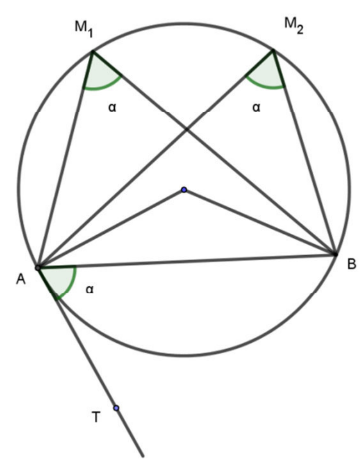
Théorème de l'angle au centre



Si M, A et B sont trois points distincts du cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ de centre O et T un point de la tangente en A (T≠ A), alors l'angle au centre $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ est égal au double de l'angle inscrit$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$ et au double de l'angle de la tangente $\left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right)$:

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 2\left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right)$.

Théorème de l'arc capable



Soient A et B deux points du plan orienté.

L'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \alpha[2\pi]$ est le cercle passant par A et B et dont la tangente (AT) en A vérifie $\left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right) = \pi$, privé des points A et B.

Ce arc s'appelle arc capable d'angle α du couple (A,B).

On a : $\left(\overrightarrow{M_1 A}, \overrightarrow{M_1 B}\right) = \left(\overrightarrow{M_2 A}, \overrightarrow{M_2 B}\right) = \cdots$

$= \alpha[2\pi]$.

De même :$\left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right) = \alpha[2\pi]$.

Exercice

a) Construis un segment [AB]tel que AB $= 3$cm et soit T le point du plan orienté tel que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

b) Construis le cercle capable d'angle $\frac{\pi}{6}$ du couple (A,B

Points cocycliques

Théorème

Pour que quatre points coplanaires et non alignés A, B, C et D soient cocycliques, il faut et il suffit que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$.

Leçon : Homothéties

SEQUENCE 52

Définition des homothéties

Objectif

Définir une homothétie

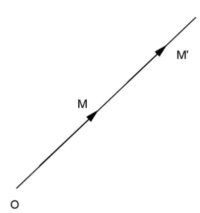
Définition

Soit O*, un point du plan et* k *un nombre réel non nul.*

L'homothétie de centre O *et de rapport* k *est la transformation qui à tout point M, associe le point M' tel que :* $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$.

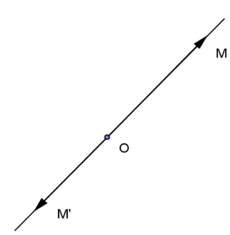
L'homothétie de centre O *et de rapport* k *se note :* $h(O, k)$.

Ainsi, on a :M'=$h(O, k)(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$.



$\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ *avec* $k > 0$.

$\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{OM'}$ *sont de même sens.*



$\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ *avec* $k < 0$.

$\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{OM'}$ *sont de sens contraires.*

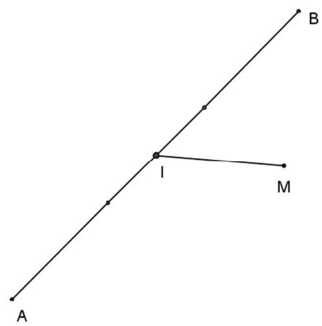
Remarques

1) Si M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de support $k \in \mathbb{R}^*$ alors M,O et M' sont alignés.
2) Si $k = 1$, l'homothétie est la transformation identité.
3) Si $k = -1$, l'homothétie $k(O, -1)$ est une symétrie centrale de centre O.

Exercices

1) Démontre la propriété suivante : « Si le point M' est l'image du point M par une homothétie de centre I alors les points I, M et M' sont alignés ».

2) On considère la figure suivante :



– Construis les points A', B' et M' images respectives des points A, B et M par l'homothétie de centre I et de rapport 2/5.

– Construis les points A_1, B_1 et M_1 images respectives des points A, B et M par l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{3}{2}$.
– Quelle est l'homothétie qui transforme le point A en B ?
– Quelles sont les images respectives des points A, B et M par l'homothétie de centre I et de rapport 1 ?

SEQUENCE 53

Points invariants par une homothétie et théorème fondamental

Objectifs

- Déterminer le point invariant par une homothétie ;
- utiliser le théorème fondamental des homothéties.

Propriété

Une homothétie de rapport différent de 1 admet pour seul point invariant son centre.

Démonstration

Soit $h(I, k)$ est une homothétie de centre I et de rapport k non nul et différent de 1.

Le point M est invariant par $h(I, k)$ si son images M' est le point M lui-même.

On a alors : $\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IM}$ soit $(1-k)\overrightarrow{IM} = \vec{0}$.

Puisque $k \neq 1$, $(1-k)\overrightarrow{IM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \vec{0} \Leftrightarrow M = I$.

Théorème fondamental des homothéties

On considère une homothétie de centre O. Soient M et N, deux points d'images respectives M' et N' par cette homothétie.

Alors : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

Démonstration

Par l'homothétie de centre O et de rapport $k \neq 0$, on a :

$M' = h(O,k)(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ et N'=$h(O,k)(N) \Leftrightarrow \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$

Or $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'} = -k\overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{ON} = k(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) =$

$k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = k\overrightarrow{MN}$.

Exercice

Traduis les égalités ci-dessous par une phrase du type : … est l'image de … par l'homothétie de centre … et de rapport …

a) $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.

b) $3\overrightarrow{BM'} = -2\overrightarrow{MC}$.

c) $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DA}$.

SEQUENCE 54

Expression analytique d'une homothétie

Objectif

Donner l'expression analytique d'une homothétie

Théorème

Le plan étant muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $h(I,k)$ une homothétie de centre $I\binom{a}{b}$ et de rapport k non nul et $M\binom{x}{y}$.

Si M' est un point du plan de coordonnées (x',y') tel que M' $= h(O,k)(M$ alors $\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$

Cette écriture est l'expression de la relation entre les coordonnées du point M et de son image M' par une homothétie de centre $I\binom{a}{b}$ et de rapport $k \neq 0$.

On énonce alors :

Soit p et q deux reels et $k \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$; le plan étant muni d'un repère donné, toute application du plan dans lui-même qui à tout point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que :

$\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$ *est une homothétie de rapport* k *et centre le point de coordonnées* $\left(\frac{p}{1-k}, \frac{q}{1-k}\right)$.

Exercice

On considère les expressions analytiques suivantes traduisant la relation existant entre un point M(x, y) du plan et son image M'(x', y') par une transformation :

a) $\begin{cases} x' = -2x + 6 \\ y' = -2y - 9 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x' = 2x - 1 \\ 3y' = 2y + 1 \end{cases}$

Pour chacun de ces cas, détermine la nature de la transformation et ses éléments caractéristiques.

SEQUENCE 55

Propriétés de base

Objectif

Utiliser les propriétés de base des homothéties

Images de figures

Propriétés

1) *Une homothétie de rapport* k *multiplie toutes les longueurs par* $|k|$. *On dit que les homothéties conservent les rapports de longueurs.*
2) *Etant donné trois points A, B et C alignés et distincts. Il existe une unique homothétie* h *de centre I telle que* $h(B) = C$.
3) *L'image d'une droite* (d) *par une homothétie est une droite* (d') *parallèle à* (d).
4) *Les homothéties conservent le parallélisme des droites, les mesures d'angles géométriques et les mesures d'angles orientés.*

Effet sur le barycentre

Propriété

Soient (A, a) et (B, b) deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$.

Si un point G est barycentre des points (A, a) et (B, b) alors l'image G' de G par une homothétie est le barycentre des (A', a) et (B', b) où A' et B' sont les images respectives de A et B. On dit que l'homothétie conserve le barycentre.

Exercice

Soient $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles de rayons différents, de centres respectifs O et O', tangents extérieurement en un point A.

Une droite (D_1) passant par A recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en N et le cercle $(\mathcal{C}')$ en N'.

Soit h l'homothétie de centre A telle que $h(O) = O'$.

a) Montre que M' et N' sont les images de M et N par h.

b) En déduire que les droites (MN) et (M'N') sont parallèles.

SEQUENCE 56

Réciproque d'une homothétie et configurations clés

Objectifs

- Définir la réciproque d'une homothétie ;
- utiliser les configurations-clés

Propriété

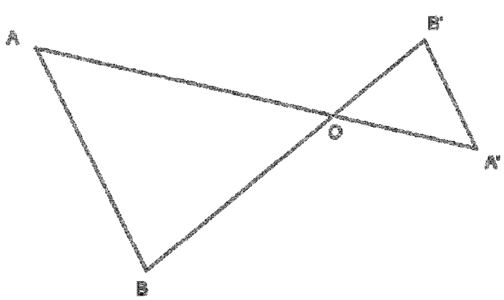
Une homothétie est une bijection du plan dans lui-même.

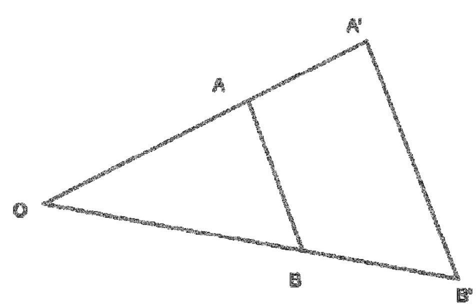
La transformation réciproque d'une homothétie de centre O et de rapport k non nul est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.

On a donc : $M' = h_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow OM = \frac{1}{k}.\overrightarrow{OM'}$

$$\Leftrightarrow M = h_{\left(O,\frac{1}{k}\right)}(M').$$

Homothétie et configuration-clés





Sur les deux figures, on a :

- O, A, A', des points alignés
- O, B et B' des points alignés

- (AB) ∥(A’B’).

Ces deux types de figures (appelées aussi configurations de Thalès) déterminent une homothétie de centre O qui transforme A en A’ et B en B’.

Les triangles OAB et OA’B’ sont appelés des triangles homothétiques.

SEQUENCE 57

Composée de deux homothéties de même centre

Objectifs

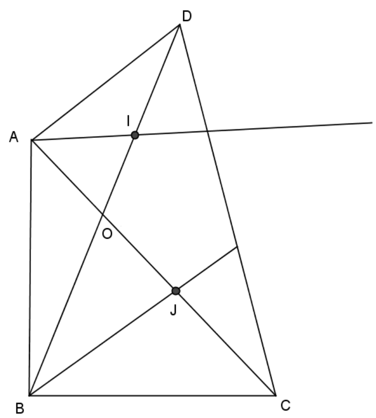
Composer deux homothéties

Théorème

Si h_1 est une homothétie de centre O, de rapport k_1 et h_2 une homothétie de même centre O de rapport k_2 alors $h_1 o\, h_2$ est l’homothétie de centre O et de rapport $k_1 \times k_2$.

En outre, on a : $h_1 o\, h_2 = h_2 o h_1$.

Exercice



ABCD est un quadrilatère, O est l’intersection des diagonales.

La parallèle à (BC) menée par A coupe (BD) en I, la parallèle à (AD) passant par B coupe (AC) en J.

a) h_1 est l’homothétie de centre O qui transforme A en C et h_2 est l’homothétie de centre O qui transforme B en D. Quelle est l’image de I par h_1 ? Par $h_1 o h_2$?
b) Quelle est l’image de J par h_2 ? Par $h_1 o h_2$?
c) On sait que $h_1 o h_2 = h_2 o h_1$. Notons $h = h_1 o h_2$.
   Quelle est l’image de (IJ) par h?
   Qu’en conclus-tu ?

Leçon : Isométries

SEQUENCE 58

Définition des isométries

Objectifs

Définir une isométrie

Définition

On appelle isométrie plane, toute application du plan dans lui-même qui conserve la distance.

Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a : MN = M'N'.

Exercices

1) A, B et O sont trois points non alignés du plan, on désigne par r la rotation de centre O et d'angle α ($]-\pi, \pi[$).

Construis les points A' et B', images respectives de A et B par r et vérifie graphiquement que r est une isométrie.

2) Construis un triangle ABC, puis le point D, symétrique de A par rapport à B, et le transformé E de B par la translation du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Montre que le triangle ABC est le transformé du triangle BCD par une translation dont on précisera le vecteur.

3) ABCD est un trapèze inscrit dans un cercle, avec (AB)∥(CD).

   a) pourquoi les segments [AB] et [CD] ont-ils même médiatrice ?

   b) pourquoi le trapèze ABCD est-il isocèle ?

   c) (AD) et (BC) se coupent en I, les diagonales (AC) et (BD) en J. Pourquoi O, I et J sont-ils alignés ?

SEQUENCE 59

Propriétés des isométries

Objectifs

Utiliser les propriétés des isométries

Propriétés

Dans les propriétés ci-dessous, les points A, B et C ont pour images respectives A', B' et C' par une isométrie f.

- Si A, B et C sont alignés alors A', B' et C' sont aussi alignés. On dit que f conserve l'alignement.
- Si (AB)⊥(BC) (respectivement (AB)∥(BC)) alors (A'B')⊥(B'C') (respectivement (A'B')∥(B'C')).

On dit que f conserve l'orthogonalité (respectivement le parallelisme).

- Si Mes$\widehat{ABC} = \alpha$ alors Mes $\widehat{A'B'C'} = \alpha$. On dit que f conserve les angles non orientés.
- Deux cercles tangents ont pour images deux cercles tangents;
  Un cercle et une droite tangents ont pour image un cercle et une droite tangents.
  On dit que f conserve le contact.
- Un domaine et son image ont meme aire. On dit que f conserve l'aire.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$. On dit que f conserve le produit scalaire.
- G =bar $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} \Leftrightarrow f(G) = bar\{(A',\alpha'),(B',\beta'),(C',\gamma')\}$.
  On dit f conserve le barycentre.

SEQUENCE 60

Composition des isométries

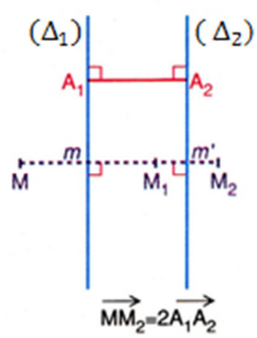
Objectifs

Composer des isométries

Composée de deux isométries

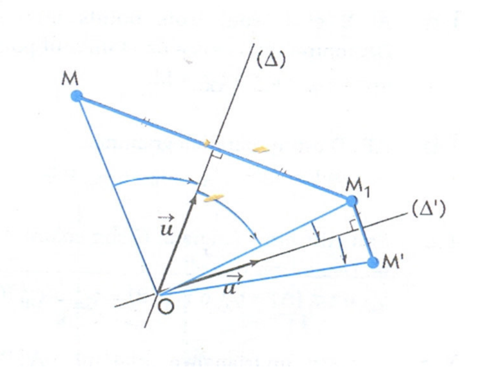
Soit S_{Δ_2} et S_{Δ_1} sont deux réflexions d'axes respectives Δ_1 et Δ_2.

a) Si Δ_1 et Δ_2 sont parallèles, $S_{\Delta_2}oS_{\Delta_1}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{A_1A_2}$, où A_1 et A_2 sont respectivement des points de Δ_1 et Δ_2 avec (A_1A_2) perpendiculaire à (Δ_1) ou à (Δ_2).



b) Si (Δ) et (Δ') sont sécantes en O par exemple,

$S_{\Delta'}oS_{\Delta}$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}})$ où A_1 est un point quelconque de (Δ) et A_2 un point quelconque de (Δ') distincts de 0.



Remarques

– On note que $S_{\Delta_1} o\, S_{\Delta_2}$ est aussi une rotation d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}})$ et $S_{\Delta_1} o\, S_{\Delta_2} \neq S_{\Delta_2} o\, S_{\Delta_1}$.

– Si $(\triangle_1) \perp (\triangle_2)$ alors $S_{\Delta_2} o\, S_{\Delta_1}$ est la rotation de centre O et d'angle $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$; c'est-à-dire symétrique de centre O.

Réflexion réciproque

Si M' est l'image de M par S_{Δ_1} alors M est l'image de M' par S_{Δ_1}. On dit que la réflexion réciproque de S_{Δ_1} est S_{Δ_1} elle-même.

Donc $(S_{\Delta_1})^{-1} = S_{\Delta_1}$ et $S_{\Delta_1} o\, S_{\Delta_1} = Idp$ (application identique du plan).

Exercices

1) Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. Démontre que :

$t_{\overrightarrow{GB}} o t_{\overrightarrow{GC}}(A) = t_{\overrightarrow{GC}} o t_{\overrightarrow{GA}}(B) = t_{\overrightarrow{GA}} o t_{\overrightarrow{GB}}(C) = G$.

2) Soit ABC un triangle équilatéral et A',B',C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

a) Quelle est la nature de la translation S_{BC} o $S_{\mathrm{B'C'}}$?

b) Détermine la droite (Δ)telle que $S_{(\mathrm{AA'})} o\, S_{\Delta} = t_{\overrightarrow{BC'}}$.

SEQUENCE 61

Composition de deux rotations et décomposition d'une rotation

Objectifs

- Composer deux rotations ;
- décomposer une rotation.

Composée de deux rotations

On rappelle que la rotation d'angle nulle est appelée application identique du plan, et que la réciproque d'une rotation d'angle α est la rotation d'angle $-\alpha$.

Cas où les rotations sont de même centre

Propriété

Soit r et r' deux rotations de même centre O et d'angles respectifs α et α'. $r' o\ r$ est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$.

Remarque

On sait que $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha$ donc d'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\begin{cases} OM' = OM \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM}}\right) \end{cases} = \alpha' + \alpha \text{ donc } r\ o\ r' = r'\ o\ r.$$

Ainsi la composition de deux rotations de même centre est commutative.

Cas où les rotations sont de centres distincts

Propriété

Si r et r' sont deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs α et α', alors $r'\ o\ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.

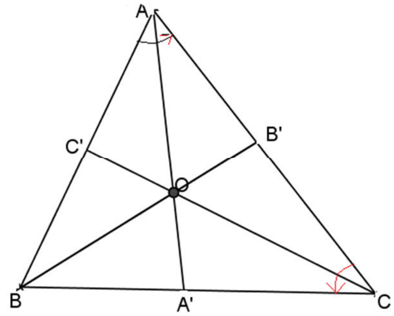
Pour déterminer le centre de $r'\ o\ r$, on décompose chaque rotation en composée de deux symétries.

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct.

Soit r et r' les rotations de centres respectifs A et C, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $r'\ o\ r$.



Désignons par A’, B’ et C’ les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

On sait que $r' \, o \, r$ est une rotation d’angle $\frac{2\pi}{3}$.

Cherchons son centre.

$r = S_{(AC)} \text{o} \, S_{(AA')} r' = S_{(CC')} \text{o} \, S_{(AC)}$

$r' o \, r = S_{(CC')} \text{o} \, S_{(AC)} o S_{(AC)} \text{o} \, S_{(AA')}$ or $S_{(AC)} \text{o} \, S_{(AC)} = Id$. Le centre cherché est le point 0.

