MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA PROMOTION CIVIQUE

EDUNOTE
Portail Integré de Réussite Scolaire

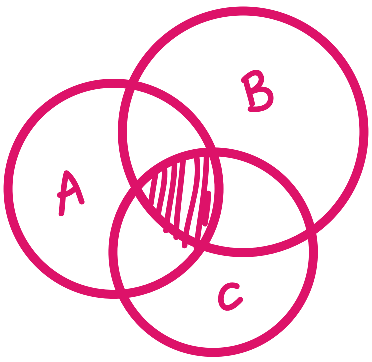
Maths
2nd S

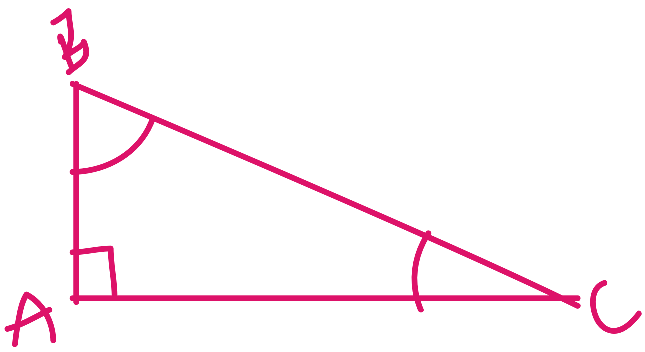
SUPPORT OFFICIEL DE L'ENSEIGNEMENT À DISTANCE AU TCHAD

✓ ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

✓ ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

✓ EXERCICES CORRIGÉS





Inscrivez-vous
www.edunote.org

Appelez le Call center
Pédagogique au
1317

Scannez puis Téléchargez
le Livre en Pdf

unicef pour chaque enfant
EDUCATION CANNOT WAIT a global fund for education in emergencies
UNFPA
Centre National des Curricula
TECHNIDEV Institut des Technologies Innovantes pour le Développement

Avant – Propos

Ce support d'enseignement à distance de Mathématiques destiné aux élèves des classes de Seconde S de l'Enseignement Secondaire Général au Tchad a été conçu dans le cadre du programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Toutes propositions tendant à l'amélioration du document seront les bienvenues.

Bonne lecture

Equipe éditoriale

Le support d'enseignement à distance de Mathématiques destiné aux classes de Seconde S (TLS) a été réalisé par une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants, en particulier :

- MM.
- MANDO FERDINAND, Professeur certifié de Mathématiques ;
- ALIYABA ZOUA, Professeur licencié de Mathématiques ;
- AHMAT HANSAN YERIMA, Professeur licencié de Mathématiques

Sous la supervision de NGARADOUM FABIEN,
Professeur certifié de Mathématiques

Saisie et mise en page
NODJIKOUAMBAYE MBAINAIDA,
Chef de Division Bibliothèque au CNC

Assistance technique :
MAHAMAT ABBA MAHAMAT, Professeur de Mathématiques

Coordination :
Dr. ABOUBAKAR ALI KORE,
Directeur Général du Centre National des Curricula
KHALID FADOUL DOUTOUM,
Directeur Général de TECHNIDEV.

PREFACE

Chers élèves, enseignants, parents et parties prenantes de l'école tchadienne,

Conformément au **protocole d'accord de partenariat du 02 septembre 2016** ayant pour objet le renforcement des capacités en technologies de l'information et de la communication dans les établissements secondaires, liant l'Etat Tchadien représenté par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique (MENPC) et l'Institut TECHNIDEV, ce dernier est amené à expérimenter des approches innovantes intégrant le numérique et visant à améliorer l'efficacité interne du système éducatif tchadien. **Le résultat attendu de cette convention (MENPC/ TECHNIDEV) étant l'accès à une éducation et la réussite pour tous.**

C'est dans ce cadre que le programme Soutien Scolaire Intégré est développé et mis en œuvre par TECHNIDEV, avec pour objectif de :

- Prendre en charge tous les élèves en difficultés scolaires dans une discipline inscrite au programme officiel et ce, conformément au niveau de l'élève ;
- Contribuer à améliorer les notes en classe de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à assurer le passage en classe supérieure de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à améliorer le taux de réussite au BAC de tous les candidats bénéficiaires ;
- Contribuer au maintien des filles à l'école.

TECHNIDEV tient à exprimer ses remerciements aux cadres du MENPC, aux partenaires (ECW et UNICEF), les experts, les inspecteurs, les enseignants et les animateurs pédagogiques et à toutes celles et tous ceux qui ont contribué d'élaboration de ce guide.

Le présent guide pédagogique décline les stratégies d'une prise en charge de l'élève soucieux de la qualité de son éducation et de sa réussite, adhérant au projet et respectant les conditions spécifiques de sa mise en œuvre.

L'enseignant, spécialisé en techniques d'évaluation et de remédiation et en éducation par le numérique, dispose d'un outil lui permettant d'agir avec une méthode axée sur les résultats en terme de développement des compétences des élèves.

Pour les parents, c'est un instrument de suivi quotidien des activités d'apprentissage de l'enfant par rapport à sa progression dans le programme.

J'invite les élèves, les enseignant (e)s et les parents à une exploitation judicieuse de ce guide pour une contribution efficace dans la mise en œuvre de programmes de Soutien Scolaire Intégré (SSI) et partant, la redynamisation de l'école tchadienne.

KHALID FADOUL DOUTOUM

Directeur Général de TECHNIDEV

INTRODUCTION

Le présent guide a été réalisé dans le cadre de programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants a contribué à son élaboration.

Ce guide, destiné principalement aux enseignants et aux élèves, a pour but de contribuer à l'amélioration et le renforcement des capacités de l'élève et ce, d'abord par l''identification de ses difficultés suivi un accompagnement stratégique basé sur une approche par compétences. Il s'adresse aux élèves du CM à la Terminale et s'appesantit principalement sur les matières fondamentales que sont le Français et les Mathématiques. Chaque Guide traite un trimestre spécifique conformément au programme de l'enseignement proposé par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique du Tchad.

Dans ce contexte, le guide met en évidence les principales compétences jugées incontournables pour la réussite de l'élève et suggère aux enseignants des stratégies et méthodologies appropriées pouvant servir à mettre en place une meilleure prise en charge individuelle de l'élève.

Dans son architecture, le guide présente de la manière suivante :

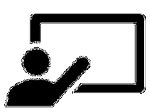
Partie 1 (destinée en premier lieu à l'enseignant) : La Fiche de programmation trimestrielle, la Fiche de Progression et la Fiche de développement de compétences du trimestre mis en exergue par ledit Guide ainsi qu'un chronogramme de prise en charge individuelle de l'élève par l'enseignant.

Partie 2 (destinée aux élèves) : Elle déroule les différentes compétences que l'élève doit développer, ainsi que des épreuves et applications favorisant l'acquisition de ces compétences. Des tableaux d'évaluation des élèves sont consacrés à la fin de chaque épreuve.

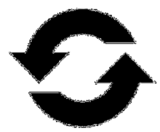
Table des Illustrations

 = Important pour l'élève

 = Astuces et consignes

 = Exercice d'application

 = Exercices d'approfondissement

 = Relire plusieurs fois

 = Compétence acquise

 = Compétence en cours d'acquisition

 = Compétence non-acquise

Partie destinée à l'enseignant

FICHE DE PROGRAMMATION ANNUELLE			
Trimestres	CB1	CB2	CB3
Trimestre I	☞ **Chapitre 1 :** Ensemble $\mathbb{R}$ et ordre ☞ **Chapitre 2 :** Valeur absolue	☞ **Chapitre 1 :** Théorie des ensembles ☞ **Chapitre 2 :** Fonctions polynômes et fonctions rationnelles	☞ **Chapitre 3 :** Vecteurs du plan
Trimestre II	☞ **Chapitre 3** : Fonctions : généralités ☞ **Chapitre 4 :** Fonctions affines par intervalles	☞ **Chapitre 3 :** Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$ ☞ **Chapitre 4 :** Equations et inéquations dans $\mathbb{R}^2$	☞ **Chapitre 4 :** Bases et repères du plan ☞ **Chapitre 6** : Trigonométrie
Trimestre III	☞ **Chapitre 6** : Fonctions de référence	☞ **Chapitre 5** : Organisation des données ☞ **Chapitre 6** : Graphiques ☞ **Chapitre 7** : Caractéristiques de position et de dispersion	☞ **Chapitre 10** : Droites du plan

OBJECTIF INTERMEDIAIRE D'INTEGRATION (OII) Seconde

Au terme de la classe de seconde L, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives permettant de mobiliser et de renforcer les connaissances mathématiques antérieures, de développer les capacités de raisonnement, d'imagination et d'analyse dans des contextes variés et transversaux.

Seconde L : CB1 : Analyse

Au terme de la classe de seconde L, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir les fonctions numériques d'une variable réelle.

Seconde L : CB2 : Algèbre -Statistiques

Au terme de la classe de seconde L, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir :

- les équations dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$
- la théorie des ensembles et les séries statistiques.

Seconde L : CB3 : Géométrie

Au terme de la classe de seconde L, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir les vecteurs, les bases et repères, la trigonométrie dans un triangle et les droites du plan.

V- Les modules d'intégration en seconde

Fiche de programmation horaire du 1er trimestre

1er Trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombre d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
1er Octobre au 31 Décembre	CB1	1	Ensemble ℝ et ordre	5H	1H		6H	
		2	Valeur absolue	5H	1H		6H	
	CB2	1	Théorie des ensembles	5H	1H	2H	6H	33H
11 semaines		2	Fonctions polynômes et fonctions rationnelles	5H	1H		6H	
	CB3	1	Vecteurs du plan	4H	1H	2H	7H	

FICHE DE PROGRESSION DU 1er TRIMESTRE

Trimestre	Période	Contenus		
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre-Statistique-Probabilité	CB 3
1	1er Octobre au 10 Novembre	- Ensemble ℝ et ordre	- Théorie des ensembles	- Vecteurs du plan
	11 Novembre au 31Décembre	- Valeur absolue	- Fonctions polynômes et fonctions rationnelles ℝ	

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Seconde Premier trimestre

Compétence de Base 1

Seconde L–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre l'ordre dans l'ensemble ℝ et la valeur absolue

Objectifs d'apprentissage (Ressources)

Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
Ensemble ℝ et ordre – ℝ et ses sous-ensembles – Les opérations dans ℝ – Les intervalles et bornes – Les extrema d'un sous-ensemble de ℝ – Le calcul approché **Valeur absolue** – Notion de valeur absolue – Valeur absolue et distances sur la droite numérique ;	– Représenter graphiquement ℝ – Effectuer les opérations dans ℝ (quotient, racine carrée et puissance) – Comparer deux nombres réels – Transformer une inégalité en une autre qui lui est équivalente – Écrire un ensemble donné en extension sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles – Déterminer un majorant, un minorant, le maximum, le minimum d'un sous-ensemble de ℝ – Encadrer un nombre réel	– Représentation graphique de ℝ – Calculs sur les quotients, les racines carrées et les puissances – Comparaison de deux nombres réels – Transformation d'une inégalité en une autre qui lui est équivalente – Écriture d'un ensemble donné en extension sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles – Détermination d'un majorant, d'un minorant, du maximum, du minimum d'un sous-ensemble de ℝ – Encadrement d'un nombre réel – Choix de la meilleure approximation d'un nombre

	résolution de l'inéquation :$x \in \mathbb{R}, \lvert x-a \rvert \le b$ – Valeur absolue et racine carrée –	– Choisir la meilleure approximation d'un nombre réel. – Trouver la valeur absolue d'un nombre donné – Traduire une distance en valeur absolue et vice versa – Résoudre dans $\mathbb{R}$l'inéquation : $\lvert x-a \rvert \le b$ et représenter graphiquement l'ensemble de ses solutions(avec $b \ge 0$) – Appliquer correctement la formule $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ – Déterminer une valeur approchée d'un réel en utilisant la valeur absolue	réel. – Détermination de la valeur absolue d'un nombre donné – Traduction d'une distance en valeur absolue et vice versa – Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $\lvert x-a \rvert \le b$ et représentation graphique de l'ensemble de ses solutions(avec $b \ge 0$) – Application correcte de la formule $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ – Détermination d'une valeur approchée d'un réel en utilisant la valeur absolue

Compétence de Base 2

Seconde L–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre la théorie des ensembles, les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
Théorie des ensembles - Notions d'ensembles, d'appartenance et de cardinal d'un ensemble - Intersection, réunion, complémentarité - Produit cartésien - Loi de composition - Notions de logique : proposition, connecteurs logiques et table de vérité - Quantificateurs.	- Reconnaitre une proposition et sa valeur ; - Utiliser à bon escient les connecteurs logiques et les quantificateurs - Distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation - Repérer et utiliser les quantificateurs universels et existentiels - Définir un ensemble et montrer l'appartenance ou non d'un élément à cet ensemble puis déterminer le cardinal d'un ensemble - Déterminer l'intersection, la réunion ou la complémentarité d'ensembles - Etablir le produit cartésien de deux ensembles	- Reconnaissance d'une proposition et sa valeur - Utilisation à bon escient des connecteurs logiques et des quantificateurs. - Distinction, dans le cas d'une proposition conditionnelle, de la proposition directe, de sa réciproque, de sa contraposée et de sa négation - Repérage et utilisation des quantificateurs universels et existentiels - Définition d'un ensemble - Vérification de l'appartenance ou non d'un élément à un ensemble, - Détermination du cardinal d'un ensemble - Détermination de l'intersection, de la réunion ou de la complémentarité d'ensembles - Détermination du produit cartésien de deux

	Fonctions polynôme et rationnelle - Fonctions polynômes - Polynômes du second degré : forme canonique - Polynôme de degré supérieur à 2 : factorisation par *x-a* (*a* élément de $\mathbb{R}$) - Fonctions rationnelles	- Reconnaitre une loi de composition - Ecrire la forme développée, réduite, ordonnée et factorisée d'un polynôme - Déterminer (ou vérifier) le zéro d'un polynôme ainsi que son signe - Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction rationnelle - Déterminer les zéros d'une fonction rationnelle, sa forme simplifiée ainsi que son signe - Donner la forme factorisée et le signe d'un polynôme du second degré après avoir trouvé sa forme canonique	ensembles - Reconnaissance d'une loi de composition - Ecriture la forme développée, réduite, ordonnée et factorisée d'un polynôme - Détermination (ou vérification) du zéro d'un polynôme ainsi que son signe - Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction rationnelle - Détermination des zéros d'une fonction rationnelle, de sa forme simplifiée ainsi que de son signe - Détermination de la forme factorisée et du signe d'un polynôme du second degré après avoir trouvé sa forme canonique.

Compétence de base 3

Seconde S–CB3 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les vecteurs du plan.		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
Vecteurs du plan - Représentant d'un vecteur - Opérations sur les vecteurs - Combinaison linéaire, décomposition d'un vecteur - Caractérisation vectorielle d'un segment et d'une demi-droite - Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle	– Représenter un vecteur – Effectuer des opérations sur les vecteurs – Faire une combinaison linéaire de vecteurs donnés – Décomposer un vecteur donné suivant deux vecteurs non colinéaires – Caractériser vectoriellement un segment ou une demi-droite – Caractériser vectoriellement le centre de gravité d'un triangle – Caractériser vectoriellement le milieu d'un segment	– Représentation d'un vecteur – Calculs sur les vecteurs – Justification de deux vecteurs colinéaires – Décomposition d'un vecteur donné en somme de deux vecteurs non colinéaires – Caractérisation vectorielle d'un segment ou une demi-droite – Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle – Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment

DEUXIEME PARTIE : FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES DESTINEES A L'ELEVE

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du premier trimestre

Leçon : Ensemble $\mathbb{R}$ et ordre

SEQUENCE 1

Ensemble des nombres réels

Objectifs

Présenter l'ensemble des nombres réels

Présentation de l'ensemble des nombres réels

Les nombres entiers naturels, relatifs, décimaux sont constructibles c'est-à-dire qu'en utilisant uniquement une règle et un compas, on peut les représenter sur une droite (D) muni d'un repère (OI) par un point d'abscisse x (x étant un nombre donné).

- *A tout point M d'une droite (D) munie d'un repère (OI), on peut associer un unique nombre réel x appelé abscisse du point M ;*
- *réciproquement, pour tout nombre réel x, il existe un unique point M de (D) admettant x pour abscisse dans le repère (OI).*

Ainsi, l'ensemble $\mathbb{R}$ *des réels peut être représenté par une droite (D) de repère (OI)*

tel que OI = 1.

L'ensemble $\mathbb{R}$ *contient les ensembles* $\mathbb{Q}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{N}$.

On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

On note :

$\mathbb{R}_+$ *l'ensemble des nombres réels positifs ;* $\mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[$

et $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\} =]0 ; +\infty[$

$\mathbb{R}_-$ *l'ensemble des nombres réels négatifs ;* $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$

et $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- - \{0\} =]-\infty; 0[$

Ainsi, $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}$;

$\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$.

SEQUENCE 2

Quotient et puissance dans $\mathbb{R}$

Objectifs

Calculer les quotients et les puissances dans $\mathbb{R}$

Quotients

Définition du quotient

a et b étant deux nombres réels tels que b ≠ 0, on appelle quotient de a par b l'unique réel

$x = \frac{a}{b}$.

Propriétés des quotients

a, b, c et d étant des nombres réels tels que b et d soient non nuls, on a :

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
2) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

   Si de plus, c ≠ 0,

4) $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$
5) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Puissances

Définition d'une puissance

a est un nombre réel et n, un entier naturel non nul.

$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$ *(on compte n facteurs égaux a).*

De plus, si a ≠ 0, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *et* $a^0 = 1$.

Propriétés des puissances

a et b étant des nombres réels, m et n deux entiers relatifs, on a :

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

4) $(ab)^n = a^n \times b^n$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6) $(-a)^n = \begin{cases} a^n \text{ si } n \text{ est pair} \\ -a^n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

SEQUENCE 3

Racines carrées

Objectifs

Définir et utiliser les propriétés de la racine carrée

Définition de la racine carrée

a est un réel positif. On appelle racine carrée de a notée $\sqrt{a}$, l'unique réel positif dont le carré est égal à a.

Propriétés de la racine carrée

a et b étant deux réels positifs et n, un entier naturel, on a :

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *(b non nul)*
3) $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$
4) *Pour tout nombre réel positif a et tout nombre x,*

   $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ *ou*

   $x = -\sqrt{a}$.

Remarque : *a et b* étant deux réels positifs, $\sqrt{a+b}$ est en général différent de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exemple

$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

On constate bien que $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

SEQUENCE 4

Définitions des inégalités dans $\mathbb{R}$ et propriétés immédiates

Objectifs

Définir et utiliser les propriétés des inégalités

Définitions

a et b sont deux nombres réels :

- → *a est inférieur à b signifie que b – a est un nombre positif.*
- → *a est strictement inférieur à b signifie que b – a est un nombre strictement positif.*

Remarque

Les symboles d'inégalités larges sont : $\leq$ et $\geq$.

Les symboles d'inégalités strictes sont : $<$ et $>$.

Propriétés immédiates

a, b et c étant trois nombres réels, on a :

1) $a \leq a$ *ou* $a \geq a$.
2) *Si* $a \leq b$ *et* $b \leq a$ *alors* $a = b$.
3) *Si* $a \leq b$ *et* $b \leq c$ *alors* $a \leq c$.

Remarque

Seule la propriété 3) reste vraie pour les inégalités strictes.

Ordre et opérations dans $\mathbb{R}$

Propriétés

a, b, c et d sont quatre nombres réels :

1) *si* $a \leq b$ *alors* $a + c \leq b + c$
2) *Pour tout réel* $c \geq 0$, *si* $a \leq b$ *alors* $ac \leq bc$

   et pour tout réel $c \leq 0$,

   si $a \leq b$ *alors* $ac \geq bc$.

   alors $ac \leq bc$ *et pour tout réel* $c \leq 0$, *si* $a \leq b$ *alors* $ac \geq bc$.

3) *En particulier, si* $a \leq b$ *alors* $-a \geq -b$.
4) *Si* $a \leq b$ *et* $c \leq d$ *alors* $a + c \leq b + d$.

5) *a, b, c et d étant quatre nombres réels strictement positifs, si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$.*
6) *a et b étant des nombres réels positifs, $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$.*
7) *a et b étant des nombres réels strictement positifs, $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.*

NB : Toutes les propriétés ci – dessus restent toujours vraies pour les inégalités strictes.

SEQUENCE 5

Comparaison et encadrement des nombres réels

Objectifs

- Comparer deux nombres réels ;
- encadrer un nombre réel.

Méthodes

Pour comparer deux nombres réels, on peut :

- les comparer à un nombre intermédiaire ;
- étudier le signe de leur différence ;
- s'ils sont strictement positifs, comparer leurs carrés, leurs racines carrées ou leurs inverses.

Encadrement d'une somme, d'une différence

Méthode

- Pour encadrer une somme, on peut ajouter membre à membre les inégalités de même sens donnant l'encadrement de chaque terme de la somme.
- Pour encadrer une différence, on peut :
  - encadrer le premier terme ;
  - encadrer l'opposé du deuxième terme ;
  - ajouter membre à membre les inégalités de même sens obtenues.

Encadrement d’un produit, d’un quotient

Méthode

- Pour encadrer un produit, on peut utiliser des encadrements où ne figurent que des nombres positifs et multiplier membre à membre les inégalités de même sens donnant l’encadrement de chaque facteur du produit.
- Pour encadrer un quotient, on peut utiliser des encadrements où ne figurent que des nombres positifs et :
  - encadrer le numérateur ;
  - encadrer l’inverse du dénominateur ;
  - multiplier membre à membre les inégalités de même sens ainsi obtenues.

SEQUENCE 6

Majorant et minorant, maximum et minimum d’un sous ensemble de ℝ Objectifs

Déterminer le majorant, le minorant, le maximum et le minimum d’un sous-ensemble

Définitions

A est un sous-ensemble non vide de ℝ.

- *Un nombre réel M est un majorant de A si M est supérieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un majorant est dit majoré.*
- *Un nombre réel m est un minorant de A si m est inférieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un minorant est dit minoré.*

Remarque

Un sous-+ensemble majoré (respectivement minoré) de ℝ admet une infinité de majorant (respectivement minorants). En effet si M est un majorant (respectivement m est un minorant), tout nombre supérieur à M (respectivement inférieur à m) est aussi un majorant (respectivement un minorant).

Définitions

Soit A un sous-ensemble non vide de ℝ.

- *Lorsqu’il existe, le plus grand élément de A est appelé maximum de A.*
- *Lorsqu’il existe, le plus petit élément de A est appelé minimum de A.*

Remarques

- ✓ Lorsqu'il existe, le maximum (respectivement le minimum) d'un Sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est unique.
- ✓ A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et M un nombre réel. M est le maximum (respectivement le minimum) de A si et seulement si M est le majorant (respectivement le minorant) de A appartenant à A.
- ✓ Un sous-ensemble majoré (respectivement minoré) n'admet pas nécessairement de maximum (respectivement de minimum).

SEQUENCE 7

Notation scientifique et ordre de grandeur

Objectifs

Exprimer un nombre réel en notation scientifique et donner son ordre de grandeur

Définition

Un nombre réel A est exprimé en notation scientifique ou en écriture normalisée lorsqu'il est écrit sous la forme : $A = a \times 10^{\alpha}$ où α est un nombre entier relatif et a un nombre réel tel que $1 \leq |a| < 10$.

Exemple

Les nombres $2{,}09 \times 10^{12}$; 4×10^{-8} ; $3{,}295 \times 10^{-9}$ sont donnés en notation scientifique ou en écriture normalisée.

Ordre de grandeur

Soit x un nombre réel d'écriture normalisée $a \times 10^{\alpha}$ et b un arrondi d'ordre 1 de a. Le nombre $b \times 10^{\alpha}$ est un ordre de grandeur de x.

L'utilisation des ordres de grandeur permet de contrôler rapidement des calculs numériques.

Exemples

1) $2{,}602 \times 10^{-19}$ a pour ordre de grandeur 3×10^{-19}.
2) $1{,}99 \times 10^{8}$ a pour ordre de grandeur 2×10^{8}.

Remarques

- ✓ Le produit (respectivement le quotient) des ordres de grandeur de deux nombres réels n'est pas toujours un arrondi du produit (respectivement du quotient) de ces deux nombres.
- ✓ Un calcul à l'aide d'ordres de grandeur permet d'obtenir rapidement une approximation grossière de la valeur d'une expression numérique.

Exercice

a) Exprime les résultats des opérations suivantes en notation scientifique: 16000×350 ; $6 \times 10^{-3} \times 0{,}02$; $\frac{360 \times 10^5}{0{,}004}$.

b) Donne un ordre de grandeur de A dans les cas suivants :

$A = 9{,}054 \times 10^{-6} \times 7{,}525 \times 10^{-7}$.

$B = 2{,}975 \times 10^{-4} \div 6{,}5241 \times 10^{-5}$.

Leçon : Valeur absolue

SEQUENCE 8

Valeur absolue d'un nombre

Objectifs

Définir la valeur absolue d'un nombre et utiliser ses propriétés

Définition

La valeur absolue d'un réel x est le réel noté $|x|$ *défini par :*

$|x| = x$ *si* $x > 0$

$|x| = -x$ *si* $x < 0$

$|x| = 0$ *si* $x = 0$

La valeur absolue d'un réel x est la distance à zéro du nombre x.

Exemple

$|4| = 4$; $|-3| = 3$; $|2 - \sqrt{10}| = -(2 - \sqrt{10}) = \sqrt{10} - 2$ car $2 - \sqrt{10}$ est négatif.

Remarque

La valeur absolue de x est le plus grand des deux nombres x et $-x$.

On note $|x| = \max\{x; -x\}$.

$\max\{x; -x\}$ se lit : le maximum de x et $-x$.

Propriétés

Soient x et y deux nombres réels :

1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $|x| = |-x|$

3) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

4) $|xy| = |x| \times |y|$

5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *si* $y \neq 0$

SEQUENCE 9

Valeur absolue et distance

Objectifs

Utiliser la valeur absolue pour calculer les distances

Propriétés

1) *Soit A et M deux points d'abscisses respectives a et x sur une droite graduée. La distance entre les réels a et x (ou entre les points A et M) est* $|x - a|$.

On écrit d (a ; x) $= |x - a|$.

2) $|x - y| \leq |x| + |y|$

3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*

4) $\sqrt{x^2} = |x|$

Exercice

A ; B et C sont des points d'une droite graduée d'abscisses respectives – 5 ; 2 et –4.

Calcule AB ; AC et CB.

SEQUENCE 10

Equations avec valeur absolue

Objectifs

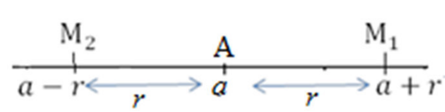
Résoudre des équations avec valeur absolue

Equations

Propriété

Soit a un réel et r un réel strictement positif

$|x - a| = r \Leftrightarrow x = a + r$ ou $x = a - r$



Cas particulier

Si $a = 0$, on a $|x| = r \Leftrightarrow x = r$ ou $x = -r$.

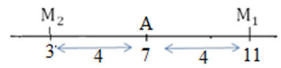
Exemples

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $|x-7| = 4 \Leftrightarrow x - 7 = 4$ ou $x - 7 = -4$

$\Leftrightarrow x = 11$ ou $x = 3$

$S = \{11; 3\}$



2) $|x^2 - 8| = 1 \Leftrightarrow x^2 - 8 = 1$ ou $x^2 - 8 = -1$

$\Leftrightarrow x^2 = 9$ ou $x^2 = 7$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

$S = \{3;\ -3;\ \sqrt{7}\ ; -\sqrt{7}\}$

SEQUENCE 11

Inéquations avec valeur absolue

Objectif

Résoudre des inéquations avec valeur absolue

Inéquations

Propriété

Soit a un réel et r un réel strictement positif

$|x-a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$

Exemples

1) $|x-5| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 5 \leq 4$

$\Leftrightarrow -4 + 5 \leq x \leq 4 + 5$

$\Leftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 9$

$S = [1; 9]$

2) $|2x+7| < 6 \Leftrightarrow -6 < 2x + 7 < 6$

$\Leftrightarrow -13 < 2x < -1$

$\Leftrightarrow \frac{-13}{2} < x < \frac{-1}{2}$

$S = \left]\frac{-13}{2}\ ;\ \frac{-1}{2}\right[$

Méthode

Pour résoudre une inéquation du type $|x-a| \geq$ r, on peut résoudre l'inéquation $|x-a| \leq$ r, puis colorier l'intervalle solution.

La solution de l'inéquation $|x-a| \geq$ r est la partie non coloriée.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$.

(I) $|x+8| \geq 10$

On résout $|x+8| \leq 10$

Comme précédemment, son ensemble solution est $[-18; 2]$

La solution de l'inéquation (I) est donc $]-\infty;\ -18] \cup [2;\ +\infty[$

SEQUENCE 12

Transformation d'inégalité en valeur absolue

Objectifs

Transformer une inégalité en valeur absolue

NB : Etant donné $x \in [a; b]$, on cherche à obtenir une inéquation du type $|x-c| \leq$ r.

Vocabulaire

Soit I l'intervalle $[a; b]$:

On appelle rayon de I le réel strictement positif r $= \frac{b-a}{2}$ et centre de I le réel c $= \frac{a+b}{2}$

Propriété

Soit a et b deux réels.

$x \in [a\ ; b\ ] \Leftrightarrow |x-c| \leq r \text{ où } c = \frac{a+b}{2} \text{ et } r = \frac{b-a}{2}$

Exemples

Traduisons en valeur absolue

1) $x \in\ [-5;\ -3]$;

$[-5;\ -3]$ a pour centre c = – 4 et pour rayon r = 1 donc on a $|x+4| \leq 1$

2) $x \in\ ]-1\ ; 3[$

$]-1; 3[$ a pour centre c = 1 et pour rayon r = 2 donc on a $|x-1| < 2$.

SEQUENCE 13

Valeur approchée d'un nombre réel

Objectifs

Donner la valeur approchée d'un nombre

Définitions

- *On dit que le réel x' est une valeur approchée du réel x à α près (ou avec l'incertitude α) lorsque* $|x' - x| < \alpha$ *c'est- à – dire x appartient à* $]x' - \alpha; x' + \alpha[$.
- *On dit que x' est une valeur approchée de x à α près par défaut lorsque x est un élément de* $]x'; x' + \alpha]$.
- *On dit que x' est une valeur approchée de x à α près par excès lorsque x est un élément de* $]x' - \alpha; x']$.

Exemple

Soit x un nombre vérifiant $3{,}522 < x < 3{,}523$. Une valeur approchée de x à 10^{-3} est 3,522 car on a $3{,}522 - 0{,}001 < x < 3{,}522 + 0{,}001$.

Remarques

- ✓ Soit x un nombre réel et m un entier naturel. Les approximations décimales d'ordre m par défaut et par excès de x sont des valeurs approchées de x à 10^{-m} près.
- ✓ x *et* y étant deux nombres réels, $x \approx y$ *à* ε *près* $\Leftrightarrow y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$. La connaissance de x à ε près définit un encadrement de x d'amplitude $2\,\varepsilon$.

  De même la connaissance d'un encadrement de x : $a \leq x \leq b$ donne $\frac{a+b}{2}$ comme valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.

Dans les deux exemples précédents, 0,555 est une valeur approchée de $\frac{5}{9}$ à 5×10^{-3} près et 3,141595 est une valeur approchée de π à 5×10^{-6}.

Leçon de la compétence de base 2 du premier trimestre

Leçon : Théorie des ensembles

SEQUENCE 14

Vocabulaire usuel : expression - proposition

Objectif

Définir une expression, une proposition

Introduction

Le langage mathématique emploie très fréquemment des signes et des symboles qui sont utilisés, souvent, comme des abréviations sans que ceux qui les utilisent connaissent leur véritable signification. Pourtant, la précision du langage mathématique est indispensable du fait de la rigueur liée à la pratique des mathématiques.

Dans ce paragraphe, les termes de base en logique sont définis afin d'en faciliter l'utilisation et la compréhension dans le domaine tout entier des mathématiques étudiées aux cycles secondaire et supérieur.

Expression

Définition

Une expression est un ensemble de signes (lettres, chiffres, symboles, mots, etc.) possédant une signification dans un univers donné.

Exemples

1) En algèbre, l'écriture : « $3x^2 + 4x - 5$ » est une expression. Elle est constituée de nombres, de lettres et de signes $+$, $\times$ et $-$.

   En algèbre, elle est l'expression d'un polynôme du second dégré.

2) En géométrie, l'écriture « ABC est un triangle » est une expression. Elle est constituée de lettres et de mots. Dans le domaine de la géométrie, cette expression traduit une donnée.

Proposition

Définition

Une proposition est un énoncé déclaratif dont on peut dire s'il est vrai ou faux, indépendamment du contexte de lieu, de temps ou de la personne qui le prononce.

De plus, un énoncé qui est, à la fois, vrai et faux, n'est pas une proposition.

Remarques

- ✓ En mathématiques, une proposition est dite vraie si elle est démontrable.
- ✓ Il est important de savoir que les mathématiques sont fondées sur une dualité, c'est-à-dire qu'une proposition est vraie ou fausse. Ainsi, toute proposition considérée comme «à moitié vraie » ou « presque vraie » est tout simplement une proposition fausse.
- ✓ D'habitude, pour simplifier les écritures, on écrit tout court, p, q, … afin de désigner une proposition.

Exemple

Voici deux énoncés :

p: « tout nombre premier est impair ».

q : « tout carré de réel est un réel positif ».

Les énoncés p et q sont des propositions au sens mathématique.

En effet, la proposition p est une proposition fausse car on peut facilement démontrer sa fausseté à partir d'un exemple de nombre premier qui n'est pas impair : le nombre premier 2.

Par contre, la proposition q est une proposition vraie et on peut facilement le démontrer.

Dire qu'une proposition est vraie ou fausse, c'est déterminer la valeur de cette proposition.

SEQUENCE 15

Vocabulaire usuel : axiome, théorème

Objectif

Définir un axiome et un théorème

Axiome

Définition

Un axiome est une proposition supposée vraie à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.

Exemples

1) Euclide (450-380 Av. J.C.) a énoncé cinq (5) axiomes appelés les 5 postulats d'Euclide et qui sont à la base de la géométrie euclidienne. Parmi ces axiomes, le cinquième a pour énoncé « par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite ».

2) En algèbre, le cinquième axiome de Péano, appelé axiome d'induction ou axiome de récurrence, a pour énoncé : « si P est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que le successeur de chaque élément de P est dans P (le successeur d'un élément n est $n + 1$), alors P$=\mathbb{N}$ ».

Théorème

Définition

Un théorème est une proposition vraie et démontrée comme telle.

Exemple

Le théorème de Pythagore est énoncé comme suit « un triangle est rectangle si et seulement si le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés »

C'est une proposition qui a été démontrée comme vraie et reconnue telle par toute la communauté des mathématiciens.

Remarque

Par abus de langage, le terme proposition désigne, dans la pratique des cours de mathématiques, un théorème intermédiaire ou de moindre importance. En réalité, toute proposition vraie et démontrée comme telle est un théorème.

SEQUENCE 16

Vocabulaire usuel : corollaire, un lemme, une conjecture et une définition

Objectif

Définir un corollaire, un lemme, une conjecture et une définition.

Corollaire

Définition

Un corolaire à un théorème est un théorème qui est la conséquence du premier théorème.

Lemme

Définition

Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

Conjecture

Définition

Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer immédiatement.

Définition

Définition

Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet.

Exemple

« un triangle équilatéral est un triangle qui a trois côtés égaux ».

Cette proposition est une définition d'un triangle équilatéral, car elle fait ressortir la particularité de ce type de triangle : « avoir trois côtés égaux ».

Exercice

Voici un ensemble d'énoncés :

a) « x est un nombre réel tel que $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ »

b) « la terre est une planète du système solaire »

c) « $f(x) = 2x^2 - 4$ »

d) « tout point placé sur un segment donné est milieu de ce segment »

e) « $2x$ est un nombre »

f) « Soient M, I et M' des points »

g) « I, M, M' sont des points, si I est milieu de [MM'] alors IM=IM' »

h) « I, M et M' sont des points, si I est milieu de [MM'] alors $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IM'}$ »

Parmi ces énoncés, distinguer les expressions des propositions et dans le cas de ces dernières, déterminer leur valeur.

SEQUENCE 17

Connecteurs logiques : la négation

Objectif

Déterminer la négation d'une proposition.

Introduction

En logique, les propositions sont considérées comme des atomes (partie élémentaire dans le calcul propositionnel) et c'est à partir d'une, de deux ou de plusieurs propositions qu'on peut créer de nouvelles propositions. Pour cela, on utilise des connecteurs logiques qui sont des mots qui marquent un rapport de sens entre des propositions et jouent un rôle clé dans l'organisation du texte.

Les différents connecteurs logiques qui seront étudiés dans ce paragraphe sont : « non », « et », « ou », « si…alors », « si et seulement si ».

Négation

Définition

La négation d'une proposition p est une proposition notée « non p » ou « $\bar{p}$ » ou « ˥p » qui est vraie si p est fausse et fausse si p est vraie.

Exemple

Soit p la proposition « $x > 4$ ».

La proposition $\bar{p}$ ou $\urcorner p$ est donc la proposition dont l'énoncé est : « $x \leq 4$ ».

Afin d'étudier les différents cas possibles pour établir les valeurs de la proposition, on a l'habitude de présenter les connecteurs logiques à l'aide de tables appelées « tables de vérité ».

Ainsi la table de vérité du connecteur non est donc :

p	$\urcorner p$
Vraie	Fausse
Fausse	vraie

En utilisant une notation informatique, la valeur « vrai » est notée par 1 et la valeur « faux » est notée 0. On obtient donc le tableau suivant, par substitution :

p	$\urcorner p$
1	0
0	1

Exercice

Voici quelques propositions :

a) *p :* « (D) et (D') sont sécantes».
b) *q:* « MNP est un triangle».
c) *r:* « tous les hommes sont mortels».
d) *s:* « z est un nombre réel strictement inférieur à –5».

Donner l'énoncé de la négation de chacune des propositions ci-dessus formulées.

SEQUENCE 18

Connecteurs logiques : la conjonction « et », la disjonction « ou »

Objectif

Déterminer et utiliser la conjonction ou la disjonction de propositions

La conjonction « et »

Définition

La conjonction de deux propositions p et q est une proposition notée $(p\wedge q)$ *qui est vraie si les deux propositions sont simultanément vraies. Elle est fausse dès que l'une au moins des deux propositions est fausse.*

Le tableau de vérité de la conjonction « et » est la suivante :

p	q	$p \wedge q$
vrai	Vrai	vrai
vrai	Faux	faux
faux	Vrai	faux
faux	Faux	faux

ou

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La disjonction « ou »

Définition

Soient p et q deux propositions.

La disjonction de deux propositions notée $p \vee q$ *est une proposition qui est vraie dès que l'une au moins des deux propositions est vraie. Elle est fausse si les deux propositions sont simultanément fausses.*

Le tableau de vérité de la disjonction est la suivante :

p	q	$p \vee q$
vrai	Vrai	vrai
vrai	Faux	vrai
faux	Vrai	vrai
faux	Faux	faux

ou

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

SEQUENCE 19

Connecteurs logiques : l'implication« si … alors »

Objectif

Utiliser l'implication pour donner la valeur de propositions

Définition

Si p et q sont deux propositions, alors l'implication « si p alors q » notée «$p \Rightarrow q$ » est une proposition qui est vraie si p est faux ou si p et q sont simultanément vrais. Cette implication n'est fausse que dans le cas où p est vrai et q est faux.

Voici la table de vérité de l'implication :

p	q	$p \Rightarrow q$
faux	faux	Vrai
faux	vrai	Vrai
vrai	faux	Faux
vrai	vrai	Vrai

ou

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Remarque

Le résultat « $faux \Rightarrow vrai$ est vrai » peut surprendre.

Si on considère les propositions suivantes p : « 2=3 et 2=1 »

et q : « 2+2 = 3+1 » et on constate qu'on peut écrire :

$2 = 3$ et $2=1 \Rightarrow 2 + 2 = 3 + 1 \Rightarrow 4 = 4$.

Donc on a : $p \Rightarrow q$, or la proposition p est fausse alors que l'affirmation finale est vraie. On a déduit ce résultat tout à fait par hasard, mais par un raisonnement juste.

La conséquence pratique de cette observation est que, si notre hypothèse de départ est fausse bien que, par la suite, nous tenions des raisonnements justes totalement, nous n'avons aucune idée en fin de raisonnement de la véracité ou de la fausseté des conclusions auxquelles nous sommes parvenues.

SEQUENCE 20

Connecteurs logiques : Négation, contraposée et réciproque d'une implication

Objectif

Utiliser la négation, la contraposée et la réciproque d'une implication

Négation d'une implication

Théorème

Soient p *et* q *deux propositions.*

On a : $\rceil(p \Rightarrow q) = p \wedge \rceil q$.

Contraposée d'une implication

Définition

Soient p et q deux propositions.

L'implication $\rceil q \Rightarrow \rceil p$ *s'appelle la contraposée de l'implication* $q \Rightarrow p$.

Réciproque d'une implication

Définition

Soient p et q deux propositions.

L'implication $q \Rightarrow p$ *s'apelle la réciproque (ou l'implication réciproque)*

de l'implication $p \Rightarrow q$.