Exercices

1) ABCD est un carré de centre O et de sens direct. On considère les rotations $r_1 = r(B, \frac{\pi}{2})$ $r_2 = r(A, \frac{\pi}{2})$ et $r_3 = r(O, \frac{\pi}{2})$.

   a) Détermine l’image de C par $r_2 o r_1$; en déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 o r_1$.

   b) Détermine l’image de C par $r_3 o r_1$; en déduire la nature et les éléments caractéristiques $r_3 o r_1$.

   c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $r_3 o r_2$.

2) ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

On pose $f = r\left(A; \frac{\pi}{3}\right) \text{o} \, r\left(B; \frac{\pi}{3}\right) o \, r\left(C; \frac{\pi}{3}\right)$.

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.

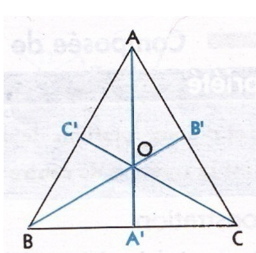
3) ABCD est un carré de sens direct.

Démontre que $r\left(A; \frac{\pi}{3}\right) \text{o} \, r\left(B; \frac{\pi}{2}\right) or \left(C; \frac{\pi}{2}\right) o \, r\left(D; \frac{\pi}{2}\right) = Id$.

Décomposition d’une rotation

On sait que toute rotation peut s’écrire de plusieurs façons comme composée de réflexions d’axes sécants.

Exemple



SEQUENCE 62

Classification des isométries

Objectif

Définir les déplacements et les antidéplacements

Définition

- *On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les angles orientés.*
- *On appelle antidéplacement, toute isométrie qui transforme l'angle orienté en son opposé.*

Exemple

Les translations, les rotations sont des exemples de déplacement.

Les réflexions sont des exemples d'antidéplacements.

Propriété

Soit $f\, et\, g$ *deux isométries planes.*

- *Si* $f\, et\, g$ *sont des déplacements, alors* $g o f$ *est un déplacement.*
- *Si* $f\, et\, g$ *sont des antidéplacements, alors* $g o f$ *est un antidéplacement.*
- *Si* f *est un déplacement et* g *un antidéplacement, donc* $f o g et g o f$ *sont des antidéplacement.*
- *Si* f *est un déplacement, alors* f^{-1} *est un déplacement.*
- *Si* f *est un antidéplacement, alors* f^{-1} *est un antidéplacement.*

Remarque

L'ensemble des déplacements muni de la loi o est un groupe appelé groupe de déplacements.

L'ensemble des antidéplacements muni de la loi o n'est pas un groupe car la loi o n'est pas interne dans l'ensemble des antidéplacements.

SEQUENCE 63

Triangles isométriques

Objectif

Définir et utiliser les triangles isométriques

Définition

- *On dit que les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques ou superposables s'il existe une homothétie f qui transforme A, B, C respectivement en A', B', C'.*
- *Si f est un déplacement, on dit que les triangles ABC et A'B'C' sont directement superposables.*
- *Si f est un antidéplacement, on dit que les triangles ABC et A'B'C' sont directement superposables après retournement.*

Théorème

Soit ABC et A'B'C' deux triangles.

Si AB = A'B' , AC = A'C', BC = B'C' alors les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques.

Exercice

ABCD est un rectangle non carré de centre O.

Soit (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives des segments [AB] et [BC].

a) Montre que le rectangle ABCD est globalement invariant par les applications suivantes: Id; S_O; S_Δ et $S_{\Delta'}$.

b) Notons (E) l'ensemble des isométries laissant globalement invariant le rectangle ABCD; c'est-à-dire (E) ={Id; S_O; S_Δ; $S_{\Delta'}$}.

Dresse le tableau de composition des éléments de (E).

c) Déduis de ce tableau que $\left((E), \circ\right)$ est un groupe de transformations.

o	Id	S_O	S_Δ	$S_{\Delta'}$
Id				
S_O				
S_Δ				
$S_{\Delta'}$				

SEQUENCE 64

Utilisation des isométries pour construire

Objectif

Utiliser les isométries pour résoudre des problèmes de construction

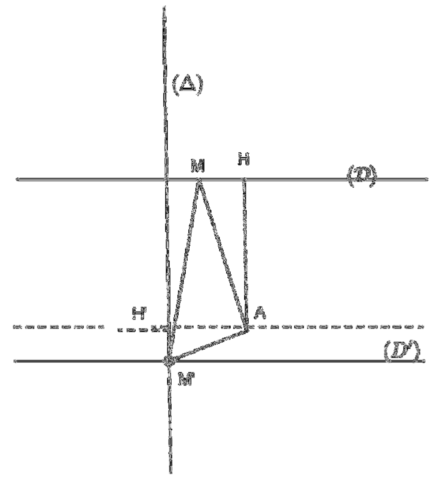
Problème de construction

Exemple

Soient deux droites parallèles $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Construisons M sur $(\mathcal{D})$ et M' sur $(\mathcal{D}')$ de façon que le triangle AMM' soit rectangle isocèle en A et de sens direct.

Il s'agit de trouver une isométrie f telle que $f(M) = M'$, $M' \in (\mathcal{D}')$ et $M \in (\mathcal{D})$.



Etape 1

On réalise la figure.

Etape 2

On analyse la figure.

Il suffit de trouver l'un des deux points M ou M' tel que le triangle AMM' soit rectangle en A à l'aide d'une isométrie f.

Ici, l'isométrie qui convient est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

En effet, elle transforme M en M'. M' $= f(M)$ avec $M \in (\mathcal{D})$.

Etape 3

Examen de la condition obtenue.

Il s'agit de vérifier si la condition qu'on vient d'obtenir est suffisante. Ici, oui.

Etape 4

Construction et rédaction.

Construisons l'image (Δ) de $(\mathcal{D})$ par f.

Comme (Δ) est orthogonale à $(\mathcal{D})$, elle est sécante à $(\mathcal{D})$. Le point d'intersection M' de (Δ) avec $(\mathcal{D})$ est le point cherché.

D'où l'on déduit la construction de M.

SEQUENCE 65

Utilisation des isométries pour rechercher des lieux géométriques

Objectif

Utiliser les isométries pour rechercher des lieux géométriques

Recherche de lieu géométrique

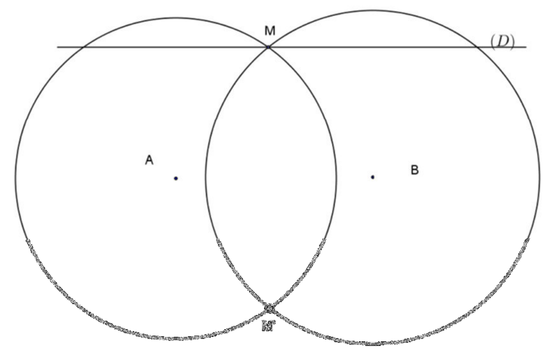
On donne une figure géométrique ainsi qu'un point M par exemple qui peut « bouger » sur une ligne.

Un autre point associé à M (N par exemple « bouge »).

A chaque fois qu'on change la position de M, celle de N change aussi mais suivant quelle ligne ? C'est cette ligne qu'on appelle lieu géométrique du point N.

Exemple

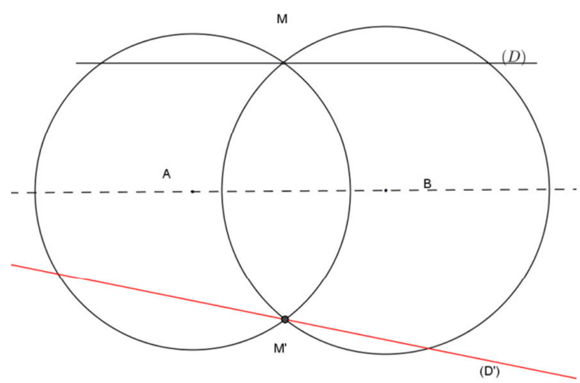
Soit $(\mathcal{D})$ une droite et deux points A et B n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$.



Pour tout point M de $(\mathcal{D})$, en considérant les cercles de centre A et B passant par M, ils se coupent en un autre point désigné M'.

Quel est le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit $(\mathcal{D})$?

Il semble qu'il existe une isométrie qui transforme M en M'.



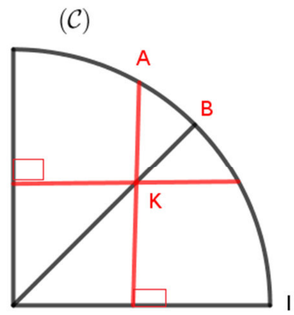
Cette isométrie semble être une réflexion d'axe (AB).

Les égalités AM =AM' et BM = BM' montrent (AB) est la médiatrice de [MM'] et donc que la réflexion d'axe (AB) transforme M en M'.

Le lieu géométrique de M'est donc la droite $(\mathcal{D}')$, image de $(\mathcal{D})$par $S_{(AB)}$.

Exercices d'entrainement de la compétence de base 1 du deuxième trimestre

Exercice 1



Détermine les coordonnées des points A, B et C du cercle $(\mathcal{C})$ où K est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 2

Quels sont les cosinus et le sinus des angles $(\vec{\imath},\vec{u})$ et $(\vec{u},\vec{\jmath})$ où $\vec{u} = \vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}$?

Exercice 3

Montre que pour tout réel x :

a. $(cosx + sinx)^2 + (cosx - sinx)^2 = 2.$

b. $(1 + cosx + sinx)^2 = 2(1 + cosx)(1 + sinx)$.

Exercice 4

Détermine les coordonnées des points A(α) et B(β) de $(\mathcal{C})$ sachant que :

a) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ et $cos\alpha = \frac{5}{13}$.

b) $\frac{\pi}{2} < k < \pi$ et $sin\beta = \frac{12}{13}$.

Que peux-tu dire des points A et B?

Exercice 5

a) Quelles sont les coordonnées cartésiennes des points de coordonnées polaires :(0,0) ; $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$; $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$; $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$; $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(2\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right)$; $\left(2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$; $\left(2,\frac{5\pi}{6}\right)$?

b) Place ces points dan le plan muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

c) Calcule leurs distances au point (0,1).

d) Déduis-en que tous les points sont sur le cercle de centre J et de rayon 1.

Exercice 6

On pose $C = cos\frac{\pi}{9}$ et $S\ = sin\frac{\pi}{9}$.

Exprime en fonction de C ou de S les cosinus et sinus de :

$\frac{8\pi}{9}$; $-\frac{10\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{9}$; $\frac{11\pi}{18}$.

Exercice 9

Trouve la mesure principale associée à chaque mesure (exprimée rd) :

$\alpha_1 = \frac{212}{5}\pi$; $\alpha_2 = \frac{-55}{7}\pi$; $\alpha_3 = \frac{-551}{7}\pi$; $\alpha_4 = -6\pi + \frac{4}{3}\pi$; $\alpha_5 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)\pi$; $\alpha_6 = \frac{202}{3}\pi$.

Exercice 10

Place sur le cercle trigonométrique les points d'abscisse curvuligne x tel que :

a. $2x = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $2x = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b. $2x = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $2x = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Exercice 11

Résous chacune des équations trigonométriques suivantes :

a. $\sqrt{2} + 2cosx = 0$;

b. $sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$

c. $4sin^2x - 3 = 0$;

d. $cosx = sin\frac{\pi}{8}$.

e) $cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

f. $cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

Exercice 12

a. Calcule les coordonnées polaires de $sin\alpha(6)$ points suivants :

A $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; B$\left(0, \frac{4}{3}\right)$; C$\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, D$\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, E$\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ et F$\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

b. Montre que ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

Exercice 13

Construis les points de coordonnées polaires :

A $\left(2, \frac{5\pi}{12}\right)$; B$\left(2, \frac{11\pi}{12}\right)$; C$\left(2, -\frac{7\pi}{12}\right)$ et D$\left(2, -\frac{\pi}{12}\right)$.

Montre que ABCD est un rectangle.

Exercice 14

ACDE est un carré de côté 1 et ACB est un triangle équilatéral intérieur au carré ACDE. (On considère que le plan est orienté dans le sens direct).

a. Montre que $\widehat{BED} = \frac{\pi}{12}$.

b. Calcule BH et en déduire que $tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

(H est le projeté orthogonal de B sur le segment [ED]).

c. En déduire que : $cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Exercice 15

Résous les équations et représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $cos2x > 0$; b) $sinx < 0$; c) $cosx < 0$; d) $\sin 2x \leq \frac{1}{2}$; e) $2cos2x \geq 0$.

Exercice 16

En utilisant les formules d'addition, donne les valeurs exactes de:

a) $cos\frac{7}{12}$ et $sin\frac{7}{12}$.

b) $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 17

Montre que, pour tout réel α, on a :

a) $sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos(7\pi + x) = -2sinx$.

b) $cos\left(708\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(561\frac{\pi}{2}\right) = +2$.

c) $\cos(x + \pi) + sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + sin\left(x + 3\frac{3\pi}{2}\right) + \sin(x + \pi) = -sinx$.

d) $sinx + sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

Exercice 18

On désigne par E l'ensemble des réels privés des points $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

1. Montre que, pour chaque $x, y \in E$, $tanx = tany$ équivaut à :

   « il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\pi$ ».

2. Résous chacune des équations suivantes :

   a) $tanx = 3$

b) $tanx = -1$

c) $tanx = -\sqrt{3}$

3. Représente sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions de l'équation: $tan4x = tanx$.

Ces points sont les sommets d'un polygone particulier. Lequel ?

Exercice 1

Voici les 4 premiers termes d'une suite numérique :$\frac{1}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{7}{27}$; $\frac{10}{81}$ ...

a) Conjecture les deux termes suivants de cette suite.

b) Conjecture une formule explicite donnant le terme de rang n de cette suite.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = n + u_n \end{cases}$$

a) Calcule u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

b) Conjecture une formule explicite donnant le terme général de cette suite.

Exercice 3

Détermine, s'il existe un minorant et un majorant des suites définies par :

a) $u_n = -n^2 + 1, n \in \mathbb{N}$;

b) $v_n = 2 - \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*$;

c) $w_n = -1 + 2\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Dire si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, dans les cas suivants :

a) $u_n = -\frac{5}{7}n + 2$;

b) $u_n = 3$;

c) $u_n = \sqrt{n}$;

d) $u_n = (n+3)^2 - (n+1)^2$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, détermine sa raison.

Exercice 5

Parmi les suites (u_n) définies ci-dessous, préciser lesquelles sont géométriques. Détermine dans ce cas le terme u_0 et la raison q.

a) $u_n = -5 \times 3^n$;

b) $u_n = \frac{5n+2}{n+1}$;

c) $u_n = 2n - 5$;

d) $u_n = \frac{(-2)^{3n}}{3^{n+1}}$

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

a) Détermine deux nombres réels $a\ et\ b$ tels que :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

b) Calcule, en fonction de n, la somme S_n des n premiers termes de cette suite.

c) Calcule la limite de la suite (S_n).

Exercice 7

Etudie le sens de variation de chacune des suites géométriques (u_n) :

a) $u_n = 3 \times (-2)^n$;

b) $u_n = -4 \times 2^{4n}$;

c) $u_n = \frac{\sqrt{3}}{5^n}$;

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_n = \frac{n^2}{n+1}$.

Démontre que, pour tout entier $n \geq 1, u_n \geq \frac{1}{2}n$.

Déduis-en la limite de la suite (u_n).

Exercices d'entrainement de la compétence de base 2 du deuxième trimestre

Exercices 1

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition associative, avec élément neutre et telle que tout élément de E possède un inverse à gauche.

Montre que tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche.

En déduire que E est un groupe.

Exercices 2

On définit l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2}/m, n \in \mathbb{Z}\}$.

a) Montre que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ constitue un groupe.
b) La multiplication usuelle $\times$ ou . des reels est-elle une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?
c) Est-elle commutative ? Associative ?

   Admet-elle un élément neutre ? Si oui, lequel ?

Exercices 3

On définit sur un ensemble $G =]-1,1[$ une loi par * :

$\forall x, y \in G, x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

Montre que (G,*) est un groupe abélien.

Exercices 4

Soit * la loi définie sur $\mathbb{R}$ par :

$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

a) Vérifie que * est commutative , non associative et admet un élément neutre.
b) Résous les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

   $(1)\ 2 * x = 5$; $(2)\ x * x = 1$.

Exercices 5

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

On munit E de la loi de composition définie par :

$\forall (x, y) \in E^2, x * y$ est le reste de la division euclidienne de x^y par 5.

a) Vérifie que * est une loi de composition interne dans E. (E,*) est-il un groupe?
b) Résous dans E les trios équations d'inconnue x:

   $(3 * x) * 2 = 1$; $4*(2*x) = 1$; $(3 * x) * 3 = 5$.

Exercices 6

Sur $\mathbb{R}$, on définit la loi de composition interne * :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = x + y - xy$.

Etudie les propriétés de la loi *.

Exercices 7

Sur $\mathbb{R}$, on définit la loi T par :

$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, xTy = \mathscr{k}xy + \mathscr{k}'(x+y)$ avec $\mathscr{k}$ et $\mathscr{k}'$ deux réels donnés.

a) T est-elle une loi de composition interne ?

b) Est-elle commutative ?

c) Détermine $(\mathscr{k}, \mathscr{k}')$ pour que T soit associative.

Exercices 8

On considère les quatre applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^*$:

$f_1(x) = x$; $f_2(x) = \frac{1}{x}$; $f_3(x) = -x$; $f_4(x) = -\frac{1}{x}$.

Montre que G $= \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi o.

Exercices 10

Soit G $= \{e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ muni de la loi * un groupe.

Complète sa table.

(On ne demande pas de justification).

e est un élément neutre de G.

*	e	α	β	γ	δ	ε
e						
α			δ			γ
β		ε		δ	γ	
γ		δ				
δ			α		ε	e
ε		β		α		

Exercices 11

Soit E l'ensemble des parties d'un ensemble à deux éléments, par exemple

E =P({0,1}) donc E =P$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

On considère les lois de composition suivantes sur E :

a) Différence symétrique: A*B = (A\B)∪(B\A).

b) Réunion des complémentaires: A*B= $\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$

c) Intersection des complémentaires: A*B=$\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$.

Pour chacune d'entre elles :

a) Ecris la table de la composition de la loi*.

b) La loi est-elle associative?

c) La loi est-elle commutative?

d) L'ensemble E muni de la loi * est-il un groupe?

Exercices 12

On considère les applications suivantes, de $\mathbb{R}\backslash\{0,\}$ dans lui-même.

$f_{1:x\longmapsto x}$; $f_{2:x\longmapsto 1-x}$; $f_{3:x\longmapsto}\frac{1}{1-x}$; $f_{4:x\longmapsto\frac{1}{x}}$ $f_{5:x\longmapsto}\frac{x}{x-1}$ et $f_{6:x\longmapsto\frac{x-1}{x}}$.

On connait $\mathrm{E}=\{f_1;\ f_2\ ;\ f_3\ ;\ f_4;\ f_5;\ f_6\}$ de la composition des applications.