SEQUENCE 21

Connecteurs logiques : Equivalence logique (si et seulement si)

Objectif

Définir et utiliser l'équivalence logique : « si et seulement si »

Définition

Si p et q sont deux propositions alors l'équivalence logique « p si et seulement si q » notée « $p \Leftrightarrow q$ *» est une proposition qui signifie (p si q) et (q si p).*

La valeur de vérité de l'équivalence « $p \Leftrightarrow q$ *» est la valeur de vérité de* $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

L'équivalence « $p \Leftrightarrow q$ *» est donc vraie uniquement si p et q ont la même valeur.*

La table de vérité de l'équivalence *«*$p \Leftrightarrow q$*»* est la suivante :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	faux
faux	faux	vrai

ou

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

NB : « $p \Leftrightarrow q$ » est traduit par «p si et seulement si q» ou encore par « p équivaut à q».

Pour démontrer une équivalence logique, on procède souvent en deux étapes :

1) $p \Rightarrow q$
2) $q \Rightarrow p$

Remarque : Lorsque l'on a : $p \Leftrightarrow q$, on dit que p est une condition nécessaire et suffisante de q et inversement.

Exemple

On considère la proposition suivante :

$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

Cette proposition est une équivalence logique écrite sous la forme de $p \Leftrightarrow q$ avec p: « $x^2 = 4$ » et q : « $x = 2$ ou $x = -2$ ».

SEQUENCE 22

Les quantificateurs universels et négation d'une proposition universelle

Objectifs

- Définir et utiliser les quantificateurs universels ;
- définir et utiliser la négation d'une proposition universelle.

Les quantificateurs universels

Définition

Un quantificateur est un symbole qui permet de préciser le domaine de validité d'une proposition. Le symbole $\forall$ qui signifie « quelque soit » ou « pour tout » représente le quantificateur universel. Il doit toujours être suivi du signe d'appartenance.

Exemple

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ , x \geq 0$ se lit : « quelque soit x appartenant à $\mathbb{R}_+$, x est positif ou nul » ou encore «pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+$, x est positif ou nul ».

Négation d'une proposition universelle

Définition

Une proposition universelle s'énonce de la manière suivante : « pour tout élément x d'un ensemble E, x possède la proposition p ».

Sa négation est donc : « il existe au moins un élément x de l'ensemble E qui ne possède pas la proposition p ».

Exemple

Si on a la proposition suivante : « tout le monde a la moyenne », la négation de cette proposition est : « un élève au moins n'a pas la moyenne ».

De même, si on a la proposition : « tous les lecteurs de ce chapitre comprennent tout ce qui est écrit », la négation de cette proposition sera donc : « un lecteur au moins ne comprend pas ce chapitre ».

SEQUENCE 23

Les quantificateurs existentiels et négation d'une proposition existentielle

Objectifs

- Définir et utiliser les quantificateurs existentiels ;
- définir et utiliser la négation d'une proposition existentielle.

Définition

On appelle quantificateur existentiel le symbole $\exists$ *qui signifie : « il existe au moins un … tel que ».*

Le symbole $\exists!$ *signifie : « il existe un unique … tel que ».*

Ainsi, si on écrit : « $\exists x \in E / P(x)$ *» ou «* $\exists x \in E, P(x)$ *» cela signifie : « il existe au moins un élément* x *de E tel que* x *possède la propriété P ».*

De même, si on écrit : « $\exists!\, x \in E / P(x)$ *», cela signifie : « il existe un unique élément* x *de E tel que P(*x*)».*

L'écriture « $\exists!\, x \in E / P(x)$ *» peut s'écrire encore : «* $\exists!\, x \in E, P(x)$ *».*

Négation d'une proposition existentielle

Définition

Une proposition existentielle est une proposition qui s'énonce de la manière suivante : « il existe au moins un élément x *de E tel que* x *possède la propriété p » qu'on note «*$\exists x \in E, p(x) vraie$*».*

Sa négation est donc : «pour tout élément x *de E,* x *ne vérifie pas p » qu'on note : «*$\forall\, x \in E, p(x) faux$ *».*

Exemple

Si p: «$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$» est une proposition donnée ; sa négation $\rceil p$ sera : « $\forall\ \exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 \neq -1$».

On constate que la proposition p est fausse alors que $\rceil p$ est une proposition vraie.

Remarque : Pour démontrer qu'une proposition universelle n'est pas vraie, il suffit de trouver un seul x qui ne vérifie pas la proposition donnée. C'est ce qu'on appelle un contre-exemple.

SEQUENCE 24

Théorie des ensembles : ensemble et éléments

Objectif

Définir un ensemble et ses éléments

Définition d'un ensemble

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments que l'on peut énumérer ou définir par une propriété.

- *Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble, on dit que cet ensemble est défini par extension.*
- *Lorsqu'on définit un ensemble par une propriété, on dit que cet ensemble est défini par compréhension.*

Exemples

1) Si on écrit A $=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, on dit que A est l'ensemble des chiffres impairs. A est défini en extension car on a énuméré les éléments de cet ensemble.
2) Certains ensembles ont des notations particulières.

   Par exemple, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux relatifs, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombre rationnels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

3) Quand un ensemble comprend un nombre d'éléments trop importants, on préfère le définir par compréhension.

   Ainsi, si B est l'ensemble de nombres entiers naturels pairs, on l'écrira :

   B $=\{x \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N}, x = 2k\}$et on lit : « B est l'ensemble des entiers naturels x tel qu'il existe au moins un entier naturel k et x égal 2 k ».

Définition d'un élément

Un ensemble est constitué d'éléments. On désigne très souvent les éléments d'un ensemble par des lettres minuscules.

Si a est un élément de l'ensemble A, on dit que «a appartient à A » et on note «$a \in A$ ». Le symbole $\in$ signifie « appartient à »

Exemple

Considérons l'ensemble B défini par compréhension :

$B = \{x \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N}, x = 2k\}$.

On dira que $2 \in B$ car 2 est nombre pair, il est donc élément de B.

Par contre, si on considère le chiffre 3 par exemple, on sait que 3 n'est pas un entier pair donc 3 n'est pas un élément de B. Dans ce cas, on écrit $3 \notin B$ et on lit « 3 n'appartient pas à B ».

Remarque : Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide.

SEQUENCE 25

Théorie des ensembles : sous-ensembles

Objectif

Définir un sous-ensemble et son complémentaire

Définition d'un sous-ensemble

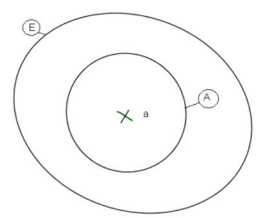
On dit qu'un ensemble A est un sous-ensemble d'un ensemble E si tout élément de A est élément de E ou si $A = \emptyset$.

On dit alors que A est inclus dans E ou A est une partie de E et on note « $A \subset E$ ».

On a alors : $A \subset E \Leftrightarrow \forall a \in A, a \in E$ ou $A = \emptyset$.

Le symbole $\subset$ signifie « est inclus dans ».

On peut représenter cette situation par un schéma appelé diagramme de Venn :



Cette situation montre que A est un sous-ensemble de E puisque tout élément de A est aussi un élément de E.

Remarque

- ✓ L'ensemble vide se note {} ou $\emptyset$.
- ✓ Si on écrit {{}}, cet ensemble n'est pas vide. Il contient un élément qui est {} ou $\emptyset$.
- ✓ un ensemble qui ne possède qu'un seul élément est appelé singleton.

- ✓ Lorsqu'un ensemble est défini par extension, les répétions d'éléments ne comptent pas. Ainsi: {2, 3, 4, 2}= {2, 3, 4}.
- ✓ Dans un ensemble défini par extension, l'ordre d'énumération des éléments n'est pas important. Ainsi :

  {2, 3, 4,}= {4,3, 2}={2, 4, 3}={3,2, 4}.
- ✓ Les ensembles peuvent être éléments d'autres ensembles. Par exemple :

  {{1,2},∅ , {1, 2, 3}} est un ensemble qui a pour éléments {1,2},∅ , {1, 2, 3}.
- ✓ Un ensemble peut contenir des éléments de type différents.

Par exemple : {2, vrai, c}.

Exercice

On donne E = {1,2, 3}. On note P(E) l'ensemble de toutes les parties de E.

Enumère tous les éléments de P(E).

Définition du complémentaire d'un ensemble

On appelle complémentaire de l'ensemble A dans l'ensemble E, l'ensemble noté $C_E(A)$ composé des éléments de E qui ne sont pas éléments de A.

Le complémentaire de A correspond au connecteur non A.

On a alors : $a \in C_E(A) \Leftrightarrow a \in E$ *et* $a \notin A$.

Dans le cas où l'ensemble E est implicite, on note le complémentaire de A par l'écriture $\overline{\mathrm{A}}$.

Exemple

Considérons l'ensemble P des nombres entiers naturels pairs.

Ici, l'ensemble ℕ est implicite et le complémentaire de P qu'on note $\overline{\mathrm{P}}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels impairs.

SEQUENCE 26

Théorie des ensembles : intersection, union d'ensembles

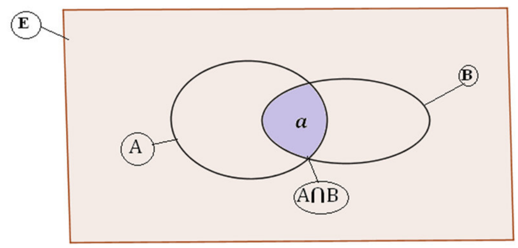
Objectif

Définir l'intersection et l'union d'ensembles

Définition de l'intersection de deux ensembles

On appelle intersection de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E, l'ensemble noté A⋂B qui se lit : « A inter B », constitué des éléments communs à A et B.

On a donc : $a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A$ *et* $a \in B$.



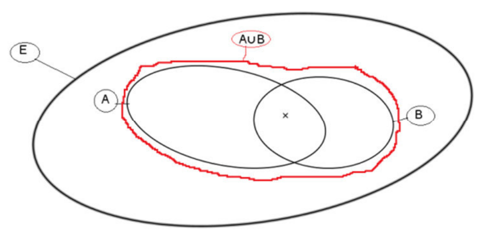
Remarque : Si A⊂B alors A⋂B = A

Si A et B n'ont aucun élément commun, alors A⋂B est vide.

On écrit : $A \cap B = \emptyset$ et on dit que A et B sont des ensembles disjoints.

Définition de l'union de deux ensembles

On appelle union de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E, l'ensemble noté : « A∪B » qui se lit : « A union B » constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B.



On écrit : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ *ou* $x \in B$.

On présente la situation par un diagramme de Venn.

Exemple

Considérons les ensembles suivants :

A est l'ensemble des chiffres arabes et B est l'ensemble des nombres entiers naturels pairs inférieurs à 20.

On a : A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

B = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}.

Déterminons A ∪ B.

A ∪ B est l'ensemble des éléments de A ou de B. On a donc :

A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 12, 14, 16, 18}.

Remarque

- ✓ Si on a : $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.
- ✓ Si A est un ensemble donné, $\overline{A}$ étant son complémentaire dans E, alors on a : $A \cup \overline{A} = E$.

SEQUENCE 27

Lois de Morgan, distributivité et produit cartésien de deux ensembles

Objectifs

- Utiliser la propriété de Morgan ;
- définir le produit cartésien de deux ensembles

Propriété de Morgan

Soient A et B deux sous- ensembles de E, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ les complémentaires respectifs de A et B dans l'ensemble E. On a alors :

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ *et* $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

En d'autres termes, le complémentaire de l'intersection est égal à l'union des complémentaires et le complémentaire de l'union est égal à l'intersection des complémentaires.

Propriété de distributivité de l'intersection et de l'union

Soient trois sous-ensembles A, B et C d'un ensemble E ; on a alors les égalités suivantes :

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *et* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Définition du produit cartésien de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles.

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F noté $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

On a : $E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$.

Exercice

On considère les ensembles suivants :

M est l'ensemble des chiffres arabes et N est la paire {vrai, faux}.

Ecrire le produit cartésien M×N.

Combien d'éléments contient l'ensemble M×N ?

SEQUENCE 28

Loi de composition

Objectifs

Définir une loi de composition interne

Loi de composition interne

Définition 1

Une loi de composition T est dite interne sur un ensemble E lorsqu'elle définit une application de $E \times E$ dans E, telle que $\forall x \in E, \forall y \in E, \ xTy \in E$.

Ou encore $\forall (x, y) \in E \times E, xTy \in E$.

Définition 2

Soit E un ensemble.

Une loi de composition T sur E est dite :

- *commutative si $\forall x, y \in E$, on a : $xTy = yTx$;*
- *associative si $\forall x, y, z \in E$, on a : $xT(yTz) = (xTy)Tz$;*
- *distributive par rapport à une deuxième loi S si $\forall x, y, z \in E$,*
  on a : $xT(ySz) = (xTy)S(xTz)$.

Exemples

Considérons l'ensemble P des nombres entiers naturels pairs.

1) Pour tous entiers naturels pairs a et b, on a toujours : $a + b = b + a$.

   On dit alors que l'addition est une loi interne commutative sur P.

2) De même, elle est associative car, pour tout triplet d'entiers naturels pairs, la place des parenthèses dans leur somme ne change pas le résultat.

   On a toujours : $a + (b + c) = (a + b)$+c.

3) On sait que $+$ est une loi interne sur P. De même, $\forall (a, b) \in$ P×P, le produit de deux nombres entiers pairs est toujours un nombre entier pair donc $a \times b$ ∈P.

   D'autre part, $\forall a, b, c$ ∈P, $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

La multiplication est distributive par rapport à l'addition sur P.

Exercice

Soit E, l'ensemble défini par E = { a, b, c}.

$\mathcal{P}$(E) est l'ensemble des parties de E et on le définit par :

$\mathcal{P}$(E) = $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

a) L'intersection (∩) est-elle une loi de composition interne sur $\mathcal{P}$(E).

Appuyer la réponse par des exemples.

b) Si oui, est-elle commutative ? Associative ?

c) La réunion (∪) est-elle aussi une loi interne sur $\mathcal{P}$(E)? Appuyer la réponse par des exemples.

Leçon : Fonctions polynôme et rationnelle

SEQUENCE 29

Fonction polynôme : généralités

Objectif

Définir un polynôme et utiliser son théorème fondamental

Définition d'un polynôme

Un polynôme P est une fonction définie sur $\mathbb{R}$*, qui peut s'écrire sous la forme* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots + a_1x + a_0$ *où n est un entier naturel et* a_0 , a_1, ……., a_{n-1}, a_n *sont (n + 1) réels.*

Lorsqu'on écrit P(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots + a_1x + a_0$ *, on dit que P est ordonné suivant les puissances décroissantes de x.*

C'est cette forme qui est habituellement la plus utilisée.

Les expressions $a_n x^n$; $a_{n-1}x^{n-1}$; $a_1 x$; a_0 sont appelés des monômes.

On peut aussi ordonner un polynôme suivant les puissances décroissantes de x.

Théorème fondamental

On admet que tout polynôme non nul P peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$

où n est un entier naturel et $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ sont des nombres réels tels que $a_n \neq 0$.

Définitions et notation

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$ *un polynôme* ($a_n \neq 0$).

- *L'entier naturel n est appelé le degré du polynôme P et est noté degP = n.*
- *Les nombres a_n ; a_{n-1} , a_1 ; a_0 sont appelés les coefficients respectifs des termes $a_i x^i$ ($0 \leq i \leq n$).*

SEQUENCE 30

Fonction polynôme : généralités

Objectifs

- Définir un polynôme nul ;
- identifier des polynômes égaux ;
- déterminer les racines d'un polynôme.

Théorème (nullité d'un polynôme)

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$ *un polynôme.*

$P(x) = 0 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \ldots\ldots\ldots a_1 = a_0 = 0.$

De façon plus explicite, ce théorème peut s'énoncer comme suit :

« un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls ».

Théorème (polynômes égaux)

P et Q sont deux polynômes non nuls tels que , pour tout réel x :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$

$Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots\cdots + b_1 x + b_0$

Les polynômes P et Q sont égaux si et seulement si :

- *ils ont même degré*
- *les coefficients des termes de même degré sont égaux.*

En d'autres termes :

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} n = p; n-1 = p-1 \ldots \\ \forall i \in \mathbb{N},\ a_i = b_i. \end{cases}$$

C'est une conséquence de la propriété fondamentale puisqu'un polygone peut être écrit de façon unique sous forme réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de x.

Exemple

On donne : $P(x) = 3x^n + 5x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 7$

$Q(x) = ax^4 + bx^p + 7x^2 + (c - 1)x + d$

$$P = Q \Leftrightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{c} a = 3 \\ b = 5 \\ -\alpha = 7 \\ \beta = c - 1 \\ d = 7 \end{array}\right\} \text{égalité des coefficients} \\ \left.\begin{array}{c} n = 4 \\ p = 3 \end{array}\right\} \text{égalité des degrés} \end{cases}$$

Définition (racine d'un polynôme)

Soit P un polynôme :

On dit que α est une racine (ou un zéro) de P lorsque P(α) = 0.

Remarque

Déterminer une racine de P, c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exemple

On donne $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.

-2 est une racine de P mais 1 n'est pas une racine de P.

En effet : $P(-2) = -8 + 16 - 10 + 2 = 0$ mais

$P(1) = 1 + 4 + 5 + 2 = 12 \neq 0$

SEQUENCE 31

Opérations sur les polynômes et produits remarquables

Objectifs

- Calculer la somme et le produit de polynômes ;
- utiliser les égalités remarquables.

Produit

Théorème

Soit P et Q deux polynômes :

Le produit PQ est aussi un polynôme tel que deg(PQ) = degP + degQ.

Somme

Théorème et définition

Soit P et Q deux polynômes :

La somme P +Q est aussi un polynôme tel que deg(P + Q) ≤ max(degP; degQ).

Rappels sur les produits remarquables

Pour tous réels a et b, on a :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

SEQUENCE 32

Polynômes du second degré : forme canonique

Objectif

Mettre sous forme canonique un polynôme du second degré
NB : Nous allons nous intéresser aux polynômes du second degré, c'est-à-dire de la forme :
$ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

Forme canonique

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$

Pour tout x réel, $P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

Mais $x^2 + \frac{b}{a}x$ *est le début du développement de l'identité remarquable* $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

En effet $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

Ce qui nous permet d'obtenir $x^2 + \frac{b}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

Ainsi $P(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4\,a^2}\right]$

Cette dernière expression s'appelle la ***forme canonique*** *du polynôme du second degré* $ax^2 + bx + c$.

SEQUENCE 33

Factorisation des polynômes par $x - d$ ($d \in \mathbb{R}$) en utilisant la méthode des coefficients indéterminés

Objectif

Factoriser un polynôme en utilisant la méthode des coefficients indéterminés.

Théorème fondamental et définition

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 et d un réel. d est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que pour tout réel x,

P(x) = (x – d)Q(x). On dit que Q est le quotient de P(x) par x – d.

Détermination du quotient Q(x)

Nous allons donner deux méthodes qui permettent de déterminer le quotient Q(x) de P(x) par x – d lorsque d est une racine de P.

Méthode des coefficients indéterminés

On donne P(x) = $3x^3 - 7x^2 + 5x - 6$

Vérifions que 2 est une racine de P.

On a :

P(2) = 24 – 28 + 10 – 6 = 0.

Trouvons un polynôme Q tel que pour tout x réel, P(x) = (x–2)Q(x).

D'après le théorème fondamental, il existe un polynôme Q tel que pour tout x réel, P(x) = (x– 2)Q(x). Comme le polynôme P est de degré 3, le polynôme Q est nécessairement de degré 2.

Posons donc Q(x) = $ax^2 + bx + c$ puis cherchons à déterminer les réels a, b et c.

P(x) = (x– 2)Q(x)

$= (x - 2)\ (ax^2 + b + c)$

$= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$

Par ailleurs P(x) = $3x^3 - 7x^2 + 5x - 6$

Donc par principe d'égalité de polynômes, on a :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -7 \\ c - 2b = 5 \\ -2c = -6 \end{cases}$$

Ce système donne : a =3 ; b = –1 et c = 3 d'où Q(x) = $3x^2 - x + 3$.

SEQUENCE 34

Factorisation des polynômes par $x - d$ ($d \in \mathbb{R}$)en utilisant la méthode de division euclidienne

Objectif

Factoriser un polynôme en utilisant la méthode de la division euclidienne.

Méthode de la division euclidienne

Reprenons le même polynôme P précédent et on le divise par $x - 2$.

Disposition pratique :

$$\begin{array}{r|l}
3x^3 - \ 7x^2 + 5x - 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-(3x^3 - 6x^2) & \\ \hline
-x^2 \ + 5x - 6 & \\
-(-x^2 + & \\
2x) & \\ \hline
-(3x - 6) & \\
3x - 6 &
\end{array}$$

Donc $Q(x) = 3x^2 - x + 3$.