1) Ecris la table de composition de (E,o).

2) Montre que G = (E,o) est un groupe.

Est-ce un groupe abélien?

Exercices d'entrainement de la compétence de base 3 du deuxième trimestre

Exercice 1

A et B sont deux oints du plan, A' et B' sont leurs images respectives par une homothétie de rapport k.

Alors :

a) $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{A'B'}$

b) $\overrightarrow{AA'} = k.\overrightarrow{BB'}$

c) $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$

Laquelle des trois réponses est-elle vraie ?

Exercices 2

ABC est un triangle isocèle tel AB = AC.

Alors le segment [AB] peut être transformé en segment [AC] :

a) Une homothétie

b) Une rotation

c) Une translation.

Laquelle des trois réponses est-elle vraie ?

Exercices 3

a) ABCD est un parallélogramme, I est le point tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, h est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{4}$.

Quel est le point $h(D)$? Comment construire simplement le point E tel que $h(E) = B$?

b) F est le milieu de [BC], G le milieu de [DE].

Montre que les points I, F et G sont alignés.

Exercices 4

f est la transformation définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2x + 1 \end{cases}$.

a) Détermine les points A', B', C', images respective par f des points A(1;4), B$(2; -1)$ et C$(-4; 0)$. Faire une figure.

b) Compare $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$, puis $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$.

c) Constate sur la figure que les droites (AA'), (BB') et (CC') semble concourantes.

d) Montre qu'il existe un unique point I confondu avec son image. (On dit que I est invariant par f)

e) M est un point quelconque. Compare les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$.

Conclut alors sur la nature de f.

Exercice 5

h est l'homothétie de centre I$(2 ; -1)$, de rapport $-\frac{2}{3}$.

a) Définis h analytiquement.

b) (d) est la droite d'équation $x - 3y + 5 = 0$.

Donne une equation $(d') = h(d)$.

c) (Δ) est une droite d'équation $x + 3y + k = 0$.

Pour quelle valeur de k, (Δ)passe-t-elle par I ?

Quelle est l'image de (Δ) par h ?

d) $(\mathcal{C})$ est le cercle d'équation $x^2 - 8x + y^2 - 2y + 8 = 0$.

Trouve une équation de $(\mathcal{C}) = h((\mathcal{C}))$.

Exercice 6

ABC est un triangle non équilatéral, A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]. H est l'orthocentre du triangle ABC, G son centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit.

1)

a) Par quelle homothétie h, le triangle ABC est-il transformé en le triangle A'B'C'?

b) Quelle est l'orthocentre du triangle A'B'C'?

c) Déduis des questions précédents que $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

d) Ω est le centre du cercle $(\mathcal{C}')$ circonscrit au triangle A'B'C'.

Montre que Ω est le milieu de [OH].

La droite qui passe par les trois points O,G,H, Ω est la droite d'Euler du triangle ABC.

2)

a) quelles sont les deux homothéties transformant $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$?

b) déduis de ce qui précède que les milieux respectifs A_1, B_1, C_1 des segments [HA], [HB] et [HC] sont diamétralement opposés à A', B',C' respectivement sur le cercle $(\mathcal{C})$.

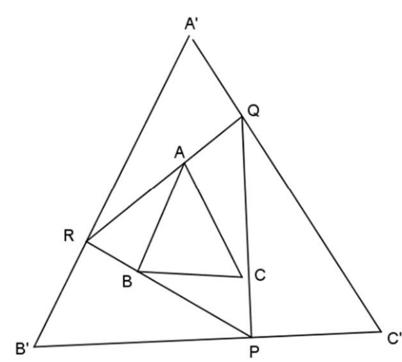
c) Montre que les pieds A'', B'', C'' des hauteurs du triangle ABC sont sur le cercle $(\mathcal{C}')$.

Le cercle $(\mathcal{C}')$ contient les points contient les points A', B', C', A_1, B_1, C_1,A'', B'', C''.

On l'appelle « cercle de neuf points » du triangle ABC.

Exercice 7

ABC est un triangle équilatéral. Par A, on mène la perpendiculaire à (AC), par B, la perpendiculaire à (AB) et par C, la perpendiculaire à (BC). Ces droites se coupent
en P, Q et R.



a) Montre, par des calculs d'angles, que le triangle PQR est équilatéral.

b) A'B'C' est le triangle dont les côtés sont parallèles aux côtés du triangle ABC et contiennent les sommets du triangle PQR comme sur la figure.

1) Les droites (A'A) et (B'B) se coupent en I.

On note h l'homothétie de centre I qui transforme A' en A.

Quelle est l'image de B' par h ? Celle de C'

2) La droite parallèle à (QR) menée par A', la parallèle à (PR) menée par B' la parallèle à (PQ) menée par C' déterminent un triangle P'Q'R' dont PQR est l'image par l'homothétie considérée. Justifie.

Donne alors une construction de I qui n'utilise pas les points A, B et C.

Exercice 8

(D) et (D') sont deux droites parallèles.

Place le centre d'une homothétie de rapport $\frac{3}{2}$ qui transforme (D) en (D').

Quel est l'ensemble des centres des homothéties de rapport $\frac{3}{2}$ qui transforme (D) en (D') ?

Exercice 9

[AB] est un segment de milieu O, M est un point n'appartenant pas à la droite (AB). C'est le symétrique de A par rapport à M. Les droites (BM) et (OC) se coupent en H. P est le milieu de [BC].

a) Précise l'homothétie de centre A qui transforme M en C.
b) Précise l'homothétie de centre B qui transforme M en H.
c) On suppose que M se déplace sur une droite fixe (Δ).

Sur quelle ligne se déplace le point C ? Le point H ? Le point P milieu de [BC].

Exercice 10

f est la transformation définie analytique par : $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = -2y \end{cases}$.

a) Démontre qu'il existe un seul point, noté I confondu avec son image.
b) Compare alors les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$.
c) Quelle est la transformation?

Exercice 11

A et B sont deux points donnés fixes. A chaque point M, on associe le point I, milieu de [AM], le point J milieu de [BM], le point E milieu de [AJ], le point F milieu de [BI].

On note f est la transformation qui, à M associe E et g la transformation qui à M associe F.

a) Montre que f et g sont des homothéties. Précise le centre et le rapport de chacune d'elles.
b) C est un point fixé.

On pose $F_o = C$ et pout tout naturel n , $F_{x+1} = g(F_n)$, puis on pose $F_o = C$ et pout tout naturel n , $F_{x+1} = g(F_n)$,n , $F_{x+1} = g(F_n)$.

Enfin on pose: $x_n = E_n F_n$.

Etudie la limite de la suite (x_n).

Exercice12

ABCD est un trapèze. Les côtés non parallèles (AD) et (BC) se coupent I, les diagonales en J. E est le milieu de [AB] et F celui de [DC].

h est l'homothétie de centre I qui transforme A en D, h_2 est l'homothétie de centre J qui transforme A en C.

a) Quelle est l'image de B par h_1 ? Celle de E ?
b) Quelle est l'image de B par h_2 ? Celle de E ?
c) Déduis de a) et b) que I,J,E,F sont aligné.

Exercice 13

On se place dans un repère orthonormé du plan. Soient deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de centres respectifs O(o,o) et O'(4,0) et de rayons 2 et 1. Fais la figure.

1) Soit l'homothétie de rapport -2 transformant O en O'.
   a) Montre que l'écriture analytique de h est:

   $$M(x,y) \longmapsto M'(x',y'): \begin{cases} x' = -2x + 4 \\ y' = -2y \end{cases}.$$

   b) Vérifie alors que l'image de $(\mathcal{C})$ est bien $(\mathcal{C}')$.
   c) Quelles sont les coordonnées du centre Ω de h?
2) Il existe une deuxième homothétie transformant $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$ mais de rapport 2. Trouve son écriture analytique puis les coordonnées de son centre.
3) Construis les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de diamètres respectifs ΩO et ΩO$'$. Ces cercles coupent $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ en P, P', Q et Q' ?

   Que peut-on dire des droites (PQ), (P'Q), (PQ') et (P'Q') ?

   Calcule la distance PQ.

Exercice 14

Dans le plan, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

On appelle Γ le cercle circonscrit à ABC, I le milieu de [AB] et J celui de [OI].

Les droites (OA) et (OC) recoupent Γ respectivement en D et E.

a) Fais la figure (unité :OA=4 cm).

b) On note G l'isobarycentre de A, B, C, D et E.

Exprime $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$ puis en fonction de $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OD}$.

En déduire une construction géométrique simple de G.

A tout point M du plan, on fait correspondre le point M'=$f(M)$

défini par $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MO}$.

Montre que f est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

EVALUATION

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \end{cases}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1.$

a) Démontre que$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

b) Exprime u_n et v_n en fonction de n.

c) Déduis-en les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercices 2

On munit $\mathbb{R}^{*+}$ de la loi de composition interne * définie par :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^{*+}, x * y = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Montre que * est commutative, associative et que 0 est élément neutre.

Montre que aucun élément de $\mathbb{R}^{*+}$ n'a de symétrique pour *.

Exercice 3

1) A est le point de coordonnées $(-1,2)$. M est un point de coordonnées (x, y), M' est l'image de M par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

   a) Exprime les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles de M.

   b) Donne une équation de la droite image par h de la droite d'équation: $2x + 3y - 1 = 0$ par h

2) h est l'homothétie de centre O et de rapport 2.

   $(\mathcal{C})$ est la courbe d'équation : $y = \sqrt{x}$.

   Démontre qu'une équation de $(\mathcal{C}')$, image de $(\mathcal{C})$ par h est $y = 2\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Difficultés rencontrées liées à la résolution de l’exercice :

- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………

Conseils et orientation de l’enseignant :

- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………

Evaluation de la compétence :

 ☐ ☐ ☐

Troisième trimestre

Programmation horaire du 3e trimestre

<table>
<tr><td rowspan="2">3e trimestre</td><td rowspan="2">Compétences</td><td rowspan="2">Chapitres</td><td rowspan="2">Titres des chapitres</td><td colspan="3">Durée d'exécution</td><td rowspan="2">Durée des chapitres</td><td rowspan="2">Nombre d'heures du Trimestre</td></tr>
<tr><td>Cours</td><td>TD</td><td>Evaluation</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Avril- juin

(4-13 Avril : Congé)

9 semaines</td><td>CB1</td><td>5</td><td>Etude de fonctions</td><td>10H</td><td>2H</td><td rowspan="2">2H</td><td>14H</td><td rowspan="4">45H</td></tr>
<tr><td>CB2</td><td>7</td><td>Statistique</td><td>8H</td><td>2H</td><td>12H</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CB3</td><td>7</td><td>Similitude</td><td></td><td>2H</td><td rowspan="2">2H</td><td>9H</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Espace vectoriel</td><td></td><td></td><td>10H</td></tr>
</table>

FICHE DE PROGRESSION

Trimestre	Période	Contenus		
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité	CB3 : Géométrie
3	1er Avril au 10 Mai	– Etude de fonctions	– Statistiques	– Similitude
	11 Mai au 10 Juin			– Similitude (Suite et fin) – Espace vectoriel

Troisième trimestre

Compétence de Base 1

Terminale D–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre l'étude de fonctions.			
	Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
	Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
	Etude de fonctions	– Etudier et représenter les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3. – Etudier et représenter les fonctions rationnelles. – Etudier et représenter les fonctions circulaires.	- Etude et représentation des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3. - Etude et représentation des fonctions rationnelles. – Etude et représentation des fonctions circulaires.

Compétence de Base 2

Terminale D–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les statistiques.			
	Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
	Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
	- Statistiques	- Définir une série statistique à deux caractères. - Représenter un nuage de points d'une série statistique à deux caractères (cas de points pondérés, point moyen). - Déterminer un ajustement linéaire d'une série statistique à deux caractères par la méthode de moindres carrés. - Déterminer la corrélation linéaire d'une série statistique à deux caractères.	- Définition d'une série statistique à deux caractères. - Représentation d'un nuage de points d'une série statistique à deux caractères (cas de points pondérés, point moyen). - Détermination d'un ajustement linéaire d'une série statistique à deux caractères par la méthode de moindres carrés. - Détermination de la corrélation linéaire d'une série statistique à deux caractères.

Compétence de base 3

Première S/E–CB3 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre l'espace vectorielle les similitudes et l'espace vectoriel.		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
- Similitude	- Définir une similitude. - Classifier les similitudes selon leurs effets sur les angles orientés. - Reconnaitre et démontrer que deux triangles sont semblables. - Ecrire une similitude directe comme composée d'une homothétie et d'une rotation.	- Définition d'une similitude. - Classification des similitudes selon leurs effets sur les angles orientés. - Reconnaissance et démonstration des triangles semblables. - Ecriture d'une similitude directe en la composée d'une homothétie et d'une rotation.
- Espace vectoriel	- Définir un espace vectoriel. - Donner quelques exemples simples d'espaces vectoriels. - Enumérer quelques règles de calcul. - Définir une famille de vecteurs : vecteurs libres, vecteurs liés. - Définir une application linéaire et donner quelques exemples simples d'application linéaire.	- Définition d'un espace vectoriel. - Quelques exemples simples d'espaces vectoriels. - Enumération de quelques règles de calcul. - Définition d'une famille de vecteurs : famille libre, famille liées. - Définition d'une application linéaire et quelques exemples simples d'application linéaire.

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

7. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
8. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
9. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
10. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
11. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
12. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base du troisième trimestre

Leçon : Etude de quelques fonctions

SEQUENCE 1

Propriétés géométriques des courbes : asymptotes

Objectif

Définir une asymptote et donner son équation

Asymptote horizontale

Définition

Soit f une fonction. Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ *(ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$*), on dit la droite d'équation*

$y = l$ *est asymptote horizontale à la courbe de f en* $+\infty$ *(ou en* $-\infty$*).*

Exemple

Soit $f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2+5}$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f *contenant l'intervalle*

$]x_0\ ;\ x_0 + \alpha\ [$.

On dit que la droite d'équation x= a est asymptote verticale à la courbe de f lorsque la limite de f en a est infinie (éventuellement limite à gauche et limite à droite en a).

Exemple

Soit $f(x)=\frac{-x}{x-2}$

$D_f=]-\infty\ ;\ 2[\ \cup\ ]2\ ;\ \infty\ [$

On a : $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe de *f.*

Asymptote oblique

Soit f une fonction. Lorsque $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$ *(ou* $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)]) = 0$, *on dit la droite d'équation y = ax+b est asymptote à la courbe de f en* $+\infty$ *(ou en* $-\infty$*).*

Exemple

Soit $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}$

On a : $lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$ donc la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

SEQUENCE 2

Propriétés géométriques des courbes : éléments de symétrie

Objectif

Déterminer le centre ou l'axe de symétrie d'une courbe représentative d'une fonction

Centre de symétrie

Méthode

Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pour démontrer que le point $\Omega(a\,;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$,on peut :

- ou bien montrer que dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction impaire ;
- ou bien montrer que pour tout h et a tels que $a+h$ appartient au domaine de définition de f, $a-h$ appartient au domaine de définition de f et on a : $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2} = b$

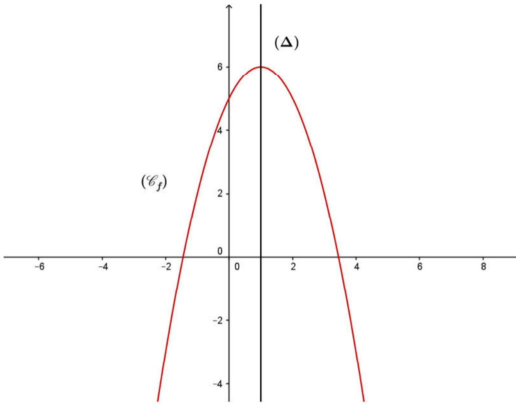
Axe de symétrie

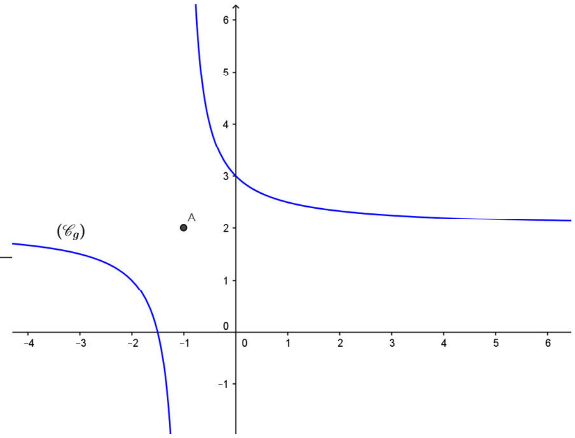
Méthode

Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pour démontrer que la droite d'équation $x=a$ est axe de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$, on peut :

- ou bien montrer que dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\Omega(a;0)$, $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction paire ;
- ou bien montrer que pour tout h et a tels que $a+h$ appartient au domaine de définition de f, $a-h$ appartient au domaine de définition de f et on $f(a-h)=f(a+h)$.





Courbe admettant un axe de symétrie.   Courbe admettant un centre de symétrie.

Exemple

Les courbes ci-dessus sont celles d'une fonction f et d'une fonction g.

Démontre que la droite (Δ) est axe de symétrie à la courbe de f et que le point A est centre de symétrie de la courbe de g sachant que $f(x) = -x^2+2x+5$ et $g(x)=\frac{2x+3}{x+1}$.

SEQUENCE 3

Parité d'une fonction

Objectif

Etudier la parité d'une fonction

Propriétés

- *f est une fonction définie sur un intervalle I :*

f est paire si, et seulement si, pour tout réel x de I, $-x$ apparient à I et $f(-x)=f(x)$.

- *f est une fonction définie sur un intervalle I :*

f est impaire si, et seulement si, pour tout réel x de I, $-x$ apparient à I et $f(-x)=-f(x)$.

Remarques

- La représentation graphique d'une fonction paire dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet $(O, \vec{\jmath})$ comme axe de symétrie.
- La représentation graphique d'une fonction impaire dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet O comme centre de symétrie.

Exemple

Etudier la parité des fonctions f et g définies par $f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$ et $g(x)=x^3 \sin x$.

SEQUENCE 4

Périodicité d'une fonction

Objectif

Etudier la périodicité d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f *et p un nombre réel non nul.*

On dit que f est périodique de période p si, pour tout x élément de D_f*, x+p appartient au domaine de définition de f et on a :*

$f(x+p)=f(x)$.