Remarque :

- On peut directement prendre les opposés des termes qui se trouvent dans les parenthèses sans mettre ces parenthèses.
- Etant donné un polynôme avec une racine, l'on est libre de choisir une méthode pour déterminer le quotient à moins que celle-ci ne soit imposée.
- Lorsqu'on veut factoriser un polynôme et qu'une racine n'est donnée, vérifier qu'il existe une racine « évidente » qui est à chercher parmi les nombres comme 1 ; –1 ; 2 ; –2 ; 3 ; –3 etc.

SEQUENCE 35

Fractions rationnelles

Objectif

Définir une fraction rationnelle, déterminer son domaine de définition et étudier son signe

Définition

On appelle fraction rationnelle, toute fonction de la forme $\frac{P}{Q}$ *où P et Q sont deux polynômes avec Q non nul.*

Domaine de définition, simplification, signe et racine d'une fraction rationnelle

On donne $f(x) = \frac{-2x^3 + x^2 + 13x + 6}{2x^2 - x - 1}$

Domaine de définition de f.

Le polynôme f est défini si $2x^2 - x - 1 \neq 0$

$2x^2 - x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) \neq 0$

$\Leftrightarrow x - 1 \neq 0$ et $x + \frac{1}{2} \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -\frac{1}{2}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$$

Simplification de f

Pour simplifier f, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur de f.

Vérifier que $-2x^3 + x^2 + 13x + 6 = 2(x + \frac{1}{2})(x+2)(3-x)$

Donc $f(x) = \frac{2(x+\frac{1}{2})(x+2)(3-x)}{2(x+\frac{1}{2})(x-1)}$

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}, f(x) = \frac{(x+2)(3-x)}{x-1}$

C'est la forme simplifiée de f.

Signe de la fraction rationnelle dans un tableau de signe

Ainsi $\forall\, x \in \left]-\infty\,; -2\right] \cup \left]1\,; 3\right], f(x) \geq 0.$

$\forall\, x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; 1\right[\cup [3; +\infty[, \quad f(x) \leq 0.$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3.$

$S = \{2; 3\}$

f admet deux racines qui sont 2 et 3.

Leçons de la compétence de base 3 du premier trimestre

Leçon : Vecteurs du plan

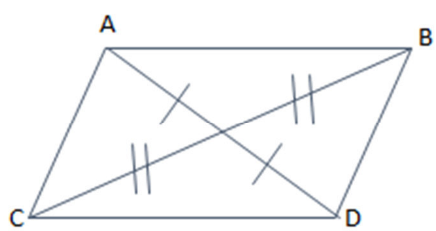
SEQUENCE 36

Définition des vecteurs

Objectif

Définir et construire un vecteur

Définitions



Définition 1

on dit que les bipoints (A, B) et

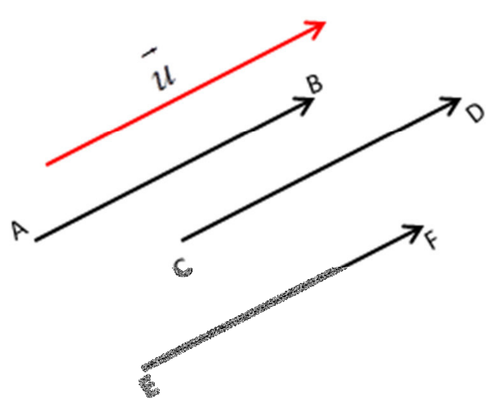
(C, D) sont équipollents si ABDC forme un parallélogramme.

(A, B) et (C, D) sont des bipoints équipollents car le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

On a :

- *(AB)// (CD)*
- *AB=CD*
- *(A,B) et (C,D) ont le même sens.*

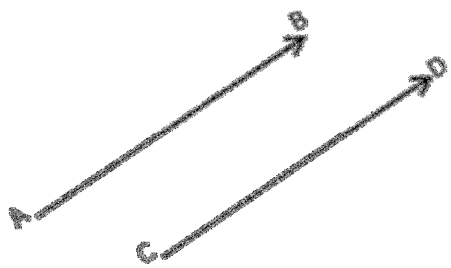
Définition 2



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ *est l'ensemble des bipoints équipollents à (A, B).*

On dit que $\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{EF}$ *sont des représentants du vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

Définition 3 (égalité de vecteurs)



On dit que deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur .

On a ici : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$car

$$\begin{cases} (AB) \parallel (CD) \text{: même direction} \\ \text{Sens de A vers B et C vers D} \\ AB = CD \end{cases}$$

NB : Dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que ABDC est un parallélogramme.

Définition 4 (norme d'un vecteur)

Soit $\vec{u}$ *un vecteur et (A, B) un bipoint tel que* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle norme de $\vec{u}$ *la distance de A à B, c'est-à-dire le réel AB.*

On note : $\| \vec{u} \| = \overrightarrow{AB}$

NB : Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1.

SEQUENCE 37

Somme de vecteurs

Objectif

Additionner des vecteurs en utilisant la relation de Chasles

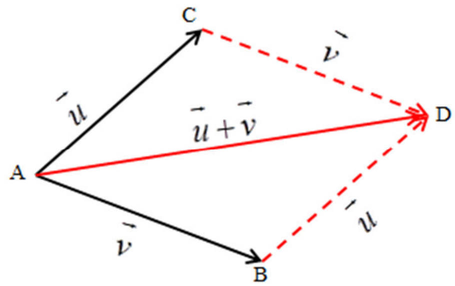
Relation de Chasles

Quels que soit les points A, B et C du plan, on a :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Constructions

- Cas de vecteurs ayant même origine



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de même origine.

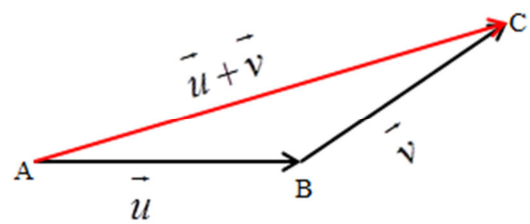
Procédure

On construis le point D tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

On a donc : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Cette procédure faisant intervenir un parallélogramme pour construire la somme de deux vecteurs est appelée « la règle du parallélogramme ».

- Cas de deux vecteurs où l'origine de l'un est l'extrémité de l'autre.



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On a: $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

SEQUENCE 38

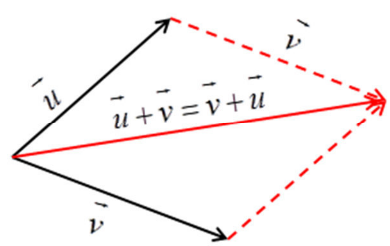
Propriétés de l'addition de vecteurs

Objectif

Utiliser les propriétés de l'addition des vecteurs

Propriétés

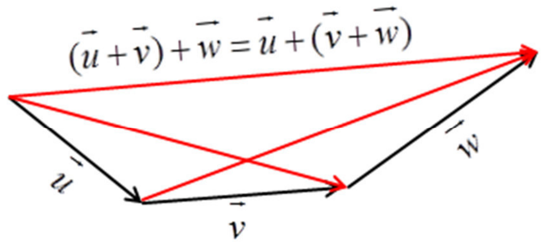
1) *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.*



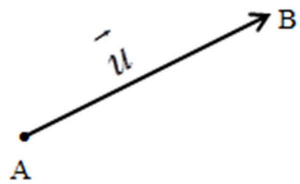
On a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan.

On a :$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$



2) *Soit* $\vec{u}$ *un vecteur du plan tel que* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$*.*



Calculons : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB}$*. On a :* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ *d'après la relation de Chasles.*

Cette écriture nous permet d'affirmer que $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$*.*

Donc on a : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$*.*

3) *Soit* $\vec{u}$ *un vecteur du plan que* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Calculons $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ *. D'après la relation de Chasles on a :* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

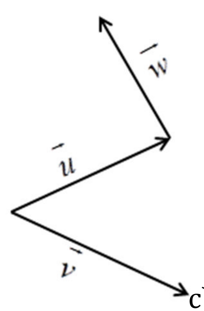
Or $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *donc* $\overrightarrow{BA} = -\vec{u}$ *et on a :* $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$*.*

On énonce :

Tout vecteur $\vec{u}$ *a un opposé* $-\vec{u}$ *tel que : :* $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$*.*

Exercices

1) On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan tels que représentés ci-dessous.



a) Construis un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ puis de $\vec{u} + \vec{w}$ puis représente le vecteur $(\vec{u} + \vec{w}) + \vec{w}$.

b) A-t-on $(\vec{u} + \vec{w}) + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{w}) + \vec{v}$?

c)

2) Simplifie l'écriture suivante :. $\vec{u} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QN}$

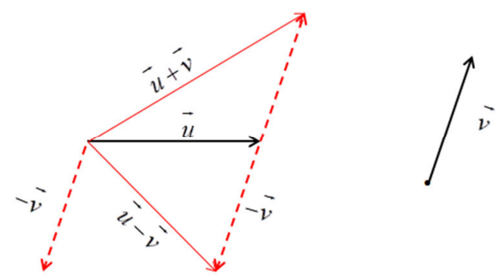
SEQUENCE 39

Différence de vecteurs

Objectifs

- Définir et construire la différence de vecteurs ;
- décomposer un vecteur.

Définition



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs du plan.

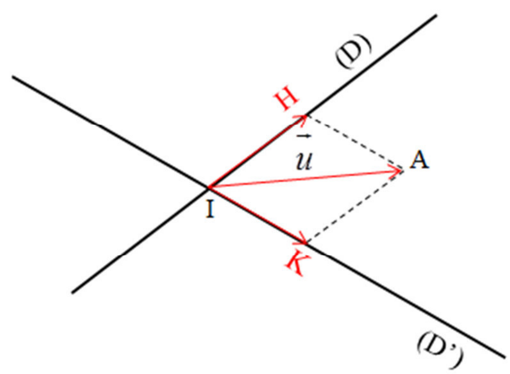
On appelle différence de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}$ égal à $\vec{u}+(-\vec{v})$.

Propriété

Pour tous points O, A et B du plan, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Décomposition d'un vecteur

Propriété



Tout vecteur $\vec{u}$ non nul du plan peut être décomposé en deux autres vecteurs non colinéaires.

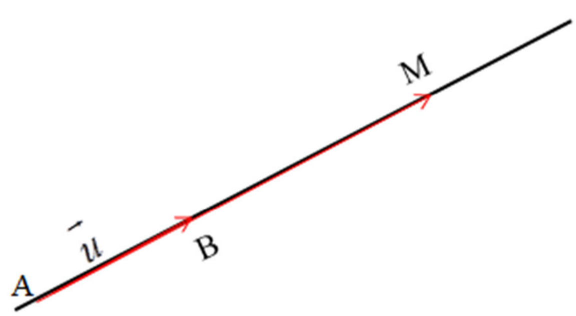
Soit $\vec{u}=\overrightarrow{IA}$

Par construction des projections de A sur (D) et (D') on détermine les points H et K tels que IHAK est un parallélogramme et le vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{IA}$ est la résultante des vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IK}$ car on a : $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{IK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont les deux composantes vectorielles de $\overrightarrow{IA}$.

SEQUENCE 40

Produit d'un vecteur par un réel

Objectif



Multiplier un vecteur par un réel et définir un vecteur colinéaire

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est le produit du vecteur $\vec{u}$ par un réel k lorsqu'on a : $\overrightarrow{AM} = K\overrightarrow{AB} = K\vec{u}$

$\overrightarrow{AM} = K\overrightarrow{AB}$ et

1) Si k > 0, alors B et M sont de même côté de A
2) Si k < 0, alors B et M sont de part et d'autre de A
3) Si k = 0, alors $\overrightarrow{AM} = 0\vec{u} = \vec{O}$.

Exercice

a) Construire un vecteur $\overrightarrow{AB}$ du plan tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$ cm.
b) Construis les points M et N du plan tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.
c) Déterminer $\|\overrightarrow{AM}\|$ et $\|\overrightarrow{AN}\|$.

Propriétés

Pour tous vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels $\propto$ et β, on a :

1) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.
2) $\alpha.(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} = +\alpha\vec{v}$.
3) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta).\vec{u}$.
4) $1.\vec{u} = \vec{u}$.

Ces propriétés permettent de justifier les règles de calcul sur les vecteurs.

Vecteurs colinéaires

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires lorsque les deux vecteurs ont même direction.

Dans ce cas, il existe un réel k tel que $\vec{v} = K.\vec{u}$ ou un réel k' tel que $\vec{u} = K'.\vec{u}$.

Remarque : Le vecteur nul $\vec{O}$ est colinéaire à n'importe quel vecteur.

SEQUENCE 41

Caractérisation vectorielle d'un segment, d'une droite ou d'une demi-droite et centre de gravité d'un triangle

Objectifs

- Caractériser vectoriellement un segment, une droite, une demi-droite ;
- déterminer le centre de gravité d'un triangle.

Droites

Propriété

L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM} = K.\overrightarrow{AB}$*, k*$\in\mathbb{R}$ *est la droite (AB).*

On note : (AB)=$\{M \text{ que } \overrightarrow{AM} = K.\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}\}$

L'écriture $\overrightarrow{AM} = K.\overrightarrow{AB}$ *est la caractérisation vectorielle d'une droite (AB) car elle traduit le lieu des points M appartenant à la droite (AB).*

Demi-droites et segments

A partir de la caractérisation vectorielle d'une droite, on peut établir la caractérisation vectorielle d'un segment ou d'une demi-droite..

- *Caractérisation vectorielle d'un segment :*$[AB] = \{\, M/\overrightarrow{AM} = K.\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}[0,1]\}$
- *Caractérisation vectorielle d'une demi-droite :*[AB)=$\{M/\overrightarrow{AM} = K.\overrightarrow{AB}, K \in \mathbb{R}^{+}\}$

Milieu d'un segment

Théorème

Soit A, B et I trois points du plan.

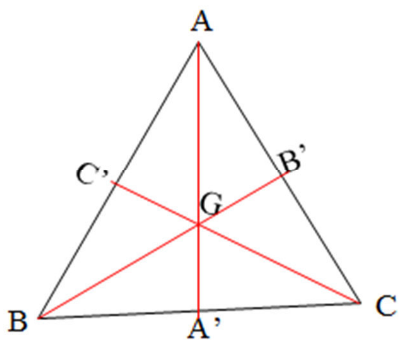
- *I est milieu du segment [AB] si l'on a l'une des relations vectorielles suivantes :*
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} = \vec{O}$ ou $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$
- *I est le milieu du segment [AB] si et seulement si pour tout M du plan, on a :*
  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Théorème

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC], alors on a : $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Centre de gravité d'un triangle.

Théorème



Le centre de gravité d'un triangle ABC est le seul point

G tel que.$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$

Exercices d’entrainement de la compétence de Base 1 du premier trimestre

Exercice 1

Calculer les nombres suivants en présentant les résultats sous la forme d’une fraction :

$\frac{\frac{1}{2}}{3}$; $\frac{1}{\frac{2}{3}}$; $\frac{2}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}$; $\frac{\frac{3}{5}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}$;

$\frac{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}}{4+\frac{2}{5}} \div \frac{\frac{4}{5}-\frac{6}{7}}{\frac{5}{7}+\frac{3}{7}}$; $\frac{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}} \times \frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}+\frac{3}{4}} \div \frac{2+\frac{2}{5}}{2+\frac{5}{6}}$.

Exercice 2

Ecrire les nombres suivants à l’aide de puissances entières de nombres premiers :

$\frac{8^3\times5^4\times7^3}{5^3\times7^3\times2^6}$; $\frac{(3^4\times2^{-3})^3}{(9^{-1}\times2^2)^4}$; $\frac{0{,}081\times0{,}36\times2560}{0{,}144\times2{,}16\times64}$;

$\frac{(0{,}6)^2\times12^5\times54^3}{9^2\times5^3\times(0{,}8)^3\times(0{,}4)^4}$; $\frac{10^2\times3^2}{8\times5^2} \div \sqrt{\frac{2^5\times3^9}{6}}$.

Exercice 3

Comparer les nombres réels suivants :

a) $2+\sqrt{5}$ et $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{2}-\sqrt{7}$ et $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$.

Exercice 4

Soient a et b deux nombres réels de]0 ;1[.

1) Quel est le signe de $(1-a)(1-b)$?
2) Comparer $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ *et* $1+\frac{1}{ab}$.

Exercice 5

Soient x et y deux nombres réels.

1) Développer $(y-\ x)(y^2+xy+x^2)$.
2) Démontrer que : $y^2+xy+x^2=(y+\frac{x}{2})^2+\frac{3}{4}x^2$.
3) Déduire des questions précédentes que:
   Si $x\leq y$ alors $x^3\leq y^3$.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer des encadrements de :

$x + y; x - y; xy; \frac{1}{x}; \frac{x}{y}$.

a) $2{,}1 < x < 2{,}2$ et $3{,}3 < y < 3{,}4$.
b) $-1{,}5 < x < -1{,}4$ et $5 < y < 5{,}1$.
c) $-4{,}1 < x < -4$ et $-0{,}9 < y < -0{,}8$.

Exercice 7

Les arrondis d'ordre 2 de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont respectivement 1,73 et 2,24.

1) Donner les meilleurs encadrements de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ que l'on peut obtenir à partir de ces informations.
2) En utilisant les encadrements de $3\sqrt{5} + 3$ et $5\sqrt{3} + 1$.
   Comparer ces deux nombres.

Exercice 8

1) Simplifier les expressions suivantes :
   a) $2x - 2|x|$
   b) $\left|\frac{x}{2}\right| - \frac{x}{2}$
   c) $\frac{\sqrt{4x^2}}{2|x|}$
2) Interpréter en termes de distance les réels :
   a) $|x - 2|$
   b) $|9 - x|$
   c) $|-5 - x|$
   d) $|-4 + x|$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $|x| = 4$
b) $|x + 2| = \frac{4}{3}$
c) $|3 - x| = \frac{5}{7}$

d) $|x+3| = 4$

e) $|x| + 5 = \frac{4}{3}$

f) $\sqrt{(x-2)^2} = 16$

g) $\sqrt{(x+1)^2} = 1$

h) $\sqrt{x^2+6x+9} = 5$

i) $|x+4| = |x-2|$

j) $|x-1| = 1-x$

k) $|x| \leq 3$

l) $|x-1| \leq \frac{4}{3}$

m) $|x| > 0$

n) $|-x+2| \leq 3$

o) $|-x+3| \geq 5$

p) $\left|x-\frac{2}{3}\right| \leq -1$

q) $\left|x-\frac{1}{4}\right| > -1$

Exercice 10

Trouver tous les réels x qui vérifient les deux inéquations à la fois et représenter l'ensemble de ces réels sur une droite graduée :

a) $|x-1| \leq 2$ et $\left|-x+2\right| \leq 2$

b) $|x| < 5$ et $|x| > 3$

c) $|x+1| \geq 4$ et $|x-1| > 1$

d) $1 \leq |x| \leq 3$

e) $1 \leq |x+2| \leq 2$

Exercice 11

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, hachurer l'ensemble des points M*(x, y)* vérifiant :

1) $|x| \leq 3$ et $|y| \leq 1$
2) $|x-3| \leq 1$ et $|y-2| \leq 3$
3) $|x+1| \geq 4$ et $|y-1| < 2$
4) $|x-2| \geq 3$ et $|y-1| \geq 2$
5) $|x| = x$ et $|y| = -y$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $|2x-1|<3$

b) $|2x+3| \geq |7x-12|$

c) $|2x-1| \leq |x+4|$

d) $3|2x+1| \leq 4|x-2|$;

Exercice 13

Soit $x\ et\ y$ deux réel. on pose $z=\frac{x+y}{2}$.

1) calculer $d(x,y)$ et $d(z,y)$.
2) en déduire que $\leq z \leq y$.

Exercice 14

Sur une droite graduée (D), les points A, B et M ont respectivement pour abscisse a, b et x.

Déterminer x dans chacun des cas suivants :

a) $a=1, b=13$ et $\mathrm{MA}=\frac{r}{6}\mathrm{AB}$;
b) $a=-2, b=3$ et $2\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$;
c) $\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$ (on determine r en fonction de a et b.

Exercices d’entrainement de la compétence de Base 2 du premier trimestre

Exercice 1

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Peut-on répondre pour toutes ? Justifiez votre réponse.

a) Un carré est un parallélogramme
b) Un rectangle est un carré
c) Un rectangle est un parallélogramme qui possède un angle droit
d) 4 est pair et 6 est impair
e) 4 est pair ou 8 est impair

Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes :

- Dire si elle est vraie ou fausse. Dans le cas où elle est fausse, donner un contre-exemple ;
- Dire si l’affirmation réciproque est vraie ou fausse ;
- Conclure alors sur les énoncés où l’on peut employer «si et seulement si», c’est-à-dire des cas où l’énoncé direct et l’énoncé réciproque sont tous les deux vrais.

1) Si je suis tchadien, alors je suis africain ;
2) Si je suis enfant unique, alors je n’ai ni frère ni sœur ;
3) Soit ABC un triangle. Si ABC est équilatéral, alors ABC est isocèle ;
4) Soit ABCD un quadrilatère. Si ABCD est un parallélogramme, alors [AC] et [BD] ont même milieu ;
5) Soient trois points A, B et I.
   Si I est milieu de [AB], alors $IA = IB$;
6) Soient trois points A, B et C.
   Si A, B et C sont alignés, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
7) x est un nombre entier.
   Si x est pair, alors x se termine par 2.