Exemple

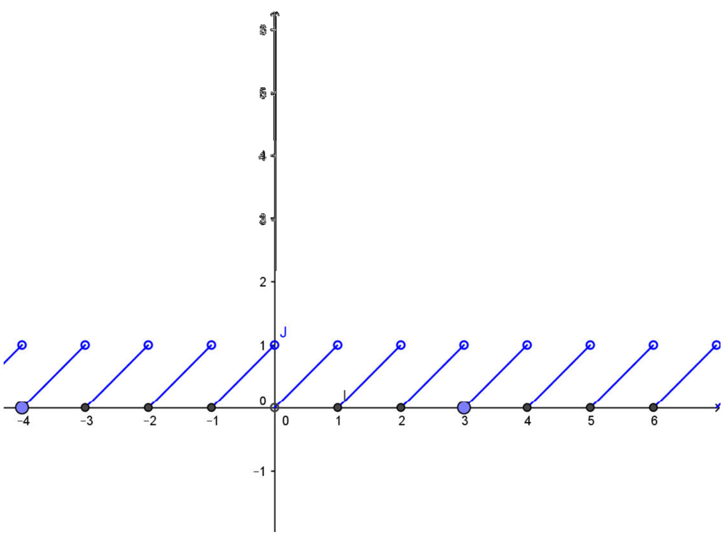
Soit $m(x)$ la fonction mantisse de x.

On sait *que* $m(x)=x-E(x)$ *où* $E(x)$ désigne la partie entière de x.

m est périodique de période 1.

En effet :

Si $x \in D_m$, $x+1 \in D_m$, *et* $m(x+1)= x+1- E(x+1)= x+1- E(x)- 1= m(x)$ *(car on sait que* $E(x+1)=E(x)+1$*)*



Courbe représentative de la fonction $m(x)$

SEQUENCE 5

Exemples d'étude de fonctions : plan d'étude de fonctions

Objectif

Elaborer un plan d'étude de fonctions

Plan d'étude de fonctions

Avant de donner quelques exemples d'étude de fonctions, on propose un plan détaillé lorsqu'aucune indication n'est donnée sur l'étude :

- ensemble de définition de la fonction ainsi que l'étude de la continuité sur cet ensemble ;
- étude (éventuelle) des propriétés géométriques particulières (**parité, périodicité**) afin de trouver un ensemble réduit dans lequel la fonction sera étudiée ; cet ensemble s'appelle **ensemble d'étude** ;
- calcul des **limites** aux bornes de l'ensemble d'étude ;
- calcul de la **dérivée** sur l'ensemble de dérivabilité, étude du **signe** de cette dérivée et **tableau de variation ;**
- étude (éventuelle) des **branches infinies** afin de déterminer les **asymptotes** ;
- **représentation graphique** de la fonction après avoir cherché quelques **points** de la courbe et tracé les éventuelles **tangentes** ou **demi-tangente** ;
- contrôle de certaines propriétés (**axe et centre de symétrie**) après avoir conjecturé leur existence sur le graphique.

SEQUENCE 6

Exemples d'étude de fonctions polynômes

Objectif

Etudier les fonctions polynômes

Exemple

Soit la fonction f: $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Étudions f.

- f étant une fonction polynôme, son domaine de définition est : $D_f = \mathbb{R}$.

f est continue sur son domaine de définition.

- Il n'y a rien en vue quant à la parité et la périodicité.

- Calculons la limite en $-\infty$ et en $+\infty$:

- $lim_{x\to+\infty} f(x)= lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$
- $lim_{x\to-\infty} f(x)= lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

Remarque

Il est conseillé d'écrire l'ensemble de définition sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles afin de recenser toutes les bornes où calculer les limites.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

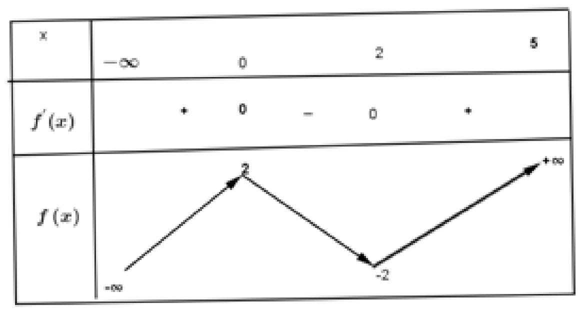
f' étant un polynôme du second degré, on a :

$\forall x\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]2;+\infty[\,f'(x)>0$

$\forall x\in\,]0;2[\,f'(x)<0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$.

D'où le tableau de variation ci-contre :



Remarquons qu'il est nécessaire de vérifier si le tableau de variation est « cohérent »c'est-à-dire que f doit croitre d'une petite valeur à une grande valeur et que f doit décroitre d'une grande valeur à une petite valeur.

- Les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ prouvent que la courbe de f n'admet pas d'asymptote.

Par contre $f(x)=x^3-3x^2+2=x^3(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3})$ donc pour x « grand », on a l'approximation suivante

$f(x)\approx x^3$ donc en $-\infty$ et en $+\infty$, la courbe de, la courbe de f a la même allure que celle de la fonction $x\mapsto x^3$.

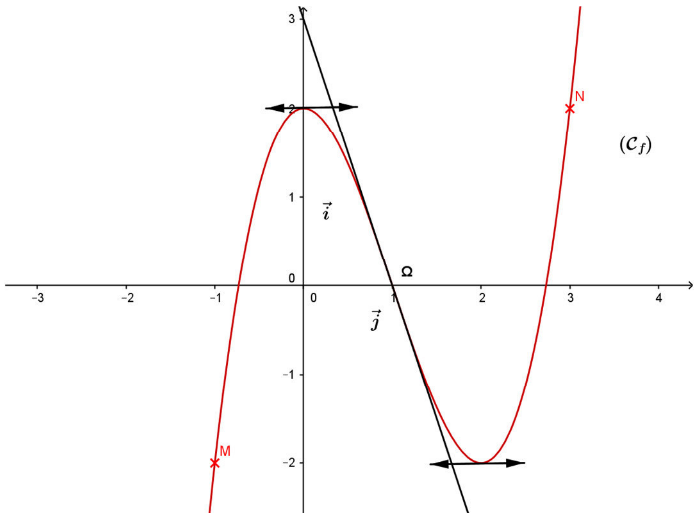
On dit que la courbe de f a une branche parabolique direction $(O,\vec{j})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Courbe de f

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

- La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ soit $y=-3x+3$.

- $(\mathcal{C}_f)$ admet deux extremums locaux aux points d'abscisses 0 et 2.



- La figure suggère que le point $\Omega(1\,;0)$ est centre de symétrie.

On peut le démontrer en utilisant l'une des méthodes suivantes :

1ère méthode

$\frac{f(1-h)+f(1+h)}{2}=\frac{h^3+3h+h^3-3h}{2}=0$ donc Ω est bien centre de symétrie.

2eme méthode

Posons $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y \end{cases}$

Alors $M(x;y) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow Y=(X+1)^3-3(X+1)^2+2$

$\Leftrightarrow Y = X^3-3X$

Dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,la courbe représentative de la fonction $X \mapsto X^3-3X$ est celle d'une fonction impaire donc Ω est bien centre de symétrie de la courbe de f.

SEQUENCE 7

Exemples d'étude de fonctions rationnelles

Objectif

Etudier les fonctions rationnelles

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ et on désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Etudions f (On démontrera que la droite *(D)* d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe de f).

- f est définie pour tout réel x différent de 1 donc

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

f est continue sur son domaine de définition.

- Il n'y a rien en vue quant à la parité ou la périodicité.
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

- f est dérivable sur son domaine de définition et

$\forall\, x \in D_f,\ f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

f' est du signe de $x(x-2)$

$\forall\ x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\ f'(x) > 0$

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; 2[\ f'(x) < 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$.

D'où le tableau de variation ci-contre :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

- Branches infinies puisque la limite de f à gauche et à droite en 1 est infinie, la droite d'équation x=1 est asymptote à la courbe de f.

$lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ et $lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

donc la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

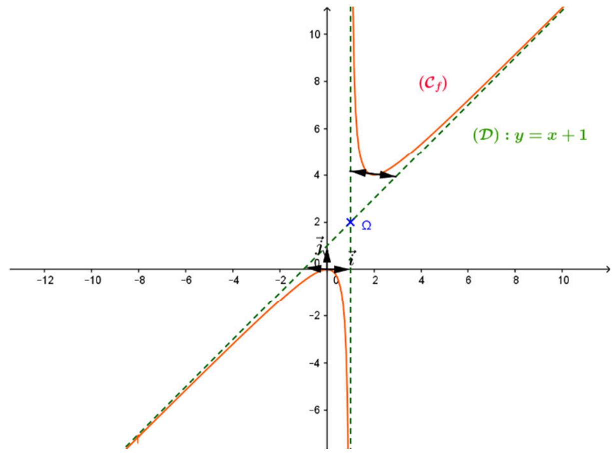
- Courbe
- Position de la courbe par rapport à son asymptote :

$f(x) - (x+1) = \frac{1}{x-1}$ *donc :*

Pour $x < 1$ $f(x) - y < 0$ et la courbe de f est au dessous de son asymptote oblique ;

Pour $x > 1$ $f(x) - y > 0$ et la courbe de f est au-dessus de son asymptote oblique.

- La figure suggère que le point $\Omega(1\ ;\ 2)$ est centre de symétrie.



On peut le démontrer en utilisant l'une des méthodes suivantes :

1ère méthode

Calculons $f(1-h)$ et $f(1+h)$:

$f(1-h)=\frac{(1-h)^2}{h}$ et $f(1+h)=\frac{(1+h)^2}{h}$

$\frac{f(1-h)+f(1+h)}{2} = \frac{4h}{2h} = 2$ donc Ω est bien centre de symétrie.

2ème méthode

Posons $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

Alors $M(x;y) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow Y+2=\frac{(X+1)^2}{X}$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{(X+1)^2}{X} - 2$$

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$,la courbe représentative de la fonction $X \mapsto \frac{(X+1)^2}{X} - 2$ est celle d'une fonction impaire donc Ω est bien centre de symétrie de la courbe de f.

SEQUENCE 8

Exemples d'étude de fonctions trigonométriques

Objectif

Etudier les fonctions trigonométriques

Exemple

Étudions la fonction $f(x)=\tan x$.

$f(x)= \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

- f est définie si, et seulement si $\cos x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})\right\}$ f est continu sur son ensemble de définition
- Propriétés géométriques particulières :
- $\forall\ x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -f(x)$

f est impaire et sa courbe admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

- $\forall\ x \in D_f, (x+\pi) \in D_f$, et $f(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-sinx}{-cosx}=f(x)$

  f est donc périodique de période π.

La parité de f permet de réduire dans un premier temps l'étude dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, mais sa périodicité permet de réduire dans un second temps l'étude sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} sin(x) = 1$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} cos(x) = 0^+$ donc $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.
- f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$,

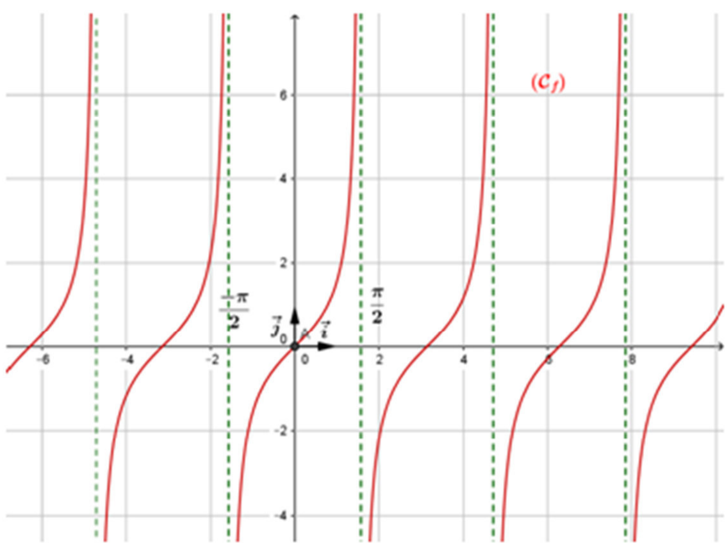
$f'(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$

x	0	$\pi/2$
$f'(x)$	+	
f (x)	0 ↗	$+\infty$

$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) > 0$ doù le tableau de variation ci-contre.

- Branche infinie.

  On a $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$. Donc la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe de f.



- On a construit la courbe de f d'abord dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,puis par symétrie de centre O,sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et enfin par translation de vecteur $k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$ dans tout le domaine de définition.

Leçons de la compétence de base 2 du troisième trimestre

Leçon : statistiques

SEQUENCE 9

Exemple de séries statistiques présentant un regroupement en classes d'amplitudes égales : effectifs cumulés, fréquences cumulées

Objectifs

A partir d'un exemple, déterminer les effectifs cumulés et les fréquences cumulées des séries statistiques présentant un regroupement en classes d'amplitudes **égales**

Introduction

Pour réaliser l'étude statistique d'un caractère quantitatif pouvant prendre toute valeur sur un intervalle I, on regroupe parfois ces valeurs en classes. Ces classes forment une partition de l'intervalle I.

Pour ce paragraphe, on ne considèrera que des séries statistiques à modalités regroupées en classes.

Une telle série comportant p classes de bornes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ $(a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p)$ est notée : $([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ où n_i est l'effectif de la classe $[a_{i-1}, a_i[$.

Effectifs cumulés, fréquences cumulées

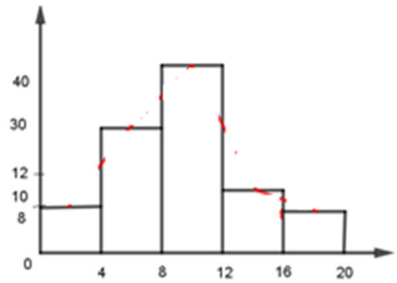
Exemple

Série statistique repartie en classes d'amplitude égale

Dans le tableau suivant, on donne la répartition des notes en mathématiques dans la classe de 1re S_2 du lycée Félix Eboué :

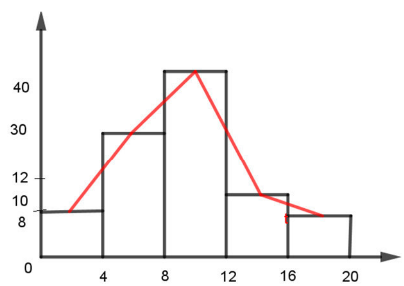
Notes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20[
Effectif(n_i)	8	24	32	10	6
Fréquence(f_i)	10%	30%	40%	12%	8%

Représentons graphiquement cette série statistique par un histogramme.



Les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes correspondantes.

1) Construisons le polygone des effectifs en joignant les points milieux de l'histogramme.



2) Dressons les tableaux des effectifs cumulés croissantes et décroissantes de cette série statistique :

Notes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20[
Effectifs cumulés croissants	8	32	64	74	80
Effectifs cumulés décroissants	80	72	48	16	6

Interprétation des effectifs cumulés croissants ou décroissants

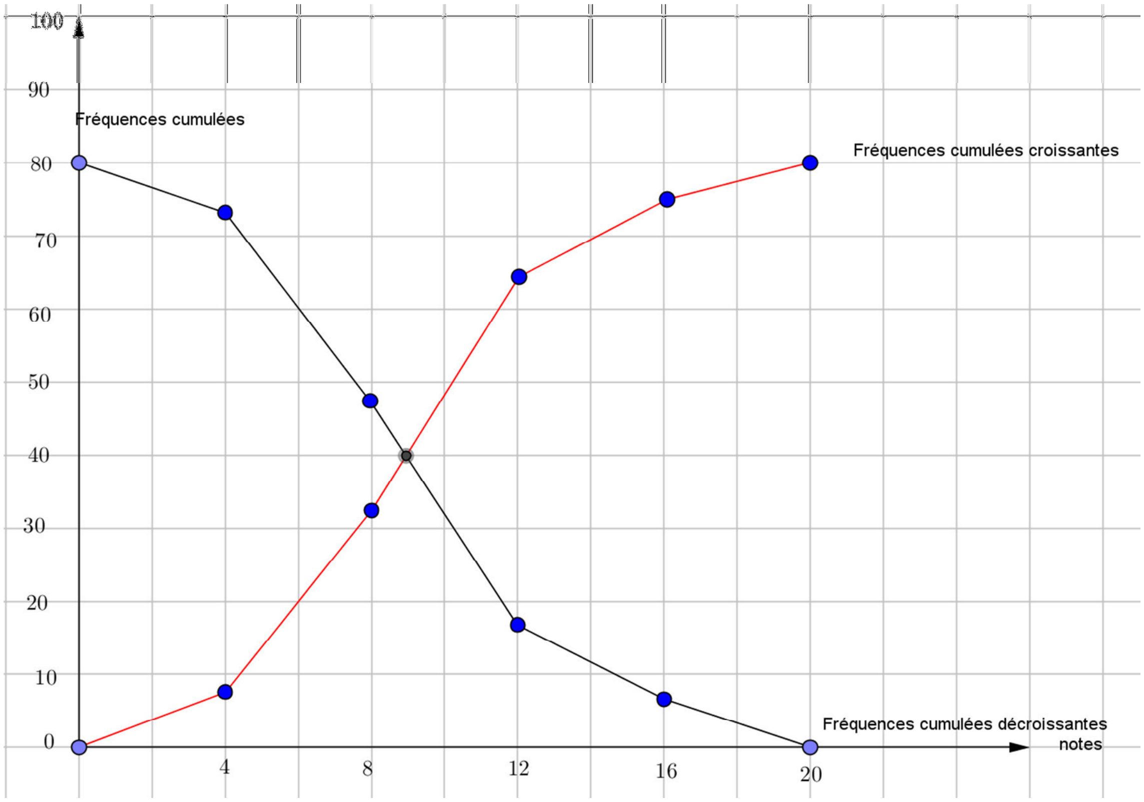
Dans le tableau ci – dessus, la troisième colonne indique que 64 élèves sur les 80 ont obtenu une note au plus égale à 12/ 20 et 48 élèves ont obtenu une note égale au moins à 08/20 à ce devoir.

On en déduit le tableau suivant :

a_i	0	4	8	12	16	20
Nombre d'élèves ayant obtenu au plus a_i	0	8	32	64	74	80
Nombre d'élèves ayant obtenu au moins a_i	80	72	48	16	6	0

Dans ce tableau, la somme des effectifs de chaque colonne est égale à l'effectif total.

Ces résultats peuvent être représentés par les graphiques suivants :



SEQUENCE 10

Exemple de séries statistiques présentant un regroupement en classes d'amplitudes inégales : Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Objectifs

A partir d'un exemple, déterminer les effectifs cumulés et les fréquences cumulées des séries statistiques présentant un regroupement en classes d'amplitudes **inégales**

Effectifs cumulés, fréquences cumulées

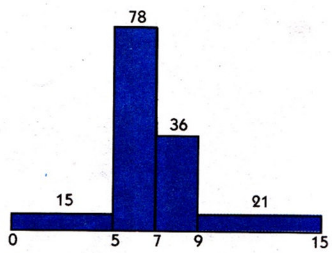
Exemple

Série statistique répartie en classes d'amplitude inégale

Dans le tableau suivant, on a relevé la distance parcourue (en milliers de kilomètres) par chacun des 150 bus de la compagnie « Express » entre leur mise en circulation et leur première panne.

Distance parcourue	[0; 5[	[5; 7[	[7; 9[	[9; 15[
Effectif (n_i)	15	78	36	21
Fréquence (f_i)	10%	52%	24%	14%

1) Représentons graphiquement cette série statistique par un histogramme.



Les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes correspondantes.

2) Dressons les tableaux des effectifs cumulés croissants et décroissants de cette série statistique :

Distance parcourue	$[0;5[$	$[5;7[$	$[7;9[$	$[9;15[$
Effectif cumulé croissant	15	93	129	150
Effectif cumulé décroissant	150	135	57	21

Interprétation des effectifs cumulés croissants ou décroissants

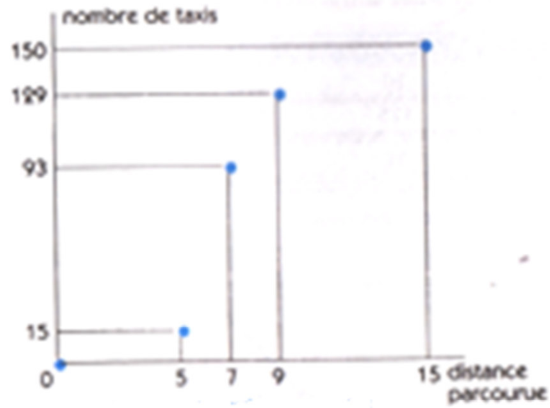
Dans le tableau ci-dessus, la troisième colonne indique que 129 bus sur les 150 ont parcouru au plus 9000 km et 57 bus ont parcouru au moins 7000 km avant leur première panne.

On en déduit le tableau suivant :

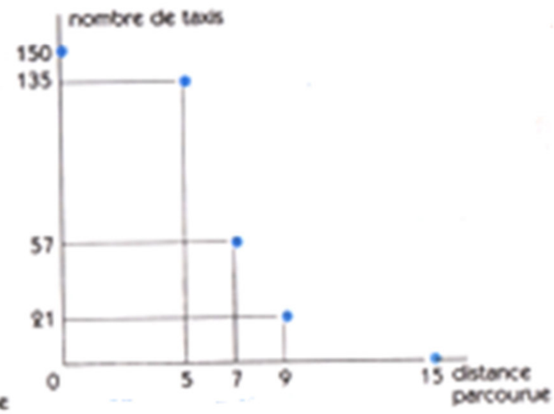
a_i	0	5	7	9	15
Nombre de bus ayant parcouru au plus a_i($\times$ 1000 km)	0	15	93	129	150
Nombre de bus ayant parcouru au moins a_i($\times$ 1000 km)	150	135	57	21	0

Dans ce tableau, la somme des effectifs de chaque colonne est égale à l'effectif total.

Ces résultats peuvent être représentés par les graphiques suivants :



Effectifs cumulés croissants



Effectifs cumulésdécroissants

Remarque

On obtient de manière analogue les tableaux et les graphiques des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

SEQUENCE 11

Définition des effectifs cumulés et des fréquences cumulées des séries statistiques présentant un regroupement en classes

Objectifs

Définir les effectifs cumulés et les fréquences cumulées des séries statistiques présentant un regroupement en classes

Définition

$([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ *est une série statistique.*

- *L'effectif cumulé croissant de la classe* $[a_{k-1};\ a_k[$ *est :*
  $\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.
- *L'effectif cumulé décroissant de la classe* $[a_{k-1};\ a_k[$ *est :*
  $\sum_{i=k}^{p} n_i = n_k + n_{k+1} + \cdots + n_P$.

SEQUENCE 12

Séries statistiques présentant un regroupement en classes : Polygones des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

Objectifs

Construire le polygone des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

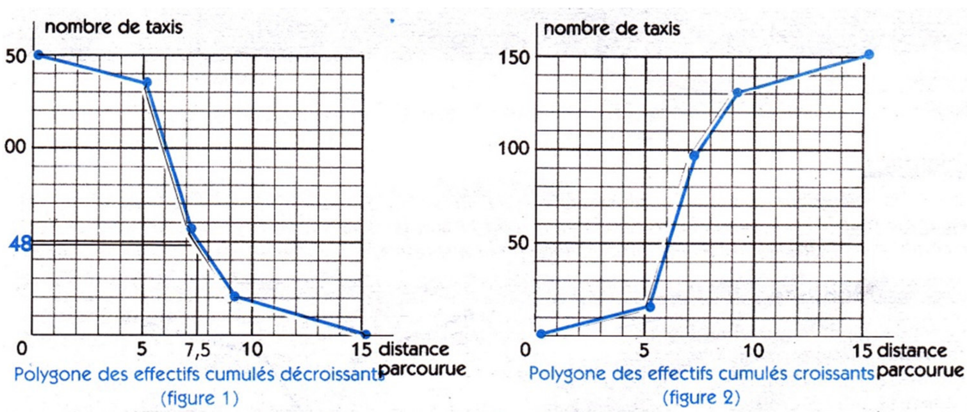
Polygones des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

Exemple

Dans l'exemple où la série est répartie en classes d'amplitude inégale, les données ne nous permettent pas de déterminer, par exemple, le nombre de bus ayant parcouru au moins 7500 km avant la première panne.

Le graphique des effectifs cumulés décroissants nous permet cependant d'en déterminer une estimation.

Pour cela, on joint les points consécutifs de ce graphique par des segments.



Polygone des effectifs cumulés décroissants (figure 1)

Polygone des effectifs cumulés croissants (figure 2)

Le point d'abscisse 7,5 de la ligne brisée ainsi obtenue a pour ordonnée 48.

On estime donc à 48 le nombre de bus ayant parcouru au moins 7500 km avant la première panne.

Définition

Le polygone des effectifs cumulés décroissants (respectivement croissants) est obtenu en joignant les points consécutifs des effectifs cumulés décroissants (respectivement croissants)

Remarque

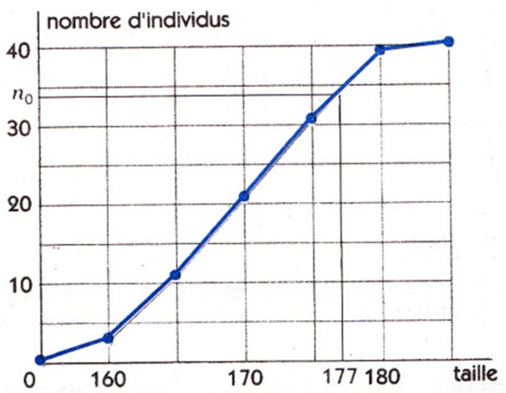
Si l'on suppose que la répartition est régulière, pour tout point M de coordonnées $(x ; n)$ du polygone des effectifs cumulés décroissants (respectivement croissant), n est le nombre d'individus dont la modalité est supérieure (respectivement inférieure) à x.

Exemple

On donne dans le tableau suivant la répartition en classes d'amplitude 5 les tailles en cm de 40 individus.

Classe	[155; 160[	[160; 165[	[165; 170[	[170; 175[	[175; 180[	[180; 185[
Effectif	3	8	10	10	7	2
Borne supérieure	160	165	170	175	180	185
Effectif cumulé croissant	3	11	21	31	38	40

A partir de ce tableau, on construit le polygone des effectifs cumulés croissants suivant :



On se propose d'estimer le nombre d'individus mesurant moins de 177cm.

Soit n_0 l'ordonnée du point d'abscisse 177 de ce polygone.

Ce point appartient à la droite passant par les points de coordonnées (175 ; 31) et (180 ; 32).

On a : $\frac{n_0-31}{177-175} = \frac{38-31}{180-175}$ soit $n_0 = 33,8$.

Ce procédé est appelé interpolation linéaire.

On estime donc à 34 le nombre d'individus mesurant moins 177 cm.

SEQUENCE 13

Caractéristiques de position d'une série statistique présentant un regroupement en classe

Objectif

Déterminer les caractéristiques de position d'une série statistique présentant un regroupement en classe

Classe modale

Définition

On considère une série statistique présentant un regroupement en classes.

On appelle classe modale de cette série toute classe d'effectif maximal.

Exemple

Dans l'exemple de la série statistique présentant un regroupement en classe d'amplitude égale ci-dessus, la classe modale est : [8 ; 12[.

Dans l'exemple de la série statistique présentant un regroupement en classe d'amplitude inégale ci-dessus, la classe modale est : [5; 7[.

Remarques

- Une série statistique peut avoir plusieurs classes modales.
  Exemple : la série précédente des tailles de 40 individus a deux classes modales : [165 ; 170[et [170 ; 175[.
- Le centre d'une classe modale est appelé mode de la série statistique.

Médiane

Définition

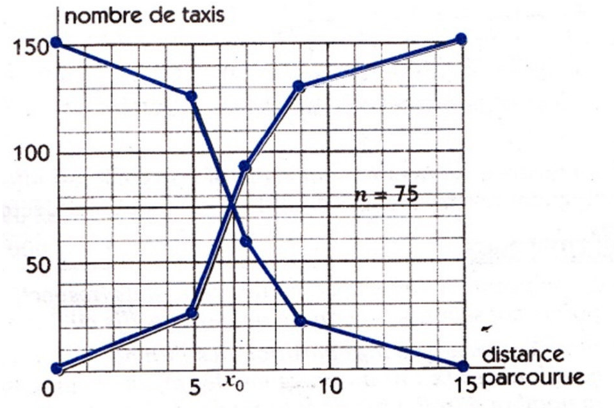
On considère une série statistique présentant un regroupement en classes et d'effectif total N.

On appelle médiane de cette série le nombre réel M tel que le nombre d'individus de modalité supérieure à M et le nombre d'individus de modalité inférieures à M soient tous égaux à $\frac{N}{2}$.

Exemple

Dans l'exemple de la série statistique présentant un regroupement en classe d'amplitude inégale ci-dessus, l'effectif total de la série est 150.

Représentons sur le même graphique les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.



Ces polygones sont symétriques par rapport à la droite d'équation n = 75. Donc leur point d'intersection a pour ordonnée 75. Soit x_0 son abscisse, $x_0 \in [5\ ;\ 7[$. On a : $\frac{75-15}{x_0-5} = \frac{93-15}{7-5}$. On en déduit $x_0 = 5 + \frac{10}{30}$. Soit $x_0 = 6{,}54$.

On estime que la moitié des bus de la compagnie « Express » ont parcouru au plus 6540 km avant la première panne.

Le nombre 6,54 partage la population de la série en deux parties de même effectif. 6,54 est donc la médiane de cette série.

Moyenne

Si, dans une série statistique, les modalités des n_i individus d'une classe $[a_{i-1}, a_i[$ de centre x_i sont régulièrement réparties dans cet intervalle, alors la moyenne arithmétique de ces modalité est x_i et leur somme est $n_i x_i$.

Définition

$([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une série statistique.

On appelle moyenne de cette série la moyenne $\bar{x}$ de la série statistique $(n_i, x_i)_{1 \leq i \leq p}$ où x_i est le centre de la classe $[a_{i-1}, a_i[$.

Si N est l'effectif total de la série, $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$.

Exemple

Reprenons l'exemple de la série statistique présentant un regroupement en classe d'amplitude inégale ci-dessus et calculons la moyenne de cette série.

Le tableau suivant nous donne les classes, les centres des classes, les effectifs des classes et le produit $n_i x_i$.

Classe	Centre de la classe x_i	Effectif n_i	$n_i x_i$
[0 ; 5[	2,5	15	37,5
[5 ; 7[	6	78	468
[7 ; 9[	8	36	288
[9 ; 15[	12	21	252
Total		150	1045,5

La moyenne $\bar{x}$ de cette série est :

$\bar{x} = \frac{1045,5}{150}$

$= 6,97.$

On peut conclure que les bus parcourent en moyenne 6970 km avant leur première panne.

SEQUENCE 14

Caractéristiques de dispersion d'une série statistique présentant un regroupement en classe

Objectif

Déterminer les caractéristiques de dispersion d'une série statistique présentant un regroupement en classe

Caractéristiques de dispersion

Pour calculer les caractéristiques de dispersion d'une série statistique présentant un regroupement en classes, comme pour le calcul de la moyenne, on remplace chaque classe par son centre.

Définition

$([a_{i-1}, a_i[, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une série statistique d'effectif total N et de moyenne $\bar{x}$.

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$, on désigne par x_i le centre de la classe $[a_{i-1}, a_i[$.

- *L'écart moyen est le nombre e_m tel que $e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i|x_i - \bar{x}|$.*
- *La variance est le nombre réel V tel que $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2$.*
- *L'écart-type est le nombre réel σ tel que $\sigma = \sqrt{V}$.*

Remarque

Dans la pratique, le calcul de la variance se fait à l'aide de la formule de Koenig :

$V = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\, {x_i}^2\right) - \bar{x}^2.$

Exemple

Reprenons l'exemple de la série statistique présentant un regroupement en classe d'amplitude inégale ci-dessus et calculons l'écart moyen, la variance et l'écart – type de cette série.

Classe	Centre de la classe x_i	Effectif n_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	${x_i}^2$	$n_i{x_i}^2$
[0 ; 5[	2,5	15	4,47	67,05	6,25	93,75
[5 ; 7[	6	78	0,97	75,66	36	2808
[7 ; 9[	8	36	1,03	37,08	64	2304
[9 ; 15[	12	21	5,03	105,63	144	3024
Total		150		285,42		8229,75

On déduit du tableau précédent que :

$e_m = \frac{285,42}{150} = 1,9028$; $V = \frac{8229,75}{150} - 6,97^2 = 6,2841$; $\sigma \approx 2,5068$.

SEQUENCE 15

Séries statistiques à deux variables : organisation des données

Objectif

Organiser les données d'une série statistique à deux variables à partir d'un exemple

Introduction

On peut sur une population donnée, étudier deux caractères quantitatifs. La modalité associée à chaque individu est alors un couple de réels. On construit ainsi une série statistique à deux caractères ou série double.

Exemple introductif

On a relevé le poids (en kg) et la taille (en cm) de 30 élèves d'une classe de 1re S du lycée de Gassi à N'Djamena.

On a obtenu :

Poids x	65	68	62	62	68	68	59	71	74	68	68	74	71	65	65
Taille y	165	177	174	168	165	171	165	177	174	171	165	174	174	174	171

Poids x	62	65	68	71	65	74	74	71	65	77	74	62	77	68	71
Taille y	174	174	171	171	174	168	177	174	165	180	177	168	180	171	174

Ces données permettent de définir deux séries statistiques à un caractère : $(x_i; n_i)$ et$\left(y_{j;}n_j\right)$représentées par les deux tableaux suivants :

x_i	59	62	65	68	71	74	77
n_i	1	4	6	7	5	5	2

y_j	165	168	171	174	177	180
n_j	5	3	6	10	4	2

Soit X $= \{59 ; 62 ; 65 ; 68 ; 71 ; 74 ; 77\}$ et Y $= \{165 ; 168 ; 171 ; 174 ; 177 ; 180\}$.

A chaque couple $(x_i; y_j)$ de l'ensemble X × Y, on associe le nombre d'élèves ayant le poids x_i et la taille y_j ; ce nombre est noté n_{ij}.

On définit ainsi une série statistique à deux caractères ; n_{ij} est appelé l'effectif de la modalité $(x_i; y_j)$.

Cette série à deux caractère notée $(x_i; y_j;\ n_{ij})$ est représentée par le tableau à double entrée suivant :

y_j \ x_i	59	62	65	68	71	74	77	Total
165	1	0	2	2	0	0	0	5
168	0	2	0	0	0	1	0	3
171	0	0	1	4	1	0	0	6

174	0	2	3	0	3	2	0	10
177	0	0	0	1	1	2	0	4
180	0	0	0	0	0	0	2	2
Total	1	4	6	7	5	5	2	30

Les totaux obtenus dans la dernière ligne du tableau sont les effectifs de la série $(x_i; n_i)$ et ceux obtenus dans la dernière colonne sont les effectifs de la série $(y_{j;}n_j)$.

Ces effectifs apparaissent « en marge » du tableau à double entrée ; les séries $(x_i; n_i)$ et $(y_{j;}n_j)$sont appelées séries marginales de la série double $(x_i; y_j;\ n_{ij})$.

SEQUENCE 16

Nuage de points associé à une série double

Objectif

Définir et construire le nuage de points associé à une série double

Définition

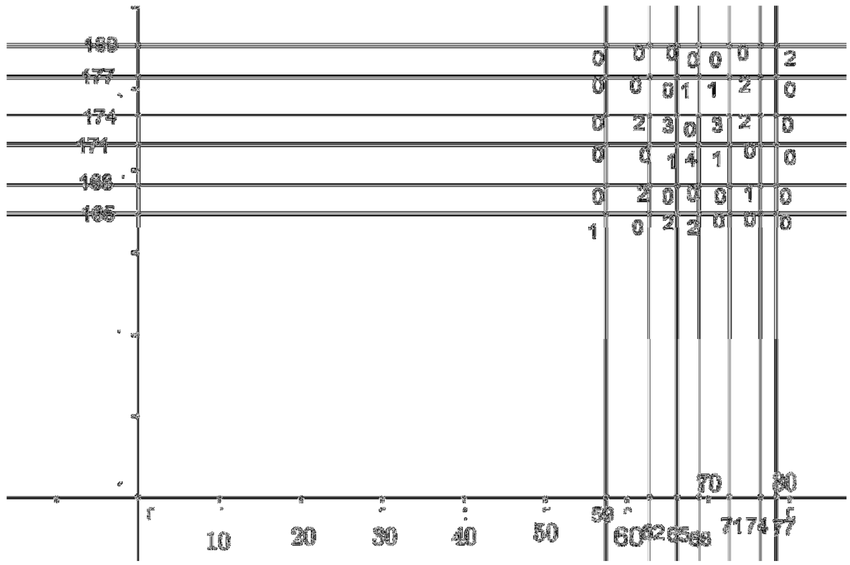
$x_i; y_j;\ n_{ij})$ est une série statistique à deux caractères quantitatifs.

Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J), l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées $(x_i; y_j)$ est appelé nuage de points associé à la série.

Dans le cas où les effectifs des modalités $(x_i; y_j)$ ne sont pas tous égaux, on représente ce nuage de points de deux façons :

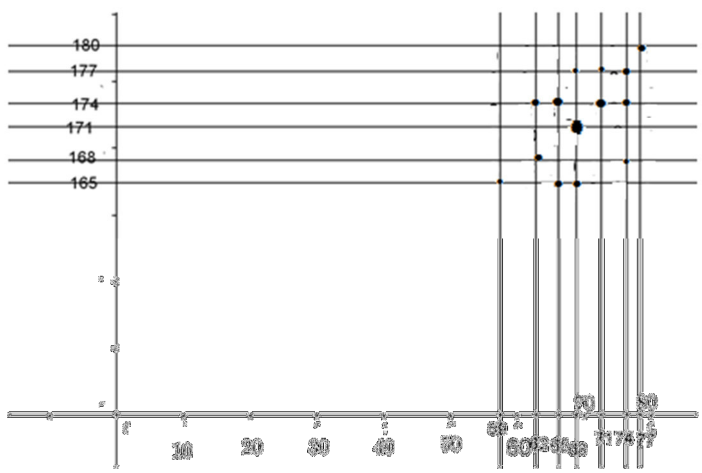
– représentation par points pondérés : on indique à côté de chaque point M_{ij}l'effectif n_{ij}.