Exercice 3

a et b sont deux nombres réels.

On considère les propositions :

1) : $a^2 = b^2$; 2) : $a = b$; 3) : $a = -b$; 4) : $(a+b)(a-b) = 0$;

5) : $a = b$ ou $a = -b$; 6) : $a = 0$ou $b = 0$.

a) Quelles sont les implications du type : ⇒… vraies ?

b) Quelles sont les implications du type : …⇒vraies ?

c) Quelles sont les propositions équivalentes ?

d) Application : résoudre l'équation$(2x-3)^2 = (2x+9)^2$.

Exercice 4

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose :⇒; ⇐; ⇔.

a) $x \in \mathbb{R}, x^2 = 9 \ldots x = 3$;

b) $x = \frac{\Pi}{3} \ldots cosx = \frac{1}{2}$;

c) M orthocentre d'un triangle ABC … M est sur la hauteur issue de A.

Exercice 5

On donne les équations suivantes :

(I) :$x^2 = 4x$ et (II) : $2x - 8 = 0$.

1) a) Donnez, sans calcul, l'ensemble des solutions (notés E et F) de ces équations.

b) Choisir la bonne affirmation : E⊂ F ou F⊂E ou E = F.

2) On donne les inéquations : $x \geq 6$ et $-3x \geq 18$.

Trouve un nombre x solution de l'une mais pas de l'autre.

Ces inéquations sont-elles équivalentes ?

3) a) Peut-on écrire $x^2 - 4x = x(2x-8)$ pour tout$x$? Justifier.

b) Montrer que les équations :$x^2 - 4x = 0$ et $x(2x-8) = 0$ sont équivalentes.

Exercice 6

On considère un triangle dont les longueurs des côtés sont respectivement : 53, 28 et 45.

S'agit-il d'un triangle rectangle ?

Exercice 7

1) Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ?
   a) Dans la liste $\{0, 4, 6, 7, 8, 16, 798\}$, tous les nombres sont pairs.
   b) " $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ ou $x < 1$".
2) Ecrire la négation de chacune de ces affirmations et déterminer sa valeur de vérité.

Exercice 8

Parmi les fonctions suivantes, reconnais celles qui sont des polynômes et détermine le degré et le coefficient du terme de plus haut degré :

1) $f(x) = (x\sqrt{3} - 1)(x^2 + \pi)$
2) $f(x) = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 7}$
3) $f(x) = \frac{5x^3 - 5x^2 + 7x}{\sqrt{5}}$
4) $f(x) = \frac{x^4 - 81}{x^2 + 9}$
5) $f(x) = (x^2 + 1)(3 - x^4)$
6) $f(x) = (x^3 - 2x^2)(x^5 - 3x) - x^8$
7) $f(x) = 3x^5 - |x| + 5$

Exercice 9

1) on donne les fonctions polynômes P, Q et R suivantes:
   $P(x) = 10x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
   $Q(x) = x^5 - 5x^2 + 3$
   $R(x) = 7x^3 - 3x^2 + 2x$
   Détermine : $P(x) + Q(x) + R(x)$; $P(x) + Q(x) - R(x)$; $P(x) - Q(x) - R(x)$ et $-P(x) + Q(x) - R(x)$.
2) factoriser : $f(x) = (2x + 1)(x - 3) - (4x + 5)(3 - x)$; $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$;
   $h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; $i(x) = x^4 + x^3 - 4x - 16$

Exercice 10

1) Trouve un polynôme admettant pour racines les nombres -2 et 3.
2) Trouve un polynôme admettant pour racines les nombres -1; 0 et 5.
3) Existe-t-il un polynôme de degré 10 admettant pour racines les nombres -1; 0 et 5?

Exercice 11

Détermine, dans chacun des cas suivants, le nombre réel a pour que f soit factorisable par g puis étudie le signe de *f(x):*

1) $f(x) = ax^3 - 4x^2 + 7x - 6; g(x) = x - 2$
2) $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax - 2; g(x) = x + 2$
3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + a; g(x) = x^2 - 4$

Exercices d'entrainement de la compétence de base 3 du premier trimestre

Exercice 1

ABCD est un triangle.

a) Placer les points D, E et F tels que: $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et F est le milieu de [AC].
b) Exprimer, en justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonctio de $\overrightarrow{FE}$.
c) 1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   2. En déduire un réel k tel que : $\overrightarrow{AD} = k.\overrightarrow{AE}$.

   3. Que peut-on alors conclure?
d) 1. Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

   2. Placer le point G symétrique de F par rapport à C.

   Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

   3. En déduire la nature du quadrilatère AMDG

Exercice 2

Soit un triangle BOA et soient les points C et D définis respectivement par $\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$.

a) Démontrer que les points O, B et D sont alignés.
b) En déduire une construction du point D.

Exercice 3

Soit A et B deux points distincts du plan.

Placer les point M, N, P et Q tels que :

$\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{AB}$; $5\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{QA} = 3\overrightarrow{BQ}$;

Exercice 4

Soit ABC un triangle et le point M tel que :

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

a) Faire une figure avec AB = 45 mm; BC=60 mm et AC= 75 mm
b) Construire le point M. Démontrer que: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
c) Placer le point N tel que : $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
d) Démontrer que les points A, M et N sont alignés.

Exercice 5

Les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont-ils colinéaires?

a) $\vec{u}\left(\sqrt{2}\,;1-\sqrt{3}\right)$et $\vec{v}\left(1+\sqrt{3}\,;\,-\sqrt{2}\right)$.
b) $\vec{u}\,(2-3)$et $\vec{v}\left(-1\,;\,-\frac{1}{3}\right)$.
c) $\vec{u}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$et $\vec{v}\left(\frac{4}{5}\,;\,\frac{2}{5}\right)$.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires :

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$
b) $2\overrightarrow{CB} - 9\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{AD} = \vec{0}$
c) $7\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CA}$.

Exercice 7

Soit ABCD un parallélogramme.

Soit E le milieu de [BC] et F le milieu de [DC].

a) Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$
b) Montrer que $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Exercice 8

ABCD est un triangle et I est le milieu du segment [AC]. O est ub point quelconque.

a) On se propose de construire le point P tel que : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB}$.

1. Justifier que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$.
2. Quelle relation lie alors $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{IB}$?
3. Construire P.

b) En déduire que (BI) et (OP) sont parallèles.

Exercice 9

A et B sont deux points distincts du plan.

On définit le point M par la relation vectorielle : $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{O}$.

Exprimer $\overrightarrow{MA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer M.

Exercice 10

ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points M, N , P et Q sont tels que :

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$.

a) 1. Démontrer que $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DP}$

   2. En déduire que O est milieu de[QN].

b) Démontrer de même que O est milieu de[QN].

c) En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.

Exercice 11

ABCD est un parallélogramme.

I est le milieu de [AI].

E est le point tel que $\overrightarrow{QE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

a) Faire la figure

b) Déterminer les coordonnées des points de la figure dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

c) Les points A, E et C sont-ils alignés?

EVALUATION

Exercice 1

Soit n un nombre entier naturel $n \geq 2$.

On pose : S= $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

1) Calculer S$-\frac{1}{2}$S.
2) En déduire la valeur de S en fonction de n, puis l'inégalité S < 2.

Exercice 2

On donne $f(x) = \frac{3x^3-4x^2-x+2}{3x^2-6x+3}$

a) détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction rationnelle *f.*

b) simplifie *f(x)* sur D_f.

c) étudie suivant les valeurs de x le signe de *f(x).*

Exercice 3

ABCD est un triangle.

a) Placer les points D, E et F tels que: $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et F est le milieu de [AC].

b) Exprimer, en justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonctio de $\overrightarrow{FE}$.

c) 1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   2. En déduire un reel k tel que : $\overrightarrow{AD} = k.\overrightarrow{AE}$.

   3. Que peut-on alors conclure?

d) 1. Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

   2. Placer le point G symétrique de F par rapport à C.

   Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

   3. En déduire la nature du quadrilatère AMDG

<u>Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice</u>

- ………
- ………
- ………
- ………
- ………
- ………
- ………
- ………

<u>Conseils et orientation de l'enseignant</u>

- ………
- ………
- ………
- ………
- ………
- ………
- ………
- ………

Evaluation de la compétence

Deuxième trimestre

Programmation horaire du 2e trimestre

2e Trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombres d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
Du 02 Janvier au 31 Mars 13 semaines	CB1	3	Fonctions : généralités	5H	1H	2H	6H	39H
		4	Fonctions affines par intervalles	5H	1H		6H	
	CB2	4	Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$	9H	2H		11H	
	CB3	5	Bases et repères	5H	1H	2H	6H	
		6	Trigonométrie	5H	1H		6H	

FICHE DE PROGRESSION

Trimestre	Période	Contenus		
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité	CB3 : Géométrie
2	2 Janvier au 10 Février	- Fonctions : généralités	- Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$	
	11 Février au 31Mars	- Fonctions affines par intervalles		- Trigonométrie

Les modules d'intégration en mathématiques en classe Seconde Deuxième trimestre

Compétence de Base 1

Seconde L–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les généralités sur les fonctions numériques et les fonctions affines par intervalles

Objectifs d'apprentissage (Ressources)

Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
Fonctions : généralités – Notion de fonctions et applications – Mode de détermination d'une fonction – Représentation graphique d'une fonction – Coïncidence de fonctions sur un intervalle – Image directe et image réciproque d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ – Sens de variation d'une fonction	– Reconnaitre une fonction ou une application déterminée de différentes manières – Calculer l'image d'un nombre, l'antécédent d'un nombre – Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction – Déterminer graphiquement l'image d'un nombre, les antécédents d'un nombre – Déterminer graphiquement l'image directe, l'image réciproque d'un intervalle – Vérifier par le calcul ou graphiquement que deux fonctions coïncident sur un ensemble – Déterminer le sens de variation d'une fonction	– Reconnaissance d'une fonction ou d'une application déterminée de différentes manières – Calcul de l'image d'un nombre, de l'antécédent d'un nombre – Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction – Détermination graphique de l'image d'un nombre, des antécédents d'un nombre – Détermination graphique de l'image directe, de l'image réciproque d'un intervalle – Vérification par le calcul ou graphique la coïncidence de deux fonctions sur un ensemble

	Fonctions affines par intervalles – Fonctions définies par intervalles – Fonctions valeurs absolues – Fonctions partie entière – Fonctions définies par le maximum ou le minimum	– Reconnaitre une fonction définie par intervalles – Simplifier l'expression d'une fonction affine par intervalles – Représenter graphiquement une fonction affine par intervalles	– Détermination du sens de variation d'une fonction – Reconnaissance d'une fonction définie par intervalles – Traduction de l'expression d'une fonction valeur absolue en fonction affine par intervalles – Traduction de l'expression d'une fonction partie entière en fonction affine par intervalles – Traduction de l'expression d'une fonction définie par le maximum ou le minimum en fonction affine par intervalles – Représentation graphique d'une fonction affine par intervalles

Compétence de Base 2

Seconde S–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les équations et inéquations dans ℝ et dans $\mathbb{R}^2$

.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)

Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
Equations et inéquations dans ℝ - Équations et inéquations du premier degré - Exemples d'équations et d'inéquations du second degré dans ℝ - Équations et inéquations dont la résolution se ramène à celle d'équations et d'inéquations du 1er degré dans ℝ - Problèmes conduisant aux	– Résoudre une équation du premier degré dans ℝ – Résoudre des équations du second degré en utilisant la forme canonique – Résoudre des équations se ramenant à celles du premier degré – Résoudre des problèmes conduisant à des équations dans ℝ – Résoudre une inéquation du premier degré dans ℝ – Résoudre des inéquations du second degré en utilisant la forme canonique – Résoudre des inéquations se ramenant à celles du premier degré – Résoudre des problèmes conduisant à des inéquations dans ℝ	– Résolution d'une équation du premier degré dans ℝ – Résolution des équations du second degré en utilisant la forme canonique – Résolution des équations se ramenant à celles du premier degré - Modélisation et résolution des problèmes conduisant à des équations dans ℝ - Résolution d'une inéquation dans ℝ – Résolution des inéquations du second degré en utilisant la forme canonique – Résolution des inéquations se ramenant à celles du premier degré - Modélisation et résolution des problèmes conduisant

	équations ou inéquations **Equations et inéquations dans $\mathbb{R}^2$** Systèmes d'équations et d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ -	- Résoudre un système d'équations linéaire dans $\mathbb{R}^2$ - Résoudre graphiquement un système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ - Interpréter graphiquement un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$. - Interpréter graphiquement une inéquation ou un système d'inéquation linéaire dans $\mathbb{R}^2$ - Résoudre des problèmes conduisant à des systèmes d'équations ou d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$	à des inéquations $\mathbb{R}$ - Résolution d'un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode : de substitution ; de combinaison ; graphique ou de Cramer - Résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ - Interprétation graphique d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$. - Interprétation graphique d'une inéquation ou d'un système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ - Résolution des problèmes conduisant à des systèmes d'équations ou d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ - Régionnement du plan.

Compétence de base 3

Seconde S–CB3 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les bases, les repères du plan et la trigonométrie dans un triangle,

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
Bases et repères d'un plan - Coordonnées dans une base - Déterminants de deux vecteurs relativement à une base - Changement de base - Coordonnées dans un repère **Trigonométrie**	- Définir une base et un repère - Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée - Calculer le déterminant de deux vecteurs relativement à une base - Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires ou orthogonaux en utilisant les coordonnées dans un repère - Effectuer un changement de base - Déterminer les coordonnées d'une combinaison linéaire de deux vecteurs - Déterminer la mesure algébrique de deux points - Utiliser le cercle trigonométrique pour	- - Conversion de la mesure d'un angle du degré en radian - Détermination du sens direct et du sens indirect - Détermination de la mesure principale d'un angle orienté - Utilisation des propriétés de symétries et de translations sur les angles orientés dans les démonstrations

	- Cercle trigonométrique - Sinus et cosinus d’un angle orienté - Lignes trigonométriques d’angles associés - Tangente d’un angle orienté -	déterminer le cosinus et le sinus d’un angle orienté - Placer sur le cercle trigonométrique un point image d’un angle orienté - Déterminer les lignes trigonométriques des angles associés - Construire la tangente d’un angle orienté - Déterminer la mesure de la tangente d’un angle orienté	- Utilisation du cercle trigonométrique pour déterminer le cosinus et le sinus d’un angle orienté - Construction sur le cercle trigonométrique d’un point image d’un angle orienté - Détermination des lignes trigonométriques des angles associés suivants : $-\alpha, \pi - \alpha , \pi + \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha$ et $\frac{\pi}{2} + \alpha$ - Construction de la tangente d’un angle orienté - Détermination de la mesure de la tangente d’un angle orienté

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du deuxième trimestre

Leçon : généralités sur les fonctions

SEQUENCE 1

Notion de fonction

Objectifs

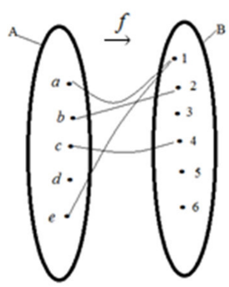
Définir une fonction

Vocabulaire et définition

Définition

Une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B est une correspondance qui, à chaque élément x de A, associe au plus un élément notée $f(x)$.

Exemple de définition d'une fonction



- On dit que b a pour image 2 par la fonction f ou que 2 est l'image de b par f.
- On dit 2 a pour antécédent b par f ou que b est l'antécédent de 2 par f.

Vocabulaire

- L'ensemble A est appelé ensemble de départ.
- L'ensemble B est appelé ensemble d'arrivée.

Notation : *On écrit* $f: \begin{matrix} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{matrix}$ *(f fonction de A vers B, qui à tout x associe f de x)*

ou $x \longmapsto f(x)$ (f est la fonction qui à tout x associe f de x).

Mode de définition d'une fonction

Une fonction peut être définie par :

- une formule explicite ; on la donne directement en fonction de sa variable $(x, y, t, n, \ldots)$.
- un tableau de valeurs ; on donne les nombre ainsi que leurs images respectives.
- un programme ; on donne les informations conduisant à obtenir une formule explicite.
- une courbe ; on peut lire alors les nombres et leurs images.
- un diagramme de Venn.

SEQUENCE 2

Notion d'application et domaine de définition d'une fonction

Objectif

- Définir une application ;
- déterminer le domaine de définition d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie de A vers B.

f est dite application lorsque, à chaque élément de A, f associe exactement un et un seul élément de B.

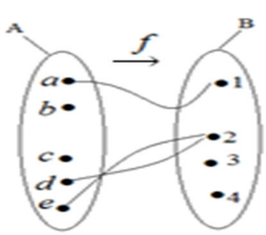
Ensemble de définition

Définition

Pour une expression $f(x)$ donnée, on appelle ensemble de définition (ou domaine de définition) de f tous les nombres ayant une image par f.

Notation

L'ensemble de définition de f est souvent noté D_f.



$D_f = \{a; d; e\}$

Remarque

Un réel de l'ensemble de définition a toujours une image.

- ✓ Si f est de la forme $\sqrt{P}$ où P es un polynôme, f est définie pour les valeurs de x tels que $P(x) \geq 0$.
- ✓ Si f est de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes, f est définie pour les valeurs de x tels que $Q(x) \neq 0$.
- ✓ Soit f une fonction de A vers B. f est une application lorsque $D_f = \text{A}$.
- ✓ Si f est une fonction définie sous forme $\frac{P}{\sqrt{Q}}$ où P et Q sont des polynômes, f est définie pour $Q(x) \geq 0$ et $Q(x) \neq 0$ c'est-à-dire $Q(x) > 0$.

SEQUENCE 3

Fonctions égales – Représentation graphique de fonctions

Objectifs

- Identifier des fonctions égales ;
- représenter graphiquement une fonction.

Définition

f et g sont des fonctions définies sur un ensemble E.

On dit que les fonctions f et g sont égales sur E (ou qu'elles coïncident sur E) lorsque pour tout élément x de E, $f(x) = g(x)$.

Représentation graphique

Définition

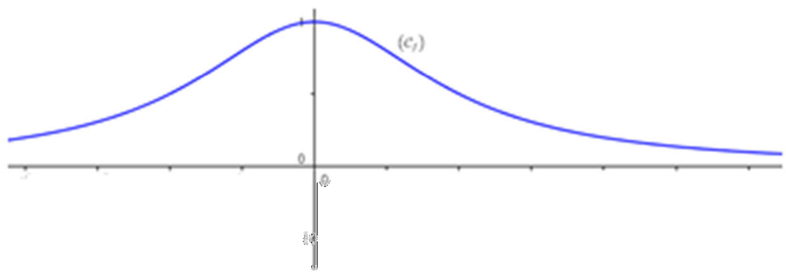
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle représentation graphique de f ou courbe représentative de f l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ lorsque x prend toutes les valeurs de D_f et $y = f(x)$.

On dit que la courbe a pour équation $y = f(x)$.

Remarque

Pour représenter graphiquement certaines fonctions, on peut (éventuellement à l'aide d'une calculatrice), calculer des images en nombre suffisant et on présente le résultat dans un tableau de valeurs.

Une courbe peut être notée de différentes façons.



SEQUENCE 4

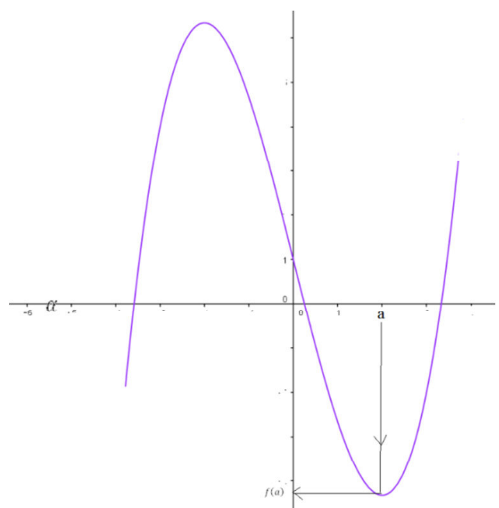
Etude graphique

Objectif

Lire graphiquement une image ou un antécédent

Lecture graphique d'une image et d'un antécédent

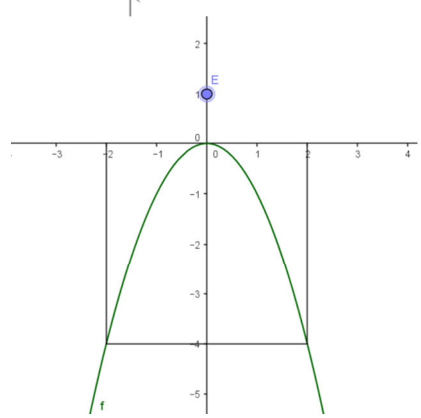
Lecture d'une image



a) Sur la figure ci-contre, toute droite d'équation $x = a$ coupe la courbe (C) en un et un seul point.
b) L'ordonnée de ce point d'intersection avec la courbe (C) est l'image de $x = a$

Lecture d'antécédent

a) Sur la figure ci-dessous, la droite d'équation $y = 4$ coupe la courbe (C) en trois points.
b) Les abscisses de ces points d'intersection avec la courbe (C) sont les antécédents de 4.



Remarque

Pour une fonction f donnée par une formule explicite $f(x)$, chercher les antécédents de k revient à résoudre l'équation $f(x) = k$.

SEQUENCE 5

Résolution graphique d'équations

Objectif

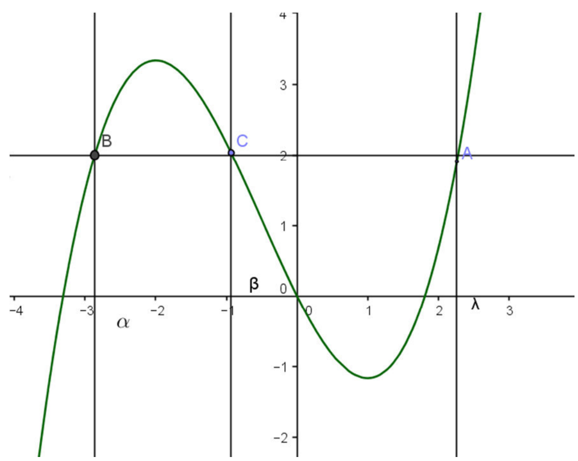
Résoudre graphiquement des équations

Equation $\boldsymbol{f(x) = k}$

Pour résoudre graphiquement une équation de type $f(x) = k$, on trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les abscisses (ou l'abscisse) des points (ou du point) d'intersection de cette droite avec la courbe.

Exemple

(C_f) est la courbe représentative d'une fonction f.



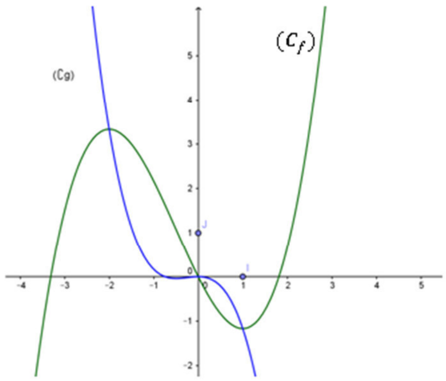
- L'équation $f(x) = 2$.admet trois solutions qui sont α , β, λ.

Equation $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$

Pour résoudre graphiquement une équation de type $f(x) = g(x)$, on trace les courbes de ces deux fonctions et on lit l'abscisse (ou les abscisses) de leur(s) point(s) d'intersection.

Exemple

$(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont les courbes représentatives respectives de fonctions f et g.



L'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions..

SEQUENCE 6

Résolution d'inéquations

Objectif

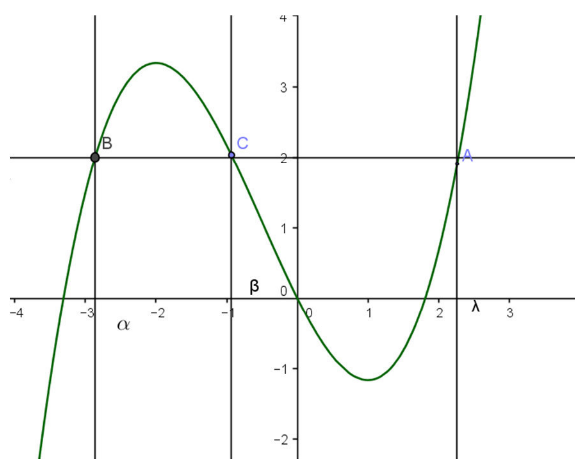
Résolution graphique des inéquations

Inéquation $\boldsymbol{f(x) \geq k}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonctions f et k, un réel.

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq k$ (*resp* $f(x) \leq k$), on trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les intervalles sur lesquels la courbe est au-dessus (*resp* au-dessous) de cette droite.

Exemple



- Inéquation $f(x) \geq 2$ admet pour solution $[\alpha; \beta] \cup [\lambda; +\infty[$
- L'inéquation $f(x) \leq k$ admet pour solution $]-\infty; \alpha] \cup [\beta; \lambda]$.

Remarque

Si $k = 0$, la solution de l'inéquation $f(x) \geq 0$ (resp $f(x) \leq 0$) est l'intervalle sur lequel la courbe est au-dessus (resp au-dessous) de l'axe des abscisses.

Inéquation $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$

Soient$(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes représentatives respectives des fonctions $f$et g.
La solution de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ (resp $f(x) \leq g(x)$) est l'intervalle (ou la réunion d'intervalles) sur lequel $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$ (resp $(\mathcal{C}_f)$) au-dessous de $(\mathcal{C}_g)$.

SEQUENCE 7

Image directe et image réciproque d'un ensemble

Objectif

Déterminer l'image directe et l'image réciproque d'un ensemble

Image directe

Définition

f est une fonction de A vers B et E une partie de A.

On appelle image directe de E, l'ensemble des image par f de tous les éléments de E.

Elle se note $f(E)$.

Si $\mathrm{E} = \{a, b, c\}$, $f(\mathrm{E}) = \{2; 3\}$.

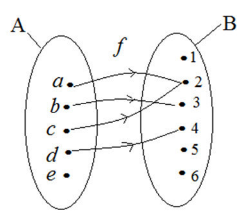


Image réciproque

Définition

f est une fonction de A vers B et E une partie de A.

On appelle image réciproque de F par f, l'ensemble f' des antécédents par f de tous les éléments de F.

SEQUENCE 8

Variation d'une fonction

Objectif

Etudier les variations d'une fonction

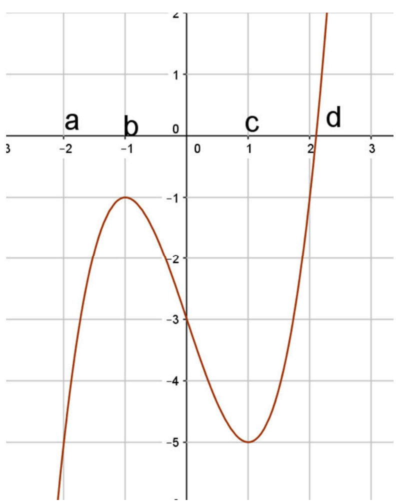
Définition

Soit f une fonction définie dans un intervalle I.

- *Dire que f est croissante (resp strictement croissante) sur I signifie que pour tous réels u et v de I, si $u \leq v$ (resp $u < v$), alors $f(u) \leq f(v)$ (resp $f(u) < f(v)$).*
- *Dire que f est décroissante (resp strictement décroissante) sur I signifie que pour tous réels u et v de I, si $u \leq v$ (resp $u < v$), alors $f(u) \geq f(v)$ (resp $f(u) > f(v)$).*
- *Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels u et v de I, si $u < v$ (ou si $u \leq v$), alors $f(u) = f(v)$.*

On résume ces définitions dans un tableau appelé tableau de variation.

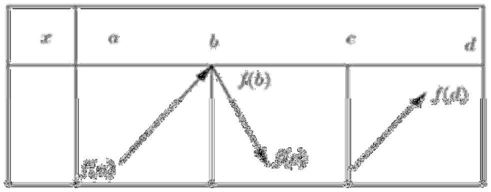
Exemple



f est croissante dans [a; b]∪[c ;d]

f est décroissante dans [b ;c].

On a le tableau de variation suivant :



SEQUENCE 9

Notions de maximum et de minimum

Objectif

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- $\rightarrow$ *On dit que f admet un maximum $f(a)$ en a sur I lorsque pour tout x de I,* $f(x) \leq f(a)$.
- $\rightarrow$ *On dit que f admet un minimum $f(b)$ en b sur I lorsque pour tout x de I,* $f(x) \geq f(b)$.
- $\rightarrow$ *Le maximum et le minimum s'appellent les extrema ou extremums d'une fonction.*

Remarque

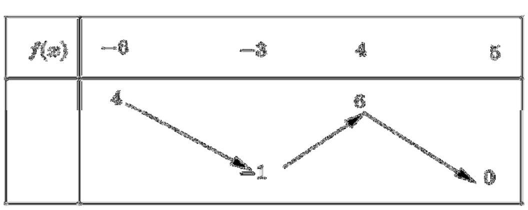
Lorsqu'un tableau de variation d'une fonction est donné, on peut lire les extrêma.

Exemple

Soit f une fonction donnée par son tableau de variation.

Sur l'intervalle $[-6\,;5]$.

f admet 6 comme maximum en 4 et -1 comme minimum en -3.



Leçon : Fonctions affines par intervalles
SEQUENCE 10

Fonctions affines

Objectifs

- Définir et étudier les variations d'une fonction affine ;
- définir une fonction affine par intervalles.

Définition d'une fonction affine

a et b sont deux nombres réels. La fonction notée f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$f(x) = ax + b$ est appelée fonction affine.

Le nombre réel a est appelé le coefficient directeur de la fonction affine et le nombre réel b est son ordonnée à l'origine.

En particulier si $b = 0$ alors $f(x) = ax$ est une fonction linéaire.

Variation d'une fonction affine

$f(x) = ax + b$ est une fonction affine.

- *Si $a > 0$, la fonction affine f est croissante.*
- *Si $a < 0$, la fonction affine f est décroissante.*
- *Si $a = 0$, la fonction affine f est constante.*

Définition d'une fonction affine par intervalles

Une fonction affine par intervalles f est une fonction numérique d'une variable réelle dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles sur chacun desquels f coïncide avec une fonction affine.

Lorsque sur chacun de ces intervalles f coïncide avec une fonction constante, on dit que f est une fonction en escalier.

Remarque

La représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est une réunion de segments ou de demi – droites.

SEQUENCE 11

Exemple de fonctions affines par intervalles

Objectifs

Etudier un exemple de fonction affine par intervalles

Exemple

f est une fonction d'une variable réelle définie par :

- pour $x \in [-3 ; -1[$, $f(x) = -2x + 3$;
- pour $x \in [-1 ; 3[$, $f(x) = 5$;
- pour $x \in [3 ; 4]$, $f(x) = 3x$.

a) calculons l'image par f de chacun des nombres suivants : -3 ; -1 ; 3 et 4.

En effet f est une fonction affine par intervalles car sur chacun des intervalles $[-3 ; -1[$, $[-1 ; 3[$ et $[3 ; 4]$, f coïncide respectivement avec les fonctions affines $f_1(x) = -2x + 3$; $f_2(x) = 5$ et $f_3(x) = 3x$.

L'ensemble de définition de f est donc la réunion des trois intervalles $[-3 ; -1[$, $[-1 ; 3[$ et $[3 ; 4]$.

$D_f = [-3 ; -1[\cup [-1 ; 3[\cup [3 ; 4]$.

Les valeurs -1 et 3 sont les pivots de D_f.

Les valeurs -3 et 4 sont les extrémités de D_f.

Ainsi, $-3 \in [-3 ; -1[$ et $f(-3) = f_1(-3) = -2 \times (-3) + 3 = 9$;

$-1 \in [-1 ; 3[$ et $f(-1) = f_2(-1) = 5$;

$3 \in [3 ; 4]$ et $f(3) = f_3(3) = 3 \times 3 = 9$;

$4 \in [3 ; 4]$ et $f(4) = f_3(4) = 3 \times 4 = 12$.

b) Construisons la représentation graphique de la fonction f dans un repère (O ; I ; J).

La représentation graphique de f est obtenue à partir des droites (D_1) ; (D_2) et (D_3) d'équations respectives suivantes :

$(D_1) : y = -2x + 3$

	A	B
x	-3	-1
y	9	5

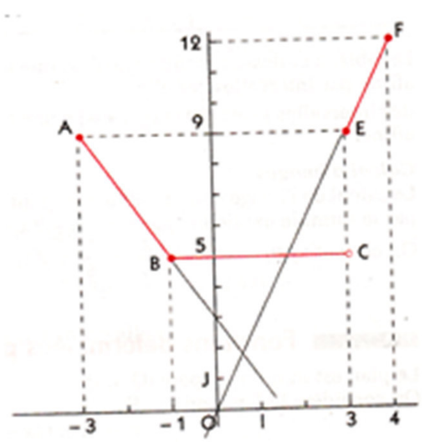
$(D_2) : y = 5$

	B	C
x	-1	3
y	5	5

$(D_3) : y = 3x$

	E	F
x	3	4
y	9	12

Représentation graphique



$(C_f) = [AB] \cup]BC[\cup [EF]$.

SEQUENCE 12

Fonction valeur absolue

Objectifs

Etudier la fonction valeur absolue

Fonction valeur absolue étudiée comme fonction affine par intervalles

On donne $f(x) = |x|$.

$D_f = \mathbb{R}$.

$|x| = x$ si $x \in [0\ ;+\infty[$ et $|x| = -x$ si $x \in]-\infty\ ;0]$.

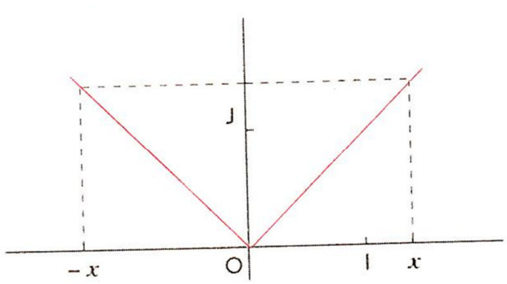
Ainsi $f(x) = f_1(x) = -x$ si $x \in]-\infty\ ;0]$.

$f(x) = f_2(x) = x$ si $x \in [0\ ;+\infty[$

Dans un tableau, on résume :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-x$		x

Représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J)



Remarque

Dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J), tout point M(x ; $f(x)$) est tel que si $x \in [0\ ;+\infty[$ alors

$-x \in]-\infty\ ;0]$ et $f(x) = f(-x)$ c'est-à-dire que le point M(x ; $f(x)$) étant sur la représentation graphique de f, le point M'($-x$; $f(-x)$) est aussi sur cette même représentation.

La représentation graphique de f est donc symétrique par rapport à l'axe (OJ).

SEQUENCE 13

Fonction dont l'expression contient des valeurs absolues

Objectifs

Etudier les fonctions dont l'expression contient des valeurs absolues

Exemple

On donne la fonction d'une variable réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x + 1 - |5x - 2|$.

a) Justifions que f est une fonction affine par intervalles.

En effet $|5x - 2| = 5x - 2$ si $5x - 2 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq \frac{2}{5}$ et $|5x - 2| = 2 - 5x$ si $5x - 2 \leq 0$ c'est-à-dire $x \leq \frac{2}{5}$.

Ainsi, pour $x \in]-\infty ; \frac{2}{5}]$, $|5x - 2| = 2 - 5x$ et $f(x) = x + 1 - |5x - 2|$

$= x + 1 - 2 + 5x$

$= 6x - 1.$

Pour $x \in [\frac{2}{5} ; +\infty[$, $|5x - 2| = 5x - 2$ et $f(x) = x + 1 - |5x - 2|$

$= x + 1 - 5x + 2$

$= -4x + 3.$

f est donc une fonction affine par intervalles car elle prend des expressions différentes de fonctions affines dans les intervalles $]-\infty ; \frac{2}{5}]$, et $[\frac{2}{5} ; +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

Dans un tableau, résumons:

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{2}{5}$	$+\infty$
Signe de $5x-2$	$-$	$+$
Expression de $\lvert 5x-2 \rvert$	$2-5x$	$5x-2$
Expression de $f(x)$	$6x-1$	$-4x+3$

Dans l'intervalle $]-\infty\,;\frac{2}{5}]$, $f(x)=f_1(x)=6x-1$ et dans l'intervalle $[\frac{2}{5}\,;+\infty[$,

$f(x)=f_2(x)=-\ 4x+3$.

b) Calculons l'image par f de chacun des nombres suivants : 0 ; 0,4 et 1.

$0\in]-\infty\,;\frac{2}{5}]$, $f(0)=\ f_1(0)=-1$

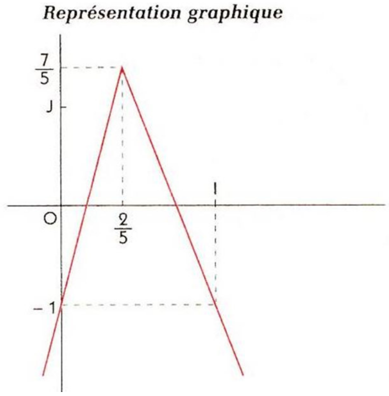
$0{,}4=\frac{2}{5}$ est le pivot du domaine de définition de f.

$f(0{,}4)=f_1(0{,}4)=f_2(0{,}4)=1{,}4$.

$1\in[\frac{2}{5}\,;+\infty[$, $f(1)=\ f_2(1)=-1$.

c) Construisons la représentation graphique de f dans un repère (O ; I ; J).

Représentation graphique



SEQUENCE 14

Fonction partie entière

Objectifs

Définir et étudier la fonction partie entière

Définition : *n étant un entier relatif, on appelle fonction partie entière notée E la fonction définie $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $E(x)=n$ si $x\in[n\,;n+1[$.*

NB : On retiendra simplement que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Etude et représentation graphique de la fonction partie entière

On pose $f(x) = \mathrm{E}(x)$

En effet le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R}$.

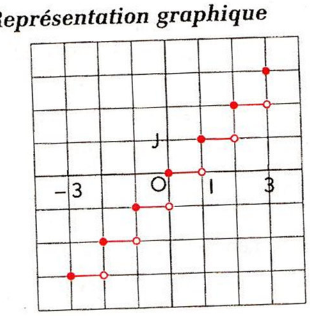
Pour tout nombre réel x et pour tout nombre entier relatif n,

si $x \in [n ; n + 1[$, $\mathrm{E}(x) = n$.

La fonction partie entière est une fonction en escalier.

Dans le plan muni d'un repère (O ;I ;J), représentons graphiquement f.

Représentation graphique



SEQUENCE 15

Fonctions définies par le maximum ou le minimum

Objectif

Etudier les fonctions définies par le maximum ou le minimum

Etude et représentation graphique de fonctions définies par max ou min

Exemples

1) Le plan est muni d'un repère (O ;I ; J).

On donne la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = max(3x - 1 ; x - 1)$.

On sait que $f(x) = 3x - 1$ si $3x - 1 \geq x - 1$ c'est-à-dire $x \geq 0$ *et* $f(x) = x - 1$ si $x - 1 \geq 3x - 1$ c'est à dire $x \leq 0$.

f est donc une fonction affine par intervalles.

Pour $x \in]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) = f_1(x) = x - 1$ et pour $x \in [0;\ +\infty[$,

$f(x) = f_2(x) = 3x - 1.$

Dans un tableau, résumons :

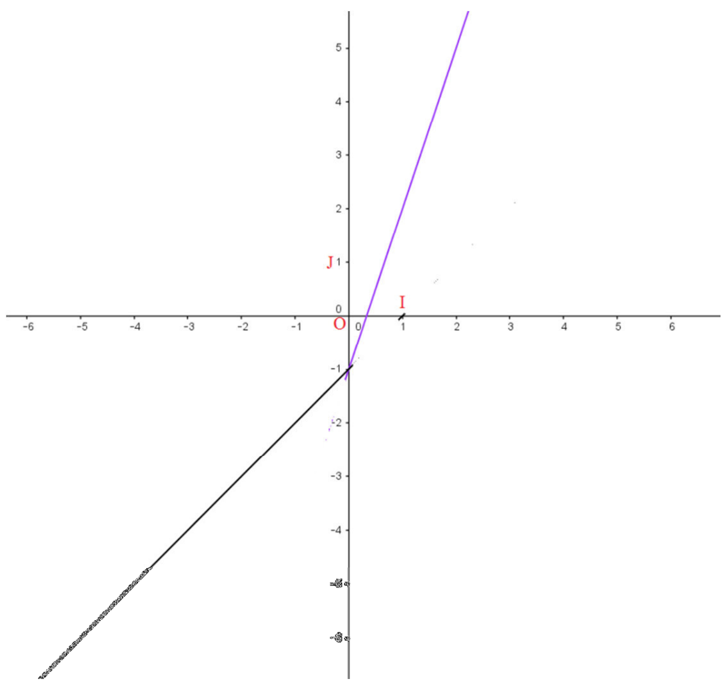
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$x - 1$		$3x - 1$

$f(0) = f_1(0) = f_2(0) = -1$

$f(1) = f_2(1) = 2$

$f(-1) = f_1(-1) = -2.$

Représentons graphiquement f dans le plan muni du repère (O ; I ; J).



Leçons de la compétence de base 2 du deuxième trimestre

Leçon : Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$

SEQUENCE 16

Equations du premier degré dans $\mathbb{R}$

Objectifs

- Définir une équation ;
- déterminer les contraintes sur l'inconnue.