  Pour l'exemple introductif, la représentation par points pondérés est la suivante :



– Représentation par taches : chaque point M_{ij} est représenté par un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif n_{ij}.

  Pour l'exemple introductif, la représentation par taches est la suivante :



SEQUENCE 17

Point moyen d'un nuage

Objectif

Définir et construire le point moyen d'un nuage

Point moyen d'un nuage

Reprenons l'exemple introductif.

Déterminons le barycentre G des points pondérés $(M_{ij}; n_{ij})$:

on a : $x_G = \frac{1}{30}(59 + 2 \times 62 + 2 \times 62 + 2 \times 65 + 65 + 3 \times 65 + 2 \times 68 + 4 \times 68 + 68 + 71 + 3 \times 71 + 71 + 74 + 2 \times 74 + 2 \times 74 + 2 \times 77)$

$= \frac{1}{30}(59 + 4 \times 62 + 6 \times 65 + 7 \times 68 + 5 \times 71 + 5 \times 74 + 2 \times 77)$

$= 68{,}4.$

$y_G = \frac{1}{30}(165 + 2 \times 168 + 2 \times 174 + 2 \times 165 + 171 + 3 \times 174 + 2 \times 165 + 4 \times 171 + 177 + 171 + 3 \times 174 + 177 + 168 + 2 \times 174 + 2 \times 177 + 2 \times 180)$

$= \frac{1}{30}(5 \times 165 + 3 \times 168 + 6 \times 171 + 10 \times 174 + 4 \times 177 + 2 \times 180)$

$= 172{,}1.$

On a également : $\begin{cases} x_G = \bar{x} \\ y_G = \bar{y} \end{cases}$ où $\bar{x}$et $\bar{y}$ sont les moyennes respectives des séries marginales

G est appelé point moyen du nuage associé à la série $(x_i\,;y_j\,;\,n_{ij})$.

Définition

$(x_i; y_j;\ n_{ij})$ est une série statistique à deux caractères quantitatifs.

On appelle point moyen du nuage de points représentant cette série le point de coordonnées $(\bar{x}\,;\bar{y})$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales $(x_i; n_i)$ et $(y_j;\ n_j)$.

Exemple

Les notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de mathématiques et de physique au baccalauréat série C de l'année 2017 sont données dans le tableau ci-dessous :

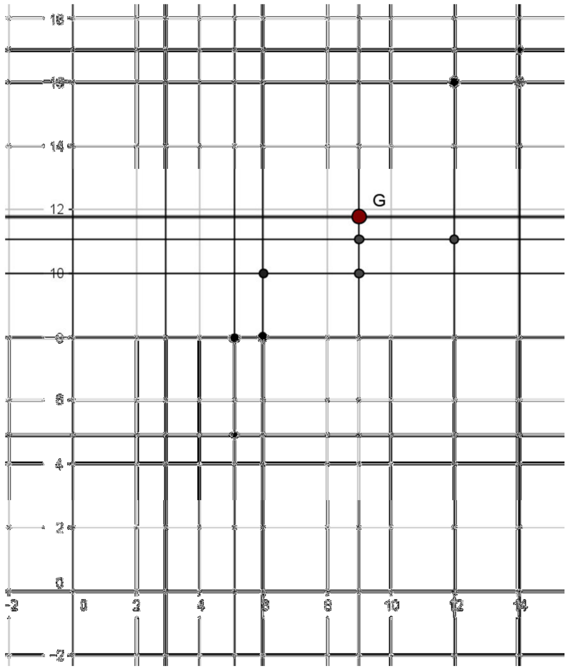
Notes en mathématiques (x)	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
Notes en physique(y)	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

Dans cette série, les effectifs des modalités sont tous égaux à 1.

Les moyennes des séries marginales sont donc :

$\bar{x} = \frac{2\times9+2\times12+5+2\times6+2\times14+3}{10} = 9$ et $\bar{y} = \frac{2\times10+2\times13+2\times8+17+5+2\times16}{10} = 11{,}6.$

Le point moyen du nuage associé à la série est : $G\binom{9}{11{,}6}$



SEQUENCE 18

Ajustement linéaire d'un nuage de points associé à une série double

Objectif

Introduire l'ajustement linéaire d'un nuage de points associé à une série double

NB

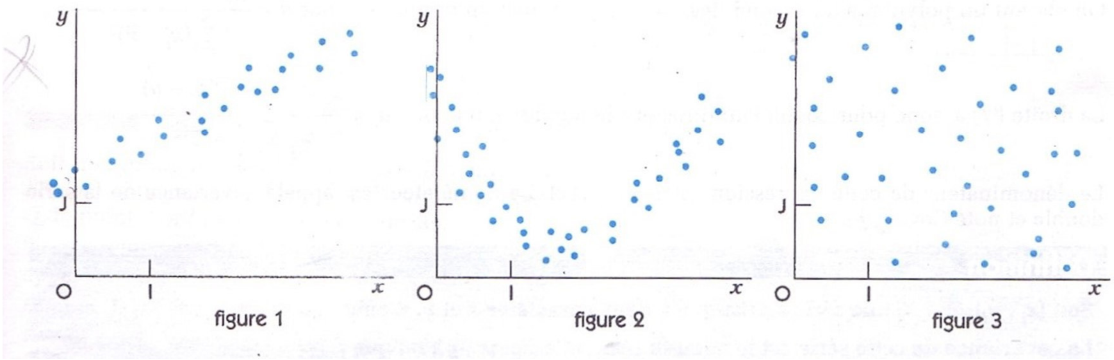
Dans ce paragraphe, on ne considèrera qu'une série statistique à deux caractères x et y telle que l'effectif des modalités est égal à 1. Une telle série sera notée $(x_i;\ y_i)_{1 \leq i \leq N}$ où N est l'effectif total de la série et $(x_i;\ y_i)$ la modalité du $i^{ème}$ individu.

Le nuage de points associé à cette série est l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i;\ y_i)$. On désigne par $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes respectives des séries marginales relatives

aux caractères x et y, par V(x) et V(y) leurs variances respectives que l'on suppose non nulles.

Introduction

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), on construit le nuage de points associé à la série deux caractères x et y. On envisagera trois cas:



La répartition des points dans les deux premiers nuages suggère une relation entre les deux caractères x et y ; ce n'est pas le cas pour le nuage de la figure 3.

- Le nuage de la figure 1 a une forme qui se rapproche d'une droite ; elle suggère une relation de la forme $y = ax + b$.
- Le nuage de la figure 2 a une forme qui se rapproche d'une parabole ; elle suggère une relation de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

Ainsi, ajuster un nuage de points consistera à déterminer une courbe simple passant « le plus proche possible » des points du nuage. Si la courbe recherchée est une droite, on dit qu'il s'agit d'un ajustement linéaire.

L'objectif de ce paragraphe est de donner une méthode pour effectuer l'ajustement linéaire d'un nuage de points. Cette méthode dite « des moindres carrés » permet de déterminer deux droites appelées droites de régression.

SEQUENCE 19

Ajustement linéaire d'un nuage de points associé à une série double : Droite de régression de y en x

Objectif

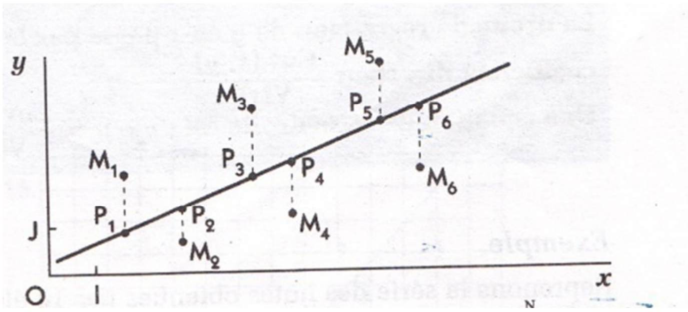
Ajuster linéairement un nuage de points associé à une série double en utilisant la droite de régression de y en x.

Droite de régression de y en x

On considère une droite d'équation $y = ax + b$. Pour tout nombre entier i tel que $1 \leq i \leq N$, on désigne par P_i le point d'abscisse x_i de cette droite.

La somme des carrés des distances de M_i à P_i est :

$\sum_{i=1}^{N}(M_iP_i)^2 = \sum_{i=1}^{N}[y_i - (ax_i + b)]^2$.



La méthode consiste à déterminer la droite (D) appelée droite de régression de y en x telle que cette somme soit la plus petite possible.

- On suppose dans un premier temps que a est déterminé et on cherche b pour que la somme $\sum_{i=1}^{N}(M_iP_i)^2$ soit minimale.

  On a :$\sum_{i=1}^{N}(M_iP_i)^2 = \sum_{i=1}^{N}[y_i - (ax_i + b)]^2$

  $= \sum_{i=1}^{N}[(y_i - ax_i) - b]^2$

  $= \sum_{i=1}^{N}[(y_i - ax_i)^2 + 2b(y_i - ax_i) + b^2]$

  $= Nb^2 - 2b\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i) + \sum_{i=1}^{N}[(y_i - ax_i)^2]$

On obtient un polynôme du second degré en b de la forme $\alpha b^2 + \beta b + \gamma$.

$\alpha = N$ étant positif, ce polynôme admet un minimum en b tel que $b = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i)$.

Donc, pour une droite de coefficient α, la somme $\sum_{i=1}^{N}(M_iP_i)^2$ est minimale pour :

b $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - a\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \bar{y} - a\bar{x}$.

La droite (D) passe donc par G, point moyen du nuage.

- On suppose maintenant que $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

  On a :$\sum_{i=1}^{N}(M_iP_i)^2 = \sum_{i=1}^{N}[(y_i - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x})]^2$

  $= a^2\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 - 2a\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2$

On obtient alors un polynôme du second degré en a, qui admet un minimum pour

$a = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$.

La droite (D) a donc pour coefficient directeur le nombre a tel que $a = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$.

Le dénominateur de cette expression est égal à $V(x)$. Le numérateur est appelé covariance de la série double notée *: Cov(x ; y).*

Définition

$(x_i;\ y_i)_{1 \le i \le N}$ *est une série statistique à deux caractères x, y et d'effectif total N.*

La covariance de cette série est le nombre noté Cov(x, y) tel que :

Cov(x, y) $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$.

Remarque

Le calcul pratique de la covariance s'effectue de manière générale à l'aide de la propriété suivante dont la démonstration est analogue à celle de la formule de Koenig établie en classe de seconde.

Propriétés

1) $(x_i;\ y_i)_{1 \leq i \leq N}$ *est une série statistique à deux caractères x, y et d'effectif total N.*

   On a : Cov(x, y) $= (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i) - \bar{x}\bar{y}$.

2) $(x_i;\ y_i)_{1 \leq i \leq N}$ *est une série statistique à deux caractères x et y telle que V(x) ≠ 0.*

   La droite de régression de y en x passe par le point moyen du nuage associé à cette série et a pour coefficient directeur $\frac{Cov(x,y)}{V(x)}$.

   Une équation de cette droite est : $y - \bar{y} = \frac{Cov(x,y)}{V(x)}(x - \bar{x})$.

SEQUENCE 20

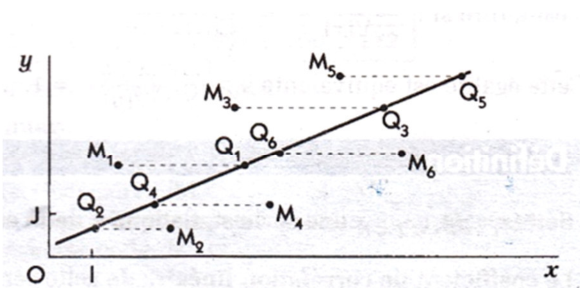
Ajustement linéaire d'un nuage de points associé à une série double : Droite de régression de x en y

Objectif

Ajuster linéairement un nuage de points associé à une série double en utilisant la droite de régression de x en y.

Droite de régression de x en y

(D) est une droite d'équation $x = ay + b$. Pour tout nombre entier i tel que $1 \leq i \leq N$, on désigne par Q_i le point d'ordonnée y_i de cette droite.



On cherche cette fois à déterminer la droite (D') appelée la droite de régression de x en y telle que la somme $\sum_{i=1}^{N}(M_iQ_i)^2$ soit la plus petite possible.

Par un calcul analogue au précédent, on démontre que cette somme est minimale si la droite passe par le point moyen du nuage et si $a = \frac{Cov(x,y)}{V(y)}$.

Propriété

$(x_i;\ y_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une série statistique à deux caractères x et y telle que V(y) ≠ 0.
La droite de régression de x en y passe par le point moyen du nuage associé à cette série et a pour équation: $x - \overline{x} = \frac{Cov(x,y)}{V(y)}(y - \overline{y})$.

Remarque

Si la covariance de la série est non nulle, le coefficient directeur de cette droite est $\frac{V(y)}{Cov(x,y)}$.

Exemple

En reprenant la série des notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de mathématiques et de physique au baccalauréat série C de l'année 2017, on dispose les calculs dans un tableau de la façon suivante :

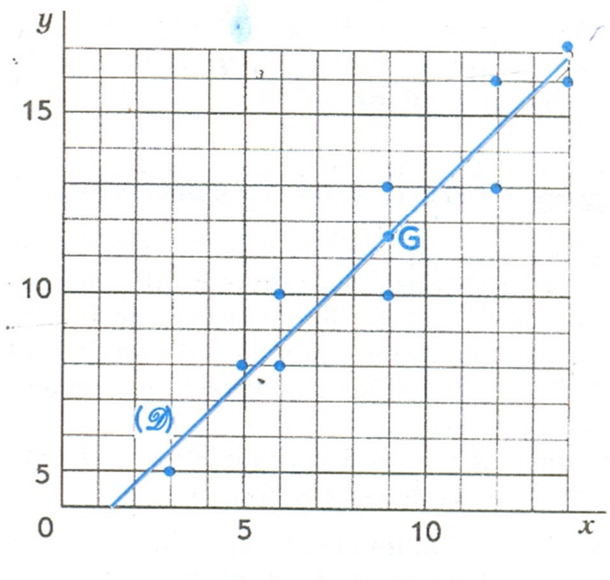
	x_i	y_i	$x_i y_i$	${y_i}^2$
	9	10	90	100
	12	13	156	169
	5	8	40	64
	6	10	60	100
	9	13	117	169
	14	17	238	289
	3	5	15	25
	6	8	48	64
	12	16	192	256
	14	16	224	256
Total	90	116	1180	1492

On en déduit que :

$\mathrm{Cov}(x, y) = \frac{1180}{10} - 9 \times 11{,}6 = 13{,}6$;

$\mathrm{V}(y) = \frac{1492}{10} - 11{,}6^2 = 14{,}64$.

La droite de régression de x en y est donc la droite d'équation $x - 9 = \frac{13{,}6}{14{,}64}(y - 11{,}6)$ c'est-à-dire $y = 1{,}076x + 1{,}912$.



SEQUENCE 21

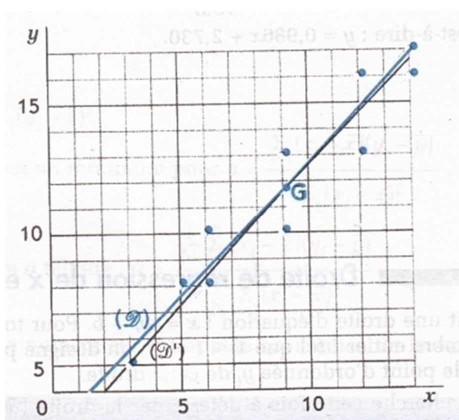
Coefficient de corrélation linéaire

Objectif

Calculer le coefficient de corrélation linéaire

Coefficient de corrélation linéaire

En reprenant la série des notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de mathématiques et de physique au baccalauréat série C de l'année 2017 et en représentant sur un même graphique les deux droites de régression (D) et (D'), on constate que ces deux droites ne sont pas confondues mais sont proches l'une de l'autre.



En effet, leurs coefficients sont très voisins.

On dit dans ce cas qu'il y a une bonne corrélation linéaire entre les deux caractères x et y.

Plus généralement, lorsque la covariance de la série est non nulle, les droites de régression sont confondues si elles ont même coefficient directeur, c'est-à-dire si $\frac{Cov(x,y)}{V(x)} = \frac{V(y)}{Cov(x,y)}$. Cette égalité est équivalente à $\frac{Cov^2(x,y)}{V(x)V(y)} = 1$.

Définition

$(x_i;\ y_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une série statistique à deux caractères x et y telle que : $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$.

Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel $r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}}$.

Remarques

- On admet que : $|r| \leq 1$.
- La corrélation entre les deux caractères x et y est d'autant meilleure que $|r|$ est proche de 1.

Exemples

1) En reprenant la série des notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de mathématiques et de physique au baccalauréat série C de l'année 2017, le coefficient de corrélation
   r = 0,957. Il y a une bonne corrélation entre les notes en mathématiques et en physique des ces 10 élèves.
2) Considérons maintenant la série des notes obtenues par ces mêmes dix élèves en mathématiques et en Education Physique et Sportive(EPS). On a le tableau suivant :

Maths	EPS	${x_i}^2$	${z_i}^2$	$x_i z_i$
9	6	81	36	54
12	13	144	169	156
5	17	25	289	85
6	11	36	121	66
9	10	81	100	90
14	8	196	64	72
3	8	9	64	24
6	15	36	235	90

	12	6	144	36	72
	14	15	196	225	210
Total	90	109	948	1329	959

On en déduit que $\bar{x} = 9$ et $\bar{z} = 10,9$. Donc $Cov(x, z) = 95,9 - 9 \times 10,9 = -2,2$.

La droite (D) de régression de z en x admet pour équation : $z - 10,9 = \frac{-2,2}{13,8}(x - 9)$ c'est-à-dire

$z = -0,159x + 12,335$.

On a $V(z) = 132,9 - 10,9^2 = 14,09$; donc la droite (D') de régression de x en z admet pour équation : $x - 9 = \frac{-2,2}{14,09}(z - 10,9)$ c'est-à-dire $z = -6,405x + 68,541$.

Le coefficient de corrélation de cette série est le nombre $r = \frac{-2,2}{\sqrt{13,8}\sqrt{14,09}} = -0,158$

Il y a une mauvaise corrélation entre les notes de mathématiques et celles d'éducation physique et sportive pour ce groupe d'élèves.

Effectuer un ajustement linéaire sur cette série ne se justifie pas.

Exercice

Une étude de trois caractère x, y et z sur une population de cinq individus a donné les résultats suivants :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	40	45	35	35	30
z_i	0	-3	1	4	-1

1) Représenter sur deux graphiques différents les nuages de points associés respectivement aux séries (x_i, y_i) et (x_i, z_i).
2) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de z en x.
3) Calculer les coefficients de corrélation linéaire des séries (x_i, y_i) et (x_i, z_i). De ces deux séries, quelle est celle qui se prête au mieux à un ajustement linéaire ?