Généralités sur les équations

Définition

– *f et g sont deux fonctions d'un ensemble A vers un ensemble B, D_f et D_g leurs ensembles de définition. L'égalité notée $(E): x \in A, f(x) = g(x)$ est une équation d'ensemble de référence A.*

– *A et B sont deux ensembles.*

– *$(E): f(x) = g(x)$ où f et g sont deux fonctions de A vers B, est appelée équation dans A, d'inconnue x.*

– *Tout élément α de A vérifiant $f(\alpha) = g(\alpha)$ est appelé solution de l'équation (E).*

– *Résoudre dans A l'équation (E), c'est rechercher les éléments de A qui sont solutions*

Remarques

- ✓ Le nom utilisé pour désigner l'inconnue est sans importance, les équations $f(x) = g(x)$ et $f(t) = g(t)$ ont le même ensemble de solutions.
- ✓ Avant de résoudre une équation, il convient si nécessaire de préciser les contraintes sur l'inconnue.

Exemple

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\frac{x}{(2x-1)(x+3)} = \frac{x}{4}$.

Contraintes sur l'inconnue: $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -3$;

Les nombres réels 1 et 0 sont des solutions de (E) ; 6 n'est pas solution de (E).

SEQUENCE 17

Équations équivalentes et méthode de résolution d'équations liant deux polynômes

Objectifs

- Trouver une équation équivalente à une équation donnée ;
- appliquer la méthode de résolution d'équations.

Définition

Soit (E_1) *et* (E_2) *deux équations de même référentiel A ;* D_{E_1} *et* D_{E_2} *leurs ensembles de validité respectifs.*

P étant une partie de $D_{E_1} \cap D_{E_2}$, (E_1) *et* (E_2) *sont équivalentes sur P signifie que* (E_1) *et* (E_2) *ont les même solutions dans P.*

Méthode de résolution d'équations

Pour résoudre une équation, on procède généralement par transformations d'écritures en utilisant les règles de calcul relatives aux égalités dans $\mathbb{R}$.

En particulier, une équation aura les mêmes solutions que l'équation équivalente obtenue :

- en ajoutant un même nombre aux deux membres de cette équation ;
- en multipliant les deux membres de cette équation par un même nombre réel non nul.

En particulier, pour résoudre une équation du type $\mathrm{P}(x) = \mathrm{P'}(x)$ où P et P' sont des polynômes, on peut procéder comme suit :

- se ramener à une équation du type $\mathrm{Q}(x) = 0$ où Q est un polynôme ;
- factoriser $\mathrm{Q}(x)$;
- déterminer les racines de Q.

SEQUENCE 18

Exemple de résolution d'équations liant deux polynômes

Objectif

Résoudre des équations liant deux polynômes

Exemple

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$:

(E) : $x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 7x + 5 = x^2 - 4x + 5$

(E) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 7x + 5 = x^2 - 4x + 5.$

En retranchant $x^2 - 4x + 5$ à chacun des membres de (E) :

(E) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 7x + 5 - (x^2 - 4x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

Résoudre (E) revient à rechercher les racines du polynôme $x \longmapsto x^2 - 3x$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

(E) a pour ensemble de validité $\mathbb{R}$ et l'ensemble des solutions de (E) est $\{0 ; 3\}$.

SEQUENCE 19

Résolution d'équations liant deux fractions rationnelles

Objectif

Résoudre des équations liant deux fractions rationnelles dans $\mathbb{R}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \frac{x+2}{5x+19} = \frac{x-3}{10x-26}$

Contraintes sur l'inconnue: $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\right\}$.

Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\right\}$, on a :

$$(E) : \frac{x+2}{5x+19} = \frac{x-3}{10x-26} \Leftrightarrow (x-2)(10x-26) = (x-3)(5x+19)$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - 6x - 52 = 5x^2 + 4x - 57$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 10x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Le nombre rée1 1 appartenant à $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\right\}$, il est l'unique solution de (E). Les équations $\frac{x+2}{5x+19} = \frac{x-3}{10x-26}$ et $(x-1)^2 = 0$ ayant la même solution, on dit qu'elles sont équivalentes.

On note S = {1}.

SEQUENCE 20

Problèmes conduisant aux équations dans $\mathbb{R}$

Objectif

Résoudre des problèmes conduisant aux équations

Méthode

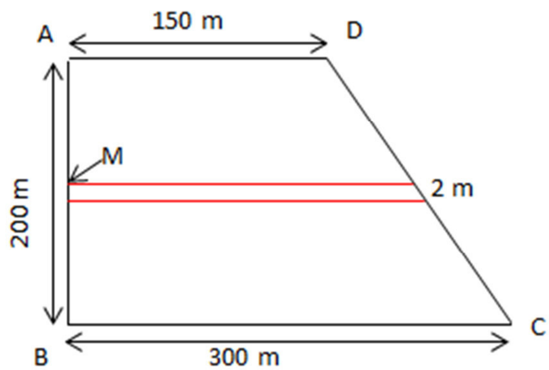
Pour résoudre un problème conduisant à une équation, on peut suivre les cinq étapes suivantes :

- choix de l'inconnue: on choisit à partir de l'énoncé ce qu'on prendra pour inconnue et on précise les contraintes sur cette inconnue;
- mise en équation : on traduit l'énoncé en langage mathématique pour en tirer une équation ;
- résolution de l'équation ;
- vérification : on refait, si possible, les calculs en substituant à l'inconnue la ou les valeur(s) trouvé(e)s ;
- conclusion : on interprète le résultat pour répondre en langage courant à la question.

Problème

Un champ ABCD, ayant la forme d'un trapèze rectangle, a les dimensions indiquées sur la figure ci-dessous. On veut le partager en deux champs de même superficie en traçant une allée rectiligne de 2 m de large parallèle aux bases (cf. figure).

De quel point M de [AB], doit-on partir pour tracer l'allée ?



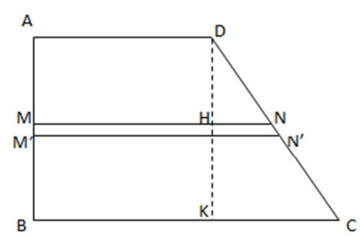
Solution

Choix de l'inconnue

Choisissons pour inconnue : $x = AM$.

x étant une longueur que l'on doit retrancher de 200, on a : $0 < x < 200$.

Mise en équation



D'après le théorème de Thalès : $\frac{HN}{KC} = \frac{DH}{DK}$.

d'où : HN $= \frac{150x}{200} = \frac{3x}{4}$. D'où : MN $= 150 + \frac{3x}{4}$.

Soit M' le point du segment [AB] tel que : AM' $= x + 2$.

On démontre de même que : M'N' $= 150 + \frac{3(x+2)}{4}$.

l'aire en m^2 du trapèze AMND est : $\frac{(AD+MN)AM}{2} = \frac{(1200+3x)x}{8}$.

celle du trapèze M'BCN' est : $\frac{(M'N'+BC)BM'}{2} = \frac{(1806+3x)(198-x)}{8}$..

on a donc à résoudre dans]0 ; 200[l'équation (E) : $\frac{(1200+3x)x}{8} = \frac{(1806+3x)(198-x)}{8}$.

Pour tout x appartenant à] 0 ; 200 [: (E) $\Leftrightarrow x^2 + 40x - 59598 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 201)^2 - 99999 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3\sqrt{11111} - 201 \text{ ou } x = -3\sqrt{11111} - 201$$

$\Leftrightarrow x = 3\sqrt{11111} - 201$ (car $x = -3\sqrt{11111} - 201$ n'appartient pas à]0 ; 200[ )

Vérification

$3\sqrt{11111} - 201 \cong 115{,}23$.

Pour $x \cong 115{,}23$:

- l'aire en m^2 de AMND est : $\frac{(1200+3x)x}{8} = 22264$;
- L'aire en m^2 de M'N'BC est: $\frac{(1806+3x)(198-x)}{8} = 22262$.

Conclusion

Pour commencer à tracer l'allée, il faut donc se placer sur [AB] à 115,23m du point A.

SEQUENCE 21

Inéquations dans $\mathbb{R}$

Objectifs

- Définir une inéquation ;
- déterminer les contraintes sur l'inconnue.

Généralités sur les inéquations

f et g étant deux fonctions d'un ensemble A vers $\mathbb{R}$, $x \in A$, $f(x) < g(x)$ et $x \in A$,

$f(x) \leq g(x)$ sont des inéquations.

On définit de la même façon que pour les équations :

– *le référentiel d'une inéquation ;*
– *l'ensemble de validité d'une inéquation ;*
– *l'ensemble des solutions d'une inéquation ;*
– *l'équivalence de deux inéquations sur un ensemble.*

Définitions

Soit A un ensemble.

- *(I) : $f \leq g$ où f et g sont deux fonctions de A vers $\mathbb{R}$, est appelée inéquation dans A, d'inconnue x.*
- *Tout élément α de A vérifiant $f(\alpha) \leq g(\alpha)$ est appelé solution de l'inéquation (I) .*
- *Résoudre dans A l'inéquation (I) , c'est rechercher l'ensemble des éléments de A qui sont solutions de (I) .*

Remarque

Pour les inéquations, l'ensemble d'arrivée des fonctions f et g doit être $\mathbb{R}$, puisqu'il s'agit de comparer *f(x) et g(x)*.

Exemple

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\frac{(x-1)^2}{3x-5} \leq 1$;

Contraintes sur l'inconnue : $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$;

Le nombre réel -1 est solution de (I) puisque $\frac{-1}{2} \leq 1$

SEQUENCE 22

Résolution d'inéquations dans $\mathbb{R}$

Objectifs

- Trouver une équation équivalente à une équation donnée ;
- résoudre une inéquation dans $\mathbb{R}$.

Théorème

- *Soit f et g deux fonctions d'un ensemble A vers $\mathbb{R}$, D l'ensemble de validité de l'inéquation : $x \in A,\ \ f(x) < g(x)$.*

Si pour tout élément x de D, *h(x) désigne un nombre réel alors les inéquations*

$x \in A,\ \ f(x) < g(x)$ *et* $x \in A,\ \ f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$ *sont équivalentes.*

– *Soit f, g et h trois fonctions d'un ensemble A vers* $\mathbb{R}$*, D l'ensemble de validité de l'inéquation :* $x \in A, \ f(x) < g(x)$.

- *Si pour tout x* de D, *h(x) désigne un nombre réel strictement positif alors les inéquations* $x \in A, \ f(x) < g(x)$ *et* $x \in A, \ f(x) \times h(x) < g(x) \times h(x)$ *sont équivalentes sur D.*
- *Si pour tout x* de D, *h(x) désigne un nombre réel strictement négatif alors les inéquations* $x \in A, \ f(x) < g(x)$ *et* $x \in A, \ f(x) \times h(x) > g(x) \times h(x)$ *sont équivalentes sur* D *.*

Remarque

On peut évidemment énoncer des théorèmes analogues en remplaçant les inégalités strictes par des inégalités larges.

Méthode de résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation, on procède généralement par transformations d'écritures en utilisant les règles de calcul relatives aux inégalités dans $\mathbb{R}$.

En particulier, une inéquation aura les mêmes solutions que l'inéquation obtenue :

- en ajoutant un même nombre réel aux deux membres de cette inéquation;
- en multipliant les deux membres de cette inéquation par un même nombre réel non nul.

SEQUENCE 23

Inéquations liant deux polynômes

Objectifs

Résoudre des inéquations liant deux polynômes

Méthode de résolution d'une inéquation liant deux polynômes

Pour résoudre une inéquation du type $P(x) \leq P'(x)$, où P et P' sont des polynômes, on peut procéder comme suit :

– se ramener à une équation du type $Q(x) \leq 0$, où Q est un polynôme ;
– factoriser éventuellement Q ;
– étudier le signe de Q.

Exemple

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$:

(I) : $x^3 \ + x + 6 \ \leq 2(8 - x - 3x^2)$. En retranchant $2(8 - x - 3x^2)$ à chacun des membres de (I), on obtient : (I) $\Leftrightarrow x^3 \ + x + 6 - 2(8 - x - 3x^2) \leq 0$.

$$\Leftrightarrow x^3 \ + 6x^2 + 3x - 10 \leq 0.$$

Résoudre (I) revient à étudier le signe du polynôme $x \longmapsto \ x^3 \ + 6x^2 + 3x - 10$

Les techniques permettant d'y parvenir ont été étudiées à la leçon sur les polynômes et fractions rationnelles.

SEQUENCE 24

Exemple de résolution d'inéquations liant deux fractions rationnelles dans $\mathbb{R}$

Objectifs

Suivre un exemple de résolution d'inéquation

Exemple

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\frac{x+2}{5x+19} < \frac{x-3}{10x-26}$

Contraintes sur l'inconnue: $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\right\}$.

Pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\right\}$, on a :

(I) :

$\frac{x+2}{5x+19} < \frac{x-3}{10x-26} \Leftrightarrow \frac{x+2}{5x+19} - \frac{x-3}{10x-26} < 0$ (On a ajouté $- \ \frac{x-3}{10x-26}$ aux deux membres de (I)).

$\Leftrightarrow \frac{(x+2\,)(10x-26\,)-(x-3)(5x+19)}{(5x+19)(10x-26)} \ < 0$

$\Leftrightarrow \frac{5x^2-10x+5}{(5x+19)(10x-26)} \ < 0$

$\Leftrightarrow \frac{5(x-1)^2}{(5x+19)(10x-26)} \ < 0$

Posons $f(x) = \frac{5(x-1)^2}{(5x+19)(10x-26)}$.

Déterminons le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{19}{5},\frac{13}{5}\right\}$ à l'aide du tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\frac{19}{5}$		1		$\frac{13}{5}$		$+\infty$
$5(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$5x+19$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$10x-26$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$		$-$	0	$-$		$+$	

L'ensemble des solutions de (I) est : $\left]-\frac{19}{5},1\right[\cup\left]1,\frac{13}{5}\right[$.

SEQUENCE 25

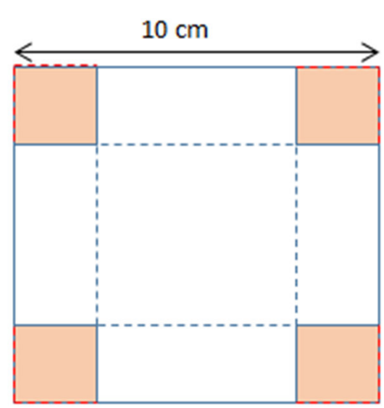
Problèmes conduisant aux inéquations

Objectif

Résoudre des problèmes conduisant aux inéquations

Problème 2

Aux quatre coins d'une feuille carrée de coté 10 cm, on découpe quatre petits carrés de même dimension. En repliant les bords suivant les pointillés (cf. figure), on obtient une boite.



Déterminer la dimension des quatre petits carrés qu'il faut découper pour obtenir une boite dont le volume soit supérieur ou égal à $48\,cm^3$.

Solution

Choix de l'inconnue

- Choisissons pour inconnue x la longueur en cm des côtés des quatre petits carrés.
  x étant une longueur que l'on doit retrancher deux fois de 10, on a : $0 < x < 5$.
- Mise en inéquation
  La boite a pour base un carré de côté $(10-2x)cm$ et pour hauteur x *cm.* Son volume en cm^3 est donc : $(10-2x)^2 x$. On a donc à résoudre dans] 0 ; 5[l'inéquation $(I) : (10-2x)^2 x \geq 48$.

$(I) \Leftrightarrow (5-x)^2 x - 12 \geq 0$.

Nous devons chercher une racine du polynôme P définie par : $p(x) = (5-x)^2 x - 12$.

3 est une racine évidente de P.

P(x) est factorisable par $x - 3$:

$$P(x) = (5-x)^2 x - 12$$

$$= x^3 - 10x^2 + 25x - 12$$

$$= (x-3)(x^2 - 7x + 4)$$

Or $x^2 - 7x + 4 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}$

$$= \left(x - \frac{7+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{7-\sqrt{33}}{2}\right)$$

Soit $P(x) = (x-3)\left(x - \frac{7+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{7-\sqrt{33}}{2}\right)$.

Posons $a = \frac{7-\sqrt{33}}{2} \in]0 ; 5[$.

Etudions le signe de P(x) sur]0 ; 5[à l'aide du tableau suivant :

x	0		a		3		5
$x-a$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	‖
$x-3$	‖	$-$	|	$-$	0	$+$	‖
$x-b$	‖	$-$	|	$-$	|	$-$	‖
$P(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(5-x)^2x-12 \geq 0$ dans $]0;5[$ est donc : $[a\,;3]$.

Conclusion

On doit donc découper des carrés dont la longueur des cotés est comprise entre 0,63 cm et 3 cm.

Equations et inéquations dans $\mathbb{R}^2$

SEQUENCE 26

Résolution par substitution d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectifs

- Définir un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$;
- résoudre par substitution un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$.

NB : On a vu en classe de 3e que si a et b sont des réels tous non nuls, toute écriture de la forme $ax + bx + c = 0$ est celle d'une équation du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}\times\mathbb{R}$).

Définition : *On appelle système de deux équations à deux inconnues un système de la forme :*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ou a, b, c, a', b' et c' sont des réels connus.

Dire que le couple (u ; v) est une solution de ce système équivaut à dire que (u ; v) est une solution de chacune des deux équations du système.

Méthode de résolution par substitution

Le principe de résolution d'un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}^2$ par substitution est le suivant :

- à l'aide d'une équation, exprimer une inconnue en fonction de l'autre ;
- substituer l'expression obtenue dans l'autre équation.

SEQUENCE 27

Exemple de résolution par substitution d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectifs

Utiliser la méthode par substitution pour résoudre un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Exemple

Soit (S) le système

On note (1) et (2) les deux équations qui constituent le système (S) :

$$(S) \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

- Exprimons y en fonction de x dans l'équation (1) : ce qui donne $y = x - 2$
- Remplaçons y par son expression dans l'équation (2) : on obtient

$2x - 3(x - 2) = 1$ Soit $x = 5$ puis en remplaçant x par 5 on obtient $y = 3$

(S) a pour solution le couple (3 ; 5)

Remarque :

- ✓ Pour résoudre le système (S) il y a trois autres possibilités de substitution :
  - De (1), on tire $x = y + 2$, puis on remplace x par cette expression dans (2) ;
  - De (2), on tire $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, puis on remplace y par cette expression dans (1) ;

– De (2), on tire $x = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}$, puis on remplace y par cette expression dans (1) ;

✓ Dans tous les cas, choisir la substitution dans laquelle l'expression d'une inconnue en fonction de l'autre est la plus simple possible.

SEQUENCE 28

Résolution par combinaison (ou élimination) d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectifs

Résoudre par combinaison (ou élimination) un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Méthode de résolution par combinaison (ou élimination)

Le principe de résolution par combinaison consiste à faire une combinaison bien choisie afin d'éliminer une inconnue.

Exemple

On donne le système

$$(\Sigma)\begin{cases} 2x + 5y = 6 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

Le système (Σ) est équivalent à

$\times 3$ $\left\{ 6x + 15y = 18 \right.$ obtenue en multipliant les deux membres de l'équation(1) par 3

$\times(-2)$ $-6x + 8y = -2$ obtenue en multipliant les deux membres de l'équation (2) par -2

$0x + 23y = 16$ obtenue en ajoutant membre à membre les deux équations

Ce qui donne $y = \frac{16}{23}$

On refait le même travail pour éliminer y

$$\begin{array}{l} \times 4 \\ \times 5 \end{array} \begin{cases} 8x + 20y = 24 \text{ obtenue en multipliant les deux membres de l'équation(1) par 4} \\ 15x - 20y = 5 \text{ obtenue en multipliant les deux membres de l'équation (2) par 5} \end{cases}$$

$$23x + 0y = 29 \text{ obtenue en ajoutant membre à membre les deux équations}$$

Ce qui donne $x = \frac{29}{23}$

$(\sum)$ a donc pour solution : S= $\left\{\left(\frac{29}{23}; \frac{16}{23}\right)\right\}$

Remarque

Après avoir trouvé y dans la première combinaison, on peut le remplacer par sa valeur $\frac{16}{23}$ dans (1) ou dans (2) afin de déterminer x.

SEQUENCE 29

Résolution par la méthode graphique d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectifs

Résoudre par la méthode graphique un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

On désigne par $(\sum_1)$ le système suivant :

$$(\textstyle\sum_1)\begin{cases} 2x - 5y = 11 \ (1) \\ 3x + 4y = 5 \ (2) \end{cases}$$

a) Représente graphiquement dans un même repère la droite (D_1) et (D_2) d'équations respectives (1) et (2) ;
b) Etudie l'intersection de ces droites

- Lorsque (D_1) et (D_2) ont un point d'intersection on dit que le système admet un unique couple $(x ; y)$ pour solution :ce sont les coordonnées de ce point d'intersection .c'est le cas de $(\sum_1)$;
- Lorsque (D_1) et (D_2) sont parallèles, on dit que le système n'a pas de solution. C'est le cas de $(\sum_3)$;

- Lorsque (D_1) et (D_2) sont confondus, on dit que le système admet une infinité de solutions. c'est le cas de ($\sum_2$).