Leçons de la compétence de base 3 du troisième trimestre

Leçon : Similitude

SEQUENCE 21

Notion de transformation

Objectif

Définir une transformation et utiliser ses propriétés

Définition

Une transformation T est une bijection du plan dans lui –même. En d'autres termes T est une transformation du plan si et seulement si :

- *A tout point M est associé un point M' unique noté T(M) ;*
- *Pour tout point N il existe un unique point M tel que T(M)=N.*

Comme conséquence immédiate à cette définition, on admet les propriétés suivantes :

Propriétés

1. *Une transformation T admet une transformation réciproque T^{-1} définie par* $T^{-1}(N) = M \Leftrightarrow T(M) = N$
2. *La composée de deux transformations du plan, T_1 suivie de T_2 est une transformation du plan notée* $T_2 \circ T_1$ *.*

Remarque

Puisque la transformation T est une bijection, deux points distincts ont des images distinctes par cette transformation.

Exemple

Les applications du plan vues antérieurement : symétrie axiale, symétrie centrale, rotation, translation, homothétie sont des transformations.

La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est une translation du vecteur $-\vec{u}$.

La réciproque de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k est l'homothétie de meme centre et de rapport $\frac{1}{k}$.

La réciproque d'une rotation de centre A et d'angle α est la rotation de meme centre et d'angle $-\alpha$.

Si $t_{\vec{u}}$ est la translation du vecteur $\vec{u}$ et $t_{\vec{v}}$ la translation du vecteur $\vec{v}$, la composée $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ est la translation du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ notée $t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

Si h est l'homothétie de centre Ω et de rapport , h' l'homothétie de centre Ω et de rapport k' alors la transformation composée de h et h' est une homothétie de meme centre et de rapport kk'.

SEQUENCE 22

Similitudes planes

Objectif

Définir une similitude plane et utiliser ses propriétés

Définition

On appelle similitude plane, toute transformation du plan qui conserve les rapports de distances.

Théorème

Soit s une similitude. Il existe un réel strictement positif k tel que pour tout point M, N du plan d'images respectives M', N', on ait : $M'N' = kMN$. *Le nombre réel strictement positif* k *est appelé le rapport de la similitude s.*

Propriétés des similitudes planes

1. L'image d'un triangle par une similitude est un triangle semblable.
2. La composée des deux similitudes de rapport k et k' est une similitude de rapport kk'.
3. La Réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{K}$.
4. Produit scalaire : dans une similitude de rapport k, le produit scalaire est multiplié par k ;
5. Les angles géométriques : une similitude conserve les angles géométriques. On a donc : $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

SEQUENCE 23

Images des figures simples par une similitude plane

Objectif

Déterminer les images des figures simples par une similitude plane

Propriété

Soit s une similitude, A et B deux points distincts, A' et B' leurs images respectives par s.

- *L'image par s de la droite (AB) est la droite (A'B')*
- *L'image par s de la demi-droite* $[AB)$ *est la demi-droite* $[A'B')$
- *L'image par s du segment* $[AB]$ *est le segment* $[A'B']$

D'autre part une similitude conserve le parallélisme et l'orthogonalité de droites, l'alignement des points et le barycentre.

Image d'un cercle

Une similitude transforme un cercle en un cercle.

Démonstration

Soit s une similitude de rapport k. $\mathcal{C}$ un cercle, Ω son centre, r son rayon et soit $\mathcal{C}'$, Ω' les images respectives de $\mathcal{C}$ et Ω par s.

$\forall$ M et M' son image par s on a :

$M' \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$

$\Leftrightarrow \Omega M = r$

$\Leftrightarrow \Omega' M' = k.r$

Donc $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre Ω' et de rayon $k.r$

Similitudes et angles orientés

Propriété

Une similitude transforme un angle orienté en un angle orienté égal ou opposé.

Démonstration

Soit s une similitude de rapport k et $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté quelconque. Supposons que A, B et C sont des points du plan tel que $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Notons A'=s(A), B'=s(B) et C'=s(C).

A, B et C étant des points distincts, la similitude s conserve les angles géométriques donc mes $\widehat{BAC}$ = mes $\widehat{B'A'C'}$ et comme $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ ont meme mesure alors les angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ sont soit égaux soit opposés.

SEQUENCE 24

Classification des similitudes

Objectif

Faire une classification des similitudes

Types de similitudes

Définition

On appelle similitude directe, toute similitude qui conserve les angles orientés.

Une similitude indirecte est une similitude qui transforme un angle orienté en un angle opposé.

Propriété

Soit s une similitude directe et deux points A et B d'images respectives A' et B'.

Pour tout point $M, si\ M = s(M)\ alors$:

$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) + 2\lambda\pi\ (\lambda \in \mathbb{Z})$

Et l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$ *est appelé angle de la similitude directe.*

Reconnaissance d'une similitude directe

Théorème

Deux points distincts A et B et leurs images A' et B' définissent une unique similitude directe. On a alors : $k = \frac{A'B\prime}{AB}$ *et* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha[2\pi]$

Ces éléments k *et* α *permettent de définir toute similitude directe. Ainsi si s est une similitude directe de centre* Ω*, elle est définie par un point, son image et son centre* Ω*.*

Toute similitude directe a donc pour éléments caractéristiques son centre , son rapport k *et son angle* α*.*

Définition

Une similitude directe S qui n'est pas une translation est déterminée par la donnée de son centre Ω*, son rapport* k *et son angle* α*.*

On dit que s est la similitude directe de centre Ω*, de rapport* k *et d'angle* α*. On notera* $S = s(\Omega, k, \alpha)$*,* k *est un réel strictement positif et* α *un réel.*

Cas particuliers

Soit $S = s(\Omega, k, \alpha)$,

- Si $k = 1$, la similitude S est une rotation : $S = s(\Omega, 1, \alpha) = r(\Omega, \alpha)$
- Si $\alpha = 0[2\pi]$, la similitude S est une homothétie de rapport k : $S = s(\Omega, k, 0) = h(\Omega, k)$
- Si $\alpha = \pi[2\pi]$, la similitude S est une homothétie de rapport $-k$: $S = s(\Omega, k, \pi) = h(\Omega, -k)$

Point invariant

Propriété

Une similitude s qui n'est pas une translation a un point invariant (point fixe) unique .
Ce point est appelé centre de la similitude.

Forme réduite d'une similitude directe

Propriété

Soit S une similitude directe qui n'est pas une translation. Soit Ω *l'unique point invariant de S,* k *le rapport de S et* α *l'angle de S.*

S est la composée de l'homothétie $h(\Omega, k)$ *de centre* Ω *et de rapport* k *et de la rotation* $r(\Omega, \alpha)$ *de centre* Ω *et d'angle* α *qui commuent. On écrit donc :*

$S = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \alpha) = r(\Omega, \alpha) \circ h(\Omega, k)$.

Cette décomposition est appelée forme réduite de la similitude directe S.

SEQUENCE 25

Similitudes directes : propriétés

Objectif

Utiliser les propriétés des similitudes directes

Propriétés des similitudes directes

1) Soit s une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle α. Alors s^{-1} est une similitude directe de centre Ω , de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.
2) Si s et s' sont deux similitudes directes de rapports k et k' et d'angle α et α', alors $s' \circ s$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.De plus on a : $s' \circ s = s \circ s'$.

Similitudes directes et triangles

Propriété: triangles semblables

On considère deux triangles ABC et A'B'C'. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- *Il existe une similitude directe s telle que* $s(A) = A'$, $s(B) = B'$ *et* $s(C) = C'$.
- $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{BC}$ *et* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) [2\pi]$.
- $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}, \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$ *et* $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

Lorsque ces propositions sont satisfaites, on dit que les triangles ABC et A'B'C' sont directement semblables.

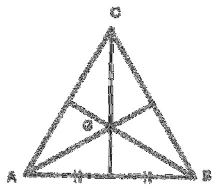
Définition

Deux triangles semblables sont directement semblables s'il y a égalité des angles orientés correspondants.

Exercices

1) ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G.I est le milieu de $[AB]$.

Pour chacune des similitudes directes suivantes préciser son rapport et son angle.



a. s_1 a pour centre B et $s_1(\mathrm{I}) = \mathrm{C}$
b. s_2 a pour centre I et $s_2(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$
c. s_3 a pour centre A et $s_1(\mathrm{G}) = \mathrm{C}$

2) ABCD est un parallélogramme, N un point du segment [DC] distinct de D et C. La droite (AN) coupe (BC) en M.
   a. Démontrer que les triangles ADN et MBA sont des triangles semblables.
   b. En déduire que $\mathrm{DN} \times MB = \mathrm{BA} \times AD$.

Leçon : Espace vectoriel

SEQUENCE 26

Espace vectoriel

Objectif

Définir un espace vectoriel

Notion d'espace vectoriel

On considère un ensemble E sur lequel on suppose définies :

- une loi de composition interne notée additivement $(+)$;
- une loi de composition interne notée multiplicativement $(\times)$ ou (.) de $\mathrm{K} \times \mathrm{E}$ sur E.

Définition

On dit que E est un espace vectoriel sur K si :

1). $(\mathrm{E}, +)$ est unngroupe abélien, c'est-à-dire :

- $\forall (x, y\, z) \in \mathrm{E}^2, (x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité).
- $\forall (x, y\, z) \in \mathrm{E}^2,\ x + y = y + x$ (commutativité).
- $\exists e \in E, \forall x \in E, x + e = x$ (élément neutre).
- $\forall x \in E, \exists x' \in E,\ x + x' = e$ (symétrique).

2). $\forall (x, y\, z) \in \mathrm{E}^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathrm{K}^2$:

- $\lambda. (x + y) = \lambda x + \lambda y \lambda.$
- $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x.$

- $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
- $1.x = x$ où 1 est élément neutre pour la multiplication dans K.

Les éléments $x, y, z, \ldots$ de E sont appelés des vecteurs alors que les valeurs de $\lambda, \mu \ldots$ de K sont appelées des scalaires. Si $\mathrm{K} = \mathbb{R}$, l'espace vectoriel E est défini sur $\mathbb{R}$.

Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

1. Soit $\mathrm{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n), x_i \in \mathrm{K}\}$ muni des lois définies par :

   - $(x_1, x_2, \ldots x_n) + (y_1, \ldots y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
     $\lambda(x_1, x_2, \ldots x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n), \forall\lambda \in \mathrm{K}$.

On dit que K^n est un espace vectoriel sur K et $\mathrm{O}_{\mathrm{K}^n} = (o, o, \ldots, o)$.

Si $\mathrm{K} = \mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel réel. En particulier, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour $(\mathbb{R}, +, .)$.

2. Soit D un nombre non vide quelconque D est généralement un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$) et E l'ensemble des applications de D dans K. On le munit de :

   - $f + g \colon \begin{smallmatrix} D \longrightarrow K \\ x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{smallmatrix}$.
   - $\alpha f \colon \begin{smallmatrix} D \longrightarrow K \\ x \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{smallmatrix}$.

E est un espace vectoriel sur K qui a pour élément neutre l'application nulle sur D.

Si $\mathrm{K} = \mathbb{R}$, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. On considère l'ensemble des suites à valeurs dans K, muni des opérations :

   - $(\mathrm{U}_n) + (\mathrm{V}_n) = (\mathrm{U}_n + \mathrm{V}_n)$.
   - $\alpha(\mathrm{U}_n) = (\alpha\mathrm{U}_n)$.

L'ensemble des suites à valeurs dans K est un espace vectoriel sur K dont l'élément neutre est la suite nulle (dont tous les termes sont égaux à O). L'opposé de la suite $\mathrm{U} = (\mathrm{U}_n)$ est la suite $-\mathrm{U} = (-\mathrm{U}_n)$.

SEQUENCE 27

Règles de calculs

Objectif

Utiliser les règles de calcul dans un espace vectoriel

Théorèmes

T_1 : Soit $(\mathrm{E}, +, .)$ un espace vectoriel sur K.

1) $\forall\vec{x} \in \mathrm{E}, o.\vec{x} = \vec{o}$ et $\forall\lambda \in \mathrm{K}, \lambda.\vec{o} = \vec{o}$.
2) $\forall(\lambda, \vec{x}) \in \mathrm{K} \times \mathrm{E}, \lambda.\vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow \lambda = o$ ou $\vec{x} = \vec{o}$.

T_2 : Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur K.

1) $\forall(\lambda,\vec{x}) \in K \times E$, $(-\lambda).\vec{x} = \lambda(-\vec{x}) = -\lambda\vec{x}$.

2) $*$ $\forall(\lambda,\vec{x},\vec{y}) \in K \times E^2, \lambda(\vec{x}-\vec{y}) = \lambda\vec{x} - \lambda\vec{y}$.

$*$ $\forall(\lambda,\mu,\vec{x}) \in K^2 \times E, (\lambda-\mu).\vec{x} = \lambda\vec{x} - \mu\vec{y}$.

Exemple

Soit $\mathbb{R}^x$ l'ensemble des polynômes $P(x) = a_1x_1 + \cdots + a_1x_1 + a_o$.

Montre que $\mathbb{R}^x$ muni de l'addition des polynômes et de la multiplication par un scalaire $\lambda.P(x)$ est un espace vectoriel.

SEQUENCE 28

Familles de vecteurs d'un espace vectoriel : combinaison linéaire de vecteurs d'une famille

Objectif

Faire une combinaison linéaire des vecteurs d'une famille

Définition

Soit $(E,+,\ .)$ un espace vectoriel sur K. Soit $n \geq 1$ puis $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in E^n$, une famille de n vecteurs de E.

On appelle combinaison linéaire de n vecteurs $x_1,\ldots,x_n$, tout vecteur s'écrivant : $\lambda_1x_1 + \cdots \lambda_nx_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i$

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni des opérations usuelles, soit la famille des vecteurs (u,v,w) telle que $u = (2\,;3), v = (1;-3) et\ w = (1;3)$. Montrons que le vecteur v est une combinaison linéaire des vecteurs $u\ et\ w$.

Si v est une combinaison linéaire de $u\ et\ w$, alors il existe $\alpha\ et\ \beta$ réels non nuls tels que : $v = \alpha u + \beta w$.

Si on remplace $= 2\ et\ \beta = 3$, on constate que $2u - 3w = (1;-3) = v$.

Donc v est bien une combinaison linéaire de $u\ et\ w$ car on a trouvé des réels $\alpha = 2\ et\ \beta = -3$ tels que $2u - 3w = v$

Exercice

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles, on donne les éléments suivants : $u = (1{,}2{,}3)$, $u_1 = (4{,}5{,}6)\ et\ u_2 = (5{,}7{,}9)$. Montrer que u est une combinaison linéaire de $u_1\ et\ u_2$.

SEQUENCE 29

Familles liées

Objectif

Définir une famille de vecteurs liés

Vecteurs colinéaires-familles liées

Définition

Soit $(E,+,.)$ *un espace vectoriel sur* K *.soient* u *et* v *deux vecteurs de .*v *est colinéaire à* u *si et seulement* $u=0$ *ou* $(u\neq 0$ *et* $\exists\lambda\in K\ /\ v=\lambda u$

Théorème

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur , soient u *et* v deux vecteurs de E .v est colinéaire à u si et seulement si u est colinéaire à v.

Remarque

u *et* v étant deux vecteurs d'un espace vectoriel E.

Quand u *et* v sont colinéaires on dit que les vecteurs u *et* v sont linéairement dépendants ou que la famille (u,v) est liée.

Lorsque u *et* v ne sont pas colinéaires, on dit que les vecteurs u *et* v sont linéairement indépendants ou que la famille (u,v) est libre.

SEQUENCE 30

Familles libres

Objectif

Définir une famille de vecteurs libres

Définition

Soit$(E,+,.)$ *un espace vectoriel sur* K*,* n *un entier naturel non nul et* $(x_i)_{1\leq i\leq n}\in E^n$

- *La famille* $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ *est liée (ou encore les vecteurs* $x_i, 1\leq i\leq n$ *sont linéairement dépendants) si et seulement si :* $\exists\ (\lambda_i)_{1\leq i\leq n}\in K^n$ *tels que :*
  $(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0\ et\ (\lambda_i,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0))$.
  L'écriture $(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0\ avec\ (\lambda_i,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0))$ *traduit une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs* x_i *.*
- *La famille* $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ *est libre (ou encore les vecteurs* $x_i, 1\leq i\leq n$ *sont linéairement indépendants) si et seulement si :* $\forall\ (\lambda_i)_{1\leq i\leq n}\in K^n$ *,* $(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0\implies\forall i\in[1,n],\lambda_i=0$*.*

Théorème

Soit $(E,+,.)$ *un espace vectoriel sur* K *et soit* $(x_i)_{1\le i\le n}$ *une famille non vide de vecteurs de* E .

- *Si l'un des vecteurs de la famille de* $(x_i)_{1\le i\le n}$ *est nul , alors la famille* $(x_i)_{1\le i\le n}$ *est liée.*
- *Si la famille* $(x_i)_{1\le i\le n}$ *est libre, alors tous les vecteurs de cette famille sont non nuls.*

SEQUENCE 30

Propriétés des familles libres ou de familles liées

Objectif

Utiliser les propriétés des familles de vecteurs

Théorème 1

Soit $(E,+,.)$ *un espace vectoriel sur* K *et soit* $(x_i)_{1\le i\le n}$ *une famille non vide de vecteurs de E.*

- *S'il existe deux indices* $i \neq j$ *et* x_i *et* x_j *soient colinéaires , alors la famille* $(x_k)_{1\le k\le n}$ *est liée.*
- *Si la famille* $(x_k)_{1\le k\le n}$ *est libre , alors les vecteurs de cette famille sont deux à deux non colinéaires.*

Théorème 2

Soit $(E,+,.)$ *un espace vectoriel sur* K *et soit* $(x_i)_{1\le i\le n}$ *une famille non vide de vecteurs de* E *constituée d'au moins deux vecteurs.*

- *La famille* $(x_i)_{1\le i\le n}$ *est liée si et seulement si il existe un vecteur de cette famille qui est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.*
- *La famille* $(x_i)_{1\le i\le n}$ *est libre si et seulement si aucun vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.*

Ce théorème fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille soit libre.

Théorème 3

Soit $(E,+,.)$ *un espace vectoriel sur* K *. Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(u_1,\dots,u_n,u) \in E^{n+1}$.

Si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ *est libre et la famille* $(u_1,\dots,u_n,u)$ *est liée , alors* u *est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille* $(u_1,\dots,u_n)$.

Théorème 4

- *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

- *Toute sous famille d'une famille liée est liée.*

Exemple

On donne dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0), v_2 = (4,1,4) et\ v_3 = (2,-1,4)$.

Montrons que (v_1, v_2, v_3) constitue une famille liée.

- Une observation judicieuse des trois vecteurs nous permet de constater que $2v_1 - v_2 + v_3 = 0$. Ce qui prouve que (v_1, v_2, v_3) est une famille liée.
- On pouvait aussi parvenir à la même conclusion en adoptant la démarche consistant à chercher les valeurs $a, b\ et\ c$ telles que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ 4b + 4c = 0 \end{cases}$

  Système qui permettra de prouver que (v_1, v_2, v_3) est une famille liée.

SEQUENCE 31

Familles génératrices

Objectif

Définir une famille génératrice

Définition

Soit $(E, +, .)$ *un espace vectoriel sur* K.

Une famille finie $(u_1, \dots, u_n)$ *d'éléments de* E *est dite génératrice de* E *si tout élément de* E *peut s'écrire comme une combinaison linéaire des* u_i *.Un espace vectoriel sur* K *qui admet une famille génératrice est dit de dimension finie.*

Exemples

1. On considère l'espace vectoriel A défini par : $A = \{(x,\ x + y,\ 2x - 3y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

   Déterminons une famille génératrice de A.

   L'espace vectoriel A peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire. On a :

   $A = \{x(1,1,2) + y(0,1,-3), (x, y) \in \mathbb{R}^3\}$et en posant $u = (1,1,2) et\ v = (0,1,-3)$, on dira que A admet pour famille génératrice la famille (u, v)

2. Même question pour $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + 3y - 2z = 0\}$

   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x + 3y - 2z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(x + 3y)$

   Donc : $B = \left\{\left(x, y, \frac{1}{2}(x + 3y)\right), (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ qu'on peut traduire comme combinaison linéaire de vecteurs. On a :

$B = \left\{\left(x\left(1{,}0,\frac{1}{2}\right) + y\left(0{,}1,\frac{3}{2}\right)\right), (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ .Donc B admet pour famille génératrice la famille (u, v)ou $u = \left(1{,}0,\frac{1}{2}\right) et\ v = \left(0{,}1,\frac{3}{2}\right)$.

3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles, on donne : $u = (1{,}1{,}3), v = (1{,}0{,}1) et\ w = (2{,}1{,}1)$

   Montrons que (u, v, w) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

   Il s'agit de montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u, v\ et\ w$, ie :

   $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3/(x, y, z) = \alpha u + \beta v + \delta w$

   On a donc : pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, soit $(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3$

   $$(x, y, z) = \alpha u + \beta v + \delta w \Leftrightarrow (x, y, z) = \alpha(1{,}1{,}3) + \beta(1{,}0{,}1) + \delta(2{,}1{,}1)$$

   $$\Leftrightarrow (x, y, z) = (\alpha + \beta + 2\delta, \alpha + \delta, 3\alpha + \beta + \delta)$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(-x + y + z) \\ \beta = \frac{1}{3}(2x - 5y + z) \\ \delta = -\frac{1}{3}(-x + 4y + z) \end{cases}$$

   Donc , pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il existe $(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3$ tel que

   $(x, y, z) = \alpha u + \beta v + \delta w\ avec\ \ \alpha = \frac{1}{3}(-x + y + z), \beta = \frac{1}{3}(2x - 5y + z) et$

   $\delta = -\frac{1}{3}(-x + 4y + z)$.

   Donc la famille (u, v, w) est génératrice de $\mathbb{R}^3$

Exercices

$\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles soient :

$E = \{(\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}\ et\ \ F = \{(\alpha - 3\beta, 2\beta, \alpha + \beta), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3\}$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Pour chacun d'eux, déterminer une famille génératrice.

SEQUENCE 32

Bases – coordonnées d'un vecteur dans une base

Objectif

Définir la base d'un espace vectoriel et déterminer les coordonnées d'un vecteur dans cette base

Définition

Soit$(E, +,.)$ *un espace vectoriel sur* K *non réduit à* $\{0\}$. *Soit* $(e_i)_{1\le i\le n}$ *une famille non vide des vecteurs de E.*

- *La famille* $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *est une base de* E *si et seulement si tout vecteur de* E *est combinaison linéaire de manière unique des vecteurs de la famille* $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *.*
- *La famille* $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *est à la fois libre et génératrice.*

  Si $B=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *est une base de E, tout vecteur* x *de* E *s'écrit sous la forme :* $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *ou les* x_i *sont des scalaires (éléments de* K *), nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux.*

  On dit alors que la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ *est la famille des coordonnées de* x *dans la base* B*.*

Exercices

1) Dans l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions numériques, on considère les familles des vecteurs suivantes :
   a. $\mathcal{V}=(x^2,x,e^x,e^{x^2})$
   b. $\mathcal{V}=(\sin x,\sin 2x,\sin^2 x)$
   c. $\mathcal{V}=(1,\cos x,\cos 2x,1+\cos x^2)$

   Pour chaque cas , la famille $\mathcal{V}$ constitue-t-elle une base ?
2) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynomes de dégrés inférieurs ou égaux à 2.

   Soit $B=(X-1,X^2-1,X^2+1)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$
   a. Montrer que B est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
   b. Déterminer les coordonnées des polynômes $1, X$ *et* X^2 dans la base B.

SEQUENCE 32

Applications linéaires

Objectif

Définir une application linéaire

Notion d'applications linéaires

Définition

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels et* f *une application de* E *dans* F*.*

On dit que f *est une application linéaire si :*

- $\forall u,v\in E, f(u+v)=f(u)+f(v)$.
- $\forall u\in E,\forall\lambda\epsilon K, f(\lambda u)=\lambda f(u)$

Théorème

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels et* f *une application de* E *dans* F*. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. f *est une application linéaire.*
2. $\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in K$, *on a :* $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$
3. *Pour tout* $n \geq 1$, $\forall v_1, v_2, \dots ; v_n \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$, *on a :* $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$.

L'ensemble des applications linéaires de E *dans* F *se note* $\mathcal{L}(E, F)$

Applications particulières

Définition

Soient $(E, +, .)$ *et* $(F, +, .)$ *deux espaces vectoriels sur* K. *Soit* f *une application de* E *vers* F.

- *Une application linéaire de* E *vers* E *s'appelle un endomorphisme de* E *.L'ensemble des endomorphismes de* E *se note* $\mathcal{L}(E)$.
- *Une application linéaire bijective de* E *sur* F *s'appelle un isomorphisme de* E *sur* F.
- *Une application linéaire bijective de* E *sur* E *s'appelle un automorphisme de* E. *L'ensemble des automorphismes de* E *se note* $GL(E)$

Théorème

Soient $(E, +, .)$*et* $(F, +, .)$ *deux espaces vectoriels sur* K, *soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a nécessairement : $f\left(\vec{0}_E\right) = \vec{0}_F$.

SEQUENCE 33

Noyau et image d'une application linéaire

Objectif

Définir le noyau et l'image d'une application linéaire

Définition

Soient $(E, +, .)$*et* $(F, +, .)$ *deux espaces vectoriels sur* K,*soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- *Le noyau de* f *est l'ensemble des éléments* x *de* E *tels que* $f(x) = 0$. *Il est noté* $\ker(f)$. *Ainsi on a :*
  $Ker(f) = \{x \in E / f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$.
- *L'image de* f *est l'ensemble des images des éléments de par* f.
  Elle est notée $Im(f)$. *Ainsi :* $Im(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E)$

Théorème

Soient $(E, +, .)$ *et* $(F, +, .)$ *deux espaces vectoriels sur* K, *soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- *f est injective si et seulement si* $Ker(f) = \{0\}$
- *f est surjective si et seulement si* $Im(f) = F$
- *f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si* $Ker(f) = \{0\}$ *et* $Im(f) = F$ *.*

Exemple

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ $dans$ $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y) = (x - y, x + 2y, -y)$.

1. Déterminons $kerf$ et Imf puis dire si f est injective ou surjective ?

   On sait que f est linéaire et soit $(x, y) \in E^2$. On a :

   $$(x, y) \in Ker(f) \Leftrightarrow f\big((x, y)\big) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

   Donc $(x, y) = (0,0)$

   Donc $Kerf = \{(0,0)\}$. Il s'ensuit que f est injective.

2. Déterminons $Im(f)$

Soit $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.

$(x', y', z') \in Im(f) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / f\big((x, y)\big) = (x', y', z')$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \begin{cases} x - y = x' \\ x + 2y = y' \\ -y = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z' \\ x = x' - z' \\ x' - y' - 3z' = 0 \end{cases}$$

Si $x' - y' - 3z' \neq 0$, le système n'a pas de solution donc $(x', y', z') \notin Imf$

Si $x' - y' - 3z' = 0$, on a donc $(x, y) = (x' - z', -z')$ ou $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f\big((x, y)\big) = (x', y', z')$.

Donc $Im(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - 3z = 0\}$

f est –elle surjective ?

On constate que le vecteur $(1,0,0)$ n'est pas dans $Im(f)$donc $(f) \neq \mathbb{R}^3$ .fn'est pas surjective.

Exercice d'entrainement de la compétence de base 1 du troisième trimestre

Exercice 1

Soit la fonction f: $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Étudier f et représenter sa courbe dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ et on désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Etudier et représenter f. (On démontrera que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe de f).

Exercice 3

Étudier et construire les courbes des fonctions f.

1) $f: x \mapsto sinx$; 2) $f: x \mapsto cosx$; 3) $f: x \mapsto tanx$; 4) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x$; 5) $f: x \mapsto x^4 - 2x^2 - 3$

Exercice 4

Soit le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$(unité graphique 1,5 cm)

1) On donne la fonction numérique f d'une variable réel x définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

a) Étudier les variations de f.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

NB : on ne demande pas de tracer la courbe représentative de f.

2) Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\ x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{3}f(x)$.

b) Étudier les variations de g.

c) Déterminer les points de (C) d'abscisses $-3, -1, 0, 2$. Placer ces points dans le repère ainsi que les points de (C) où la tangente est horizontale.

d) Tracer avec soin la courbe (C).

Exercice 5

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}/\{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-2}$.

1. a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f.

b) En déduire que la courbe (C) de f *admet une* asymptote verticale (D_1) que l'on déterminera.

2. a)Déterminer les réels a, b *et* c tels que pour tout $x \neq 2$, *on a*:

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

b) En déduire une équation cartésienne de l'asymptote oblique (D_2) à (C).

3. Montrer que le point de rencontre des asymptotes est centre de symétrie à (C).

4. Étudier la position de (C) par rapport à (D_2).

5. Calculer la dérivée $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

6. Construire la courbe (C) et ses asymptotes.

7. Discuter et résoudre graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre et le signe des racines de l'équation

$x^2 - (5+m)x + 7 + 2m = 0$.

Exercice 6

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f.

1. Démontre que f est paire, périodique de période 2π.
2. Démontre que :

   $\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\sin x\,(1+\cos x)$.

3. Dresse le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
4. Trace la courbe de f dans $\left[-\frac{7\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$.

Exercice 7

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Démontrer que f est impaire et périodique de période 2π.

2. a) Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

b) En déduire le tableau de variation de f sur $[0;\ \pi]$.

3. Tracer la courbe représentative (C) de f.

Exercice d'entrainement de la compétence de base 2 du troisième trimestre

Exercice 1

Une enquête sur la durée en minutes des communications d'une cabine téléphonique de Moursal à N'Djamena a donné les résultats suivants :

Classes(en min)	[0 ; 1[	[1; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 10[	
Effectifs	30	54	51	45	63	57

1) Construire un histogramme représentant cette série.
2) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants, puis construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3) A l'aide d'interpolations linéaires, déterminer le nombre de communications dont la durée est :
   a) supérieure à 4 min ;
   b) inférieure à 7 min ;
   c) est comprise entre 4 et 7 min.

Exercice 2

La moyenne des notes obtenues par les 50 candidats à un concours sont réparties comme suit :

Classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectifs	5	14	20	7	4

1) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants, puis construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2) a) Déterminer la classe modale et la médiane de cette série statistique.
   a) Déterminer la moyenne des notes obtenues par l'élève qui s'est classé quinzième au concours.
3) Calculer la moyenne $\bar{x}$ de cette série.
4) Calculer la variance V et l'écart-type de cette série.
5) Quel est le pourcentage des élèves dont la note appartient à l'intervalle $]\bar{x} - \delta ; \bar{x} + \delta[$?

Exercice 3

Dans une maternité, on a relevé, pour chacune des 20 naissances d'une journée, l'âge x de la mère et le poids y du nouveau-né. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

x	22	18	20	20	16	22	26	22	18	22	18	26	20	26	18	18	22	26	22	20
y	3,2	2,8	3,2	3,6	2,8	2,8	3	2,8	3	3	3,4	3,6	3,2	3	3	3,4	2,8	2,6	3	3,2

1) Présenter ces données dans un tableau à double entrée.
2) Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.
3) Représenter par des tâches le nuage des points associé à cette série double.

Exercice 4

On donne la série $(x_i;\ y_i)$ déterminée par le tableau ci-dessous :

x_i	– 3	– 1	0	5
y_i	1	– 1	4	2

1) Représenter le nuage de points associé à cette série.
2) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de x en y. Tracer ces deux courbes.
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.

Exercice 5

Lors d'une enquête portant sur 100 familles, on a relevé le nombre x des enfants de chaque famille et le nombre y des pièces de leur habitation.

Les résultats sont donnés dans le tableau à double entrée suivant :

y_i \ x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	3	2	2	0	0	0	0	0
2	3	3	6	7	3	1	0	0	0
3	1	1	4	7	7	5	4	2	0
4	0	2	3	5	4	5	6	5	3

1) Représenter à l'aide de deux tableaux les séries marginales associées aux caractères x et y.
2) Déterminer les moyennes de chacune de ces deux séries marginales.
3) Représenter par des points pondérés le nuage associé à cette série double ; placer son point moyen G.

Exercice 6

Une bille tombe dans le vide de différentes hauteurs. En mesurant à chaque fois le temps t (en secondes) de la chute et la vitesse v (en mètres par seconde) de la bille en fin de chute, on obtient le tableau suivant :

t_i	0,20	0,28	0,35	0,40	0,45
v_i	2	2,7	3,2	4	4,5

1) Représenter le nuage de points associé à cette série.
2) Déterminer le point moyen de ce nuage.
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Sa valeur justifie-t-elle un ajustement linéaire ?
4) Déterminer une équation de la droite de régression de v en t. Tracer cette droite.
5) Sachant que, dans une chute libre, la vitesse s'exprime en fonction du temps par la relation $v = gt$, déterminer une estimation de l'accélération g.
   a) comprise entre 3 et 5,3.
1) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.

Exercice 7

On considère la série statistique à deux caractères donnée par le tableau à double entrée suivant :

y_i \ x_i	-1	0	2
2	6	3	1
3	4	8	3

1) Représenter par des taches le nuage de points associé à cette série.
2) Déterminer et placer le point moyen du nuage.

Exercice d'entrainement de la compétence de base 3 du troisième trimestre

Exercice 1

Place deux points distinct O et A et construire à la règle et au compas l'image de A par chacune des similitudes suivantes, toutes centrées en O.

a) Angle $\frac{3\pi}{4}$ et rapport $\sqrt{2}$

b) Angle $-\frac{\pi}{6}$ et rapport $\frac{1}{2}$

c) Angle $\frac{2\pi}{3}$ et rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2

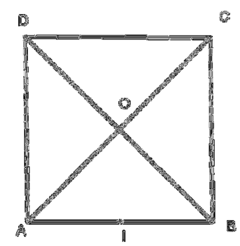
ABC est un carré direct.

O est le centre de ABC et I le milieu de[AB]

Pour chacune des similitudes directes suivantes préciser son rapport et son angle.

a) s_1 a pour centre C et $s_1(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$

b) s_2 a pour centre O et $s_2(\mathrm{I}) = \mathrm{C}$



Exercice 3

Dans le plan mini d'un repère orthonormé (OIJ) on considère les points $\mathrm{A}\binom{-3}{-2}, \mathrm{B}\binom{-1}{2}, A'\binom{2}{-3} et\ B'\binom{0}{-3}$

a) Fais la figure et place les points A, B, A' et B'

b) s est la similitude directe telle que A'=$s(A)$et $B' = s(B)$

Quel est le rapport de s?

c) Construis le point K tel que $\mathrm{I} = s(\mathrm{K})$

d) Construis l'image par s du centre A passant par O.

e) On pose $O' = s(O)$. Le triangle O'A'B' est-il rectangle ?

f) L'image par s de la médiatrice du segment [AB] est-elle parallèle à (AB′)?

g) Soit C le point de coordonnée$(0; -1)$et C' son image par s.

Montre que le triangle A' B' C'est isocèle rectangle en C' et calculer son aire.

Exercice 4

ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$

Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment[CD].

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J

1) Détermine le rapport et l'angle de la similitude s.
2) On désigne par Ω le centre de cette similitude. T_1 est le cercle de diamètre [AI], T_2 est le cercle de diamètre [BJ]

   Démontre que Ω est l'un des points d'intersection de T_1 et T_2. Placer Ω sur la figure.
3) Donne l'image par s de la droite(CB). En déduire le point image par s du point C ; puis le point Image par s du point I.
4) On pose $h = s o s$ (composée de s avec elle-même.
   a) Donne la nature de la transformation h (préciser les éléments caractéristiques).
   b) Trouve l'image du point A par h . En déduire que les points A, Ω et K alignés.

Exercice 5

On considère l'espace vectoriel A défini par : $A = \{(x,\ x+y,\ 2x-3y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Déterminer une famille génératrice de A.

Exercice 6

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles, on donne les éléments suivants : $u = (1, 2, 3)$, $u_1 = (4, 5, 6)$ et $u_2 = (5, 7, 9)$. Montrer que u est une combinaison linéaire de u_1 et u_2.

Exercice 7

Les familles suivantes sont –elles libres ?

$a)$ $v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$

$b)$ $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$

$c)$ $v_1 = (1,2,1,2,1), v_2 = (2,1,2,1,2) v_3 = (1,0,1,1,0)$ et $v_4 = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$

Exercice 8

Démontrer que applications suivantes sont-elles linéaires:

$a)$ $f(x,y) = 2x + 3y$?

$b)$ $g(x,y,y) = (x-y, x+z, x+y+z+2)$

$c)$ $h(x,y,z) = (x-y, x+z, x+y+z)$

EVALUATION

Exercice 1

1) a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' = e^{-3x}$.

   a) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = \frac{10}{9}$ et $y'(0) = \frac{5}{3}$.

   b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$ telle que $y(-2) = 1$.

   c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.

   d) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = 0$

2) Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

   résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

   Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^{3x}$?

Exercice 2

Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x d'une population.

Age x_i	36	42	48	54	60	66
Tension y_i	11,8	14	12,6	15	15,5	15 ,1

1) Représenter le nuage de points associé à cette série.

2) Déterminer une équation de la droite de régression de y *en* x et une équation de la droite de régression de x *en* y. tracer ces deux droites.

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.

4) Une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela vous parait-il normal ?

Exercice 3

Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *par*

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que u est une application linéaire
2. Déterminer $Ker(u)$

<u>Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice</u>

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

<u>Conseils et orientation de l'enseignant</u>

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

Evaluation de la compétence

Table des matières