Méthode

Le principe de la résolution graphique d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ consiste à tracer les droites constituées de deux équations puis étudier l'intersection de ces droites.

SEQUENCE 30

Méthode de résolution par le déterminant (Système de Cramer) d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Résoudre par le déterminant (Système de Cramer) un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Définitions

- *Soit (S) le système*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

On appelle déterminant du système (S) le nombre D= $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a\,b' - a'b$

- *Un système est dit de Cramer lorsque son déterminant est non nul.*
- *Etant donné un système (S) :*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels

On appelle déterminant associé à x le nombre $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ $= cb' - c'b$

On appelle déterminant associé à y le nombre $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ $= ac' - a'c$

Remarque

Si (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y' = c \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Théorème

Soit (S) un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ *et soit D son déterminant,* D_x *et* D_y *les déterminants respectifs en x et en y.*

- *Si* $D \neq 0$*, le système admet un couple* $(\frac{Dx}{D}; \frac{Dy}{D})$ *comme solution.*
- *Si* $D = 0$*, ou bien il n'y a aucune solution ou bien il y a une infinité de solution.*

SEQUENCE 31

Exemple de résolution par le déterminant (Système de Cramer) d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Appliquer la méthode de déterminant (Système de Cramer) pour résoudre un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Exemples

Résolvons le système suivant par la méthode de Cramer :

1) (S_1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$

Le déterminant du système (S1) est : D = $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -35$

D ≠ 0 donc (S1) admet un unique couple (x ;y) solution.

$x = \frac{Dx}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{5} = -1$; $y = \frac{Dy}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{5} = -1$

$S = \{(-1; -1)\}$

Remarque

- ✓ Plus généralement, lorsqu'un système est donné et qu'aucune méthode n'est imposée, l'on est libre de choisir une méthode qui parait facile !
- ✓ Il est préférable de chercher l'existence des solutions avant de se mettre à travailler.

SEQUENCE 32

Système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Définir et résoudre un système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

Vous avez appris en classe de 3ème que l'ensemble de couples (x, y) par exemple, solution de l'inéquation $x - y \leq -2$, est representé dans un repère (O, I, J) par un demi-plan de frontière la droite (D) d'équation $y = x + 2$

Pour savoir quel est ce demi-plan, il suffit de prendre un point O (0; 0), ou I(1; 0) ou J(0; 1) et de voir si le couple est solution de l'inéquation proposée.

En prenant le couple (0, 0), on a : $0 - 0 + 2 \leq 0$ $c'est$ à $dire$ $2 \leq 0$ n'est pas vrai. O(0, 0) n'appartient donc pas au demi-plan solution.

S = P_1

Remarque

Si la droite de frontière passe par l'origine, il est conseillé de vérifier avec I ou J

Méthode de résolution d'un Système d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$

Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$du type :

$$\begin{cases} ax + by + c \ \leq 0 & (1) \\ ax + b'y + c' < 0 & (2) \end{cases}$$

On résout et on trace les solutions de (1) et (2) dans un même repère puis on prend la partie du demi-plan correspondant aux deux solutions à la fois.

SEQUENCE 33

Exemple de résolution d'un système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Utiliser la méthode de résolution d'un système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} 2x - y + \geq 0 & (1) \\ 2x + y - 2 \leq 0 & (2) \\ y \leq 1 & (3) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow y \leq 2x$; soit D_1 la droite d'équation$y = 2x$. On remarque que le couple (1 ; 0) vérifie (1) donc le demi-plan de frontière (D_1) contenant I est solution de (1).

(2) $\Leftrightarrow y \leq -2x + 2$; soit D_2 la droite d'équation$y = -2x + 2$. On remarque que le couple (0,0) vérifie (2) donc le demi-plan de frontière (D_2) contenant l'origine est solution de (2).

(3) soit D_3 la droite d'équation$y = 1$. On remarque que le couple (0,0) vérifie (3) donc le demi-plan de frontière (D_3) contenant l'origine est solution de (3).

La solution du système est donc la partie du demi-plan à la fois solution des trois inéquations.

Remarque

- ✓ La solution dans $\mathbb{R}^2$ de l'inéquation du type $y \leq ax + b$ (respectivement $y \geq ax + b$) est le demi plan se trouvant en dessous (respectivement au-dessus) de la droite d'équation $y = ax + b$

- ✓ La solution dans $\mathbb{R}^2$ de l'inéquation $x \leq a$ (respectivement$x > a$) est le demi-plan se trouvant à gauche (respectivement à droite) de la droite d'équation $x = a$

SEQUENCE 34

Problèmes du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Résoudre des problèmes du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

Méthode de résolution de problèmes du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

Pour résoudre un problème conduisant à un système d'équations ou d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$, on procède de la manière suivante :

- faire le choix des inconnues (ou variables) avec les contraintes (réels positifs, entier naturel…) ;
- mettre le problème en équations ou inéquations ;
- résoudre le système obtenu par une méthode appropriée ;
- conclure : répondre à la question et s'assurer que les solutions obtenues satisfont aux contraintes.

Exemple

Le petit Franck dispose d'une somme de 800F composée exclusivement des pièces de 50F et de 100F. Il dispose en tout de 10 pièces.
Combien a – t – il de pièces de chaque sorte ?

Soit x le nombre de pièces de 50F et y le nombre de pièces de 100F. x et y sont des entiers naturels plus grands ou égaux à 1.

On obtient le système :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 50x + 100y = 800 \end{cases}$$ Soit après simplification

$$\begin{cases} x + y = 10 \quad (1) \\ x + 2y = 16 \quad (2) \end{cases}$$

En résolvant par combinaison linéaire on a :

$$\times(-1) \quad \begin{cases} -x - y = -10 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$$

$$\overline{}$$

$$y = 4$$

En remplaçant y par 4 dans (1), on obtient $x = 6$

Franck a 6 pièces de 50F et 4 pièces de 100F

Leçons de la compétence de base 3 du deuxième trimestre

Leçon : Bases et repères du plan

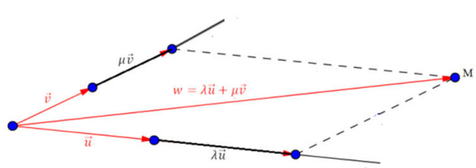
SEQUENCE 35

Combinaisons linéaires, bases et repères du plan

Objectifs

- Définir une combinaison linéaire de vecteurs ;
- définir une base et un repère du plan.

Définition



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs donnés.

Tout vecteur de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où λ et μ sont des nombres réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

λ et μ sont appelés les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Bases et repères du plan

Définition

On appelle base, tout couple de vecteurs non colinéaires.

Un repère du plan est un triplé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, où O est un point du plan appelé origine du repère et $(\vec{u}, \vec{v})$ une base.

Remarque

Trois points non alignés déterminent un repère du plan.

En effet, si O, I et J sont trois points non alignés, on peut considérer O comme l'origine du repère et les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ constituent une base.

En posant $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$, on obtient donc le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O est l'origine du repère et le couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ qui forme une base.

Théorème

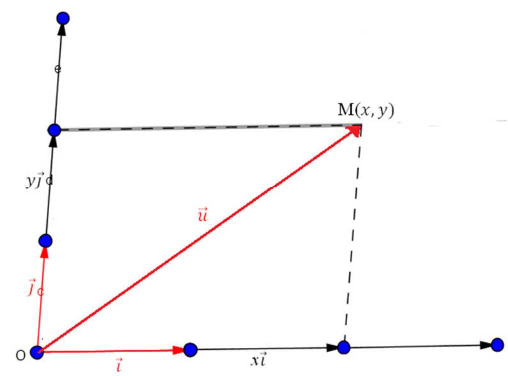
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan.

Pour tout point M, il existe un unique couple (x, y) de réels tels que

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, *on a :* $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

On dit que les réels x et y sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ *(ou* $\overrightarrow{OM}$*) dans la base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



SEQUENCE 36

Bases orthonormées du plan

0bjectifs

Définir des vecteurs orthogonaux et une base orthonormée

Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires ou si l'un au moins est nul.

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux se note* $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs,* λ *et* μ *deux nombres réels. On a :*

$\vec{u} \perp \vec{v} \Longrightarrow \lambda\vec{u} \perp \mu\vec{v}$.

Définition d'une base orthonormée du plan

Une base est dite orthonormée lorsqu'elle est constituée de deux vecteurs unitaires orthogonaux.

La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *est orthonormée si et seulement si on a :*

$\vec{u} \perp \vec{v}$ *et* $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.

SEQUENCE 37

Coordonnées de vecteurs

Objectif

Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base

Propriété fondamentale

Soit $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul couple de nombres réels (x, y) tel que :

$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Propriétés des coordonnées

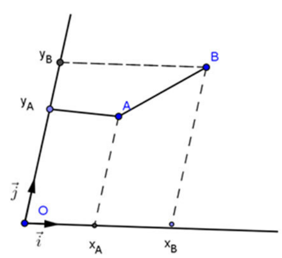
Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

1) $\vec{u} = \vec{o}$ *équivaut à $x = 0$ et $y = 0$.*
2) $\vec{u} = \vec{v}$ *équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.*
3) $\vec{u} + \vec{v}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.
4) $\lambda\vec{u}$ *($\lambda \in \mathbb{R}$) a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans un repère du plan

Propriété

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et deux points A et B de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

SEQUENCE 38

Coordonnées du milieu d'un segment $[AB]$ et du centre de gravité d'un triangle

Objectif

Déterminer les coordonnées du milieu d'un segment et du centre de gravité d'un triangle

Propriété

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et soient A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, deux points du plan.

Si I est milieu de $[AB]$ alors I $\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix}$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Coordonnées du centre de gravité d'un triangle

Propriété

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et soient A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et

C $\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ trois points du plan.

Si G est le centre de gravité du triangle ABC alors G a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{pmatrix}$

dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

SEQUENCE 39

Condition analytique de colinéarité : notion de déterminant

0bjectif

Calculer le déterminant de deux vecteurs

Propriété

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$.

L'expression $xy' - x'y$ est appelée déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

On le note $det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y$.

Afin de le mémoriser facilement, on adopte une disposition des coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans un tableau tel que présenté ci-dessous :

$det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

La propriété énoncée ci – dessus peut donc être formulée comme suit :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colinéaires équivaut à $det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Remarques

- ✓ Lorsque trois points A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ dans une base donnée sont tels que A ; B et C alignés , on sait que les vecteurs déterminés par ces trois points sont deux à deux colinéaires. On peut donc énoncer :

A, B et C sont alignés équivaut à det($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$)= 0 ou encore det($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$) = 0.

- ✓ Si quatre points A ; B ; C et D du plan sont tels que (AB)∥ (CD), on sait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires puisqu'ils ont même direction.

  On peut donc énoncer :

  A, B, C et D étant quatre points, (AB) ∥ (CD) équivaut à det($\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$) = 0

SEQUENCE 40

Norme de vecteurs et orthogonalité

0bjectif

Donner l'expression analytique de la norme d'un vecteur et calculer la distance entre deux points.

Expression analytique de la norme d'un vecteur

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (x ; y). On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

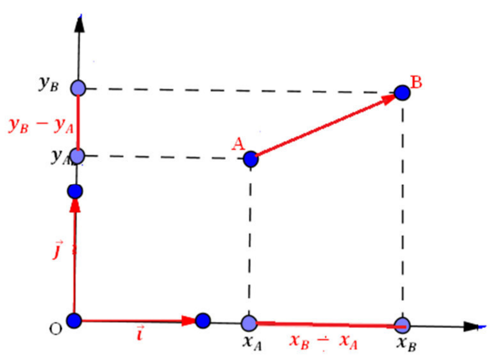
Distance de deux points

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

Soit $A\binom{x_A}{y_A}$ et $B\binom{x_B}{y_B}$ deux points du plan.

On a donc :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A})^2}$$



Condition analytique d'orthogonalité de deux vecteurs

Théorème

Soient $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormée du plan, $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

SEQUENCE: 41

Mesure algébrique

Objectif

Définir et calculer la mesure algébrique

Définition de la mesure algébrique

Soit (D) une droite orientée de repère $(O, \vec{\imath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 1$. A et B sont deux points de (D).

On appelle mesure algébrique de (A, B) relativement à $\vec{\imath}$ l'unique nombre réel, noté $\overline{AB}$ tel que $\overrightarrow{OB} = \overline{AB}.\vec{\imath}$

Propriétés

Soit (D) une droite orientée par un de ses deux vecteurs unitaires $\vec{\imath}$.

Pour tous points A, B et C de (D), pour tout nombre λ réel, on a :

1) $|\overline{AB}| = AB$
2) $\overline{BA} = -\overline{AB}$
3) *Si A et B sont deux points distincts,*
   - $\overline{AB} = AB$ *si et seulement si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{\imath}$ *sont de même sens*
   - $\overline{AB} = -AB$ *si et seulement si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{\imath}$ *sont de sens contraires.*
4) $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$
5) $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} = \lambda.\overline{AB}$
6) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ *(relation de Chasles appliquée aux mesures algébriques).*

SEQUENCE : 42

Propriété des produits et des quotients de mesures algébriques

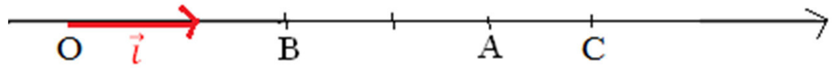
Objectif

Propriété

Pour des points appartenant à une même droite, le produit et le quotient de deux mesures algébriques sont indépendants de l'orientation de la droite.

Exercice

On considère la droite réelle (D) de repère $(O, \vec{\imath})$.



Détermine relativement à $\vec{\imath}$ puis à $-\vec{\imath}$, les mesures algébriques suivantes :

$\overline{AB}$; $\overline{AC}$; $\overline{AB}$ x $\overline{AC}$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

Leçon : Trigonométrie

SEQUENCE 43

Angles orientés et cercles trigonométriques

Objectif

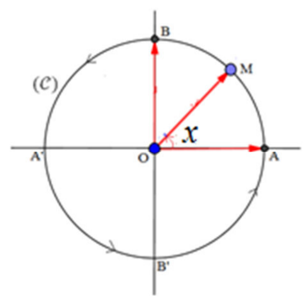
Définir le cercle trigonométrique et déterminer la mesure principale d'un angle orienté

Définition du cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique, tout cercle orienté dans le sens direct et de rayon égal à 1.

Image d'un angle orienté sur le cercle trigonométrique

Propriété



On considère le cercle trigonométrique de centre O. A tout réel x on peut associer l'unique point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$.

M est alors appelé l'image de x sur la cercle trigonométrique.

Détermination de la mesure principale d'un angle orienté

Afin de pouvoir déterminer l'image d'un angle orienté x sur un cercle trigonométrique, il est quelque fois nécessaire de trouver la mesure principale α de cet angle orienté en valeur absolue.

C'est le cas lorsque x est un nombre réel assez grand par exemple $x = \frac{1993\pi}{8}$, ou $x = -\frac{94\pi}{3}$, etc.

Pour ces cas de figure, c'est la détermination de la mesure principale de x, c'est-à-dire $\alpha \in]-\pi;\pi[$ puisque les mesures x sont de la forme $x = \alpha + 2k\pi$ $(k \epsilon Z)$, qui peut permettre de résoudre le problème.

Attention !

Il apparait que si l'on veut déterminer la mesure principale d'un angle orienté de mesure a assez grande en valeur absolue, il est nécessaire de considérer que l'expression générale des mesures d'un tel angle orienté est de la forme $a + 2k\pi$ $(k\epsilon Z)$, puis de déterminer la valeur précise de k en supposant que $a + 2k\pi$, est une mesure principale, ce qui nous permet d'obtenir l'encadrement $-\pi < a + 2k\pi < \pi$.

On porte par la suite la valeur de k obtenue dans l'expression $a + 2k\pi$ et le résultat obtenu est la mesure principale de cet angle orienté.

La position du point image de cet angle orienté sur le cercle trigonométrique est déterminée par la donnée de la mesure principale obtenue.

SEQUENCE 44

Sinus et cosinus d'un angle orienté

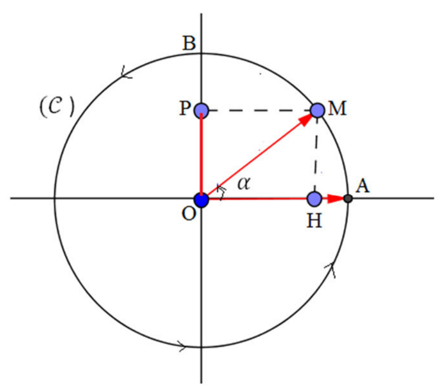
Objectif

Définir le cosinus et le sinus d'un angle orienté

Définition et propriétés

Définition

Soit α un réel quelconque et M le point de (C) associé au réel α. On a donc $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right) = \alpha$.



On appelle cosinus de l'angle orienté α et on note $\cos\alpha$, l'abscisse de M dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

De même le sinus de l'angle orienté α noté $\sin\alpha$, est l'ordonnée du point M dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

Sur la figure ci-dessous on a :

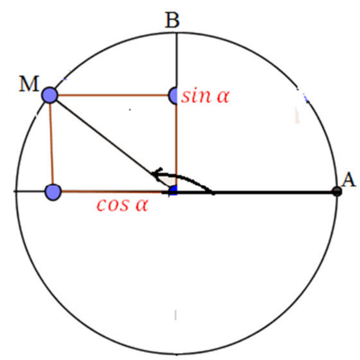
$cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right) = cos\,\alpha = OH\ et\ sin\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right) = sin\,\alpha = OP$

Propriétés

1) Soit α un réel quelconque.

Alors on a : $-1 < cos\,\alpha < 1\ ;\ -1 < sin\,\alpha < 1\ \ et\,cos^2\,\alpha + sin^2\,\alpha = 1$.

Remarque



Soit (C) le cercle trigonométrique de centre O.

Quel que soit la position de M sur le cercle trigonométrique, associé à un réel α, les projections orthogonales de M respectivement sur (OA) et sur (OB) déterminent l'abscisse de M qui est $\cos\alpha$ et l'ordonnée de M qui est $\sin\alpha$.

2) (C) est un cercle trigonométrique de centre O.

Soit $\alpha \neq \pi$*, un nombre réel donné.*

On a : $cos(-\alpha) = cos\,\alpha\ \ et\,sin(-\alpha) = -\,sin\,\alpha$.

SEQUENCE 45

Signe du sinus et du cosinus d'un angle orienté

Objectif

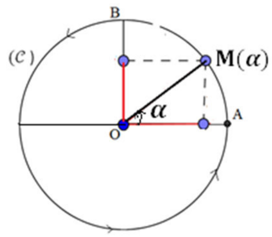
Déterminer le signe du sinus et du cosinus d'un angle orienté

Signes du cosinus et du sinus

Soit α un nombre réel donné, (C) le cercle trigonométrique de centre O et soit M un point de (C) associé au réel α.

Le signe du cosinus et du sinus d'un angle orienté α dépend de la position de M sur le cercle (C).

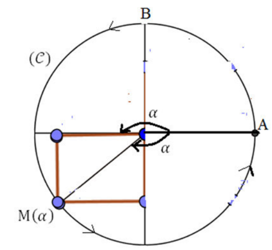
On a :



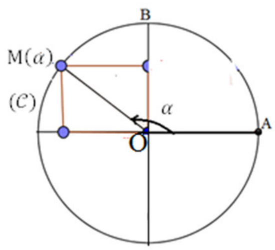
$\alpha \in]0;\frac{\pi}{2}[$

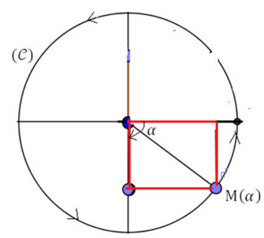
Cos $\alpha > 0$ *et* $sin\alpha > 0$

$\alpha \in]\pi; \frac{3\pi}{2}[$: $\cos\alpha < 0$



et $\sin\alpha < 0$





$\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$: $\cos\alpha < 0$ et $\sin\alpha > 0$

$\alpha \in]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$: $\cos\alpha > 0$ et $\sin\alpha < 0$

SEQUENCE 46

Cosinus et sinus d'angles remarquables

Objectifs

- Déterminer les valeurs des cosinus et sinus de quelques angles remarquables
- donner la périodicité des fonctions sinus et cosinus

Tableau des valeurs des cosinus et sinus d'angles remarquables

(x en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Périodicité des cosinus et sinus

Propriété

Pour tout réel x on a :

$cos(2\pi + x) = cos\, x$ *et* $sin(2\pi + x) = sin\, x$.

On dit que cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

Exercice

Calcule le cosinus et le sinus des réels suivants :

a) $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$.

b) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{6}$.

SEQUENCE 47

Lignes trigonométriques d'angles associés

Objectifs

Déterminer le sinus et le cosinus d'angles associés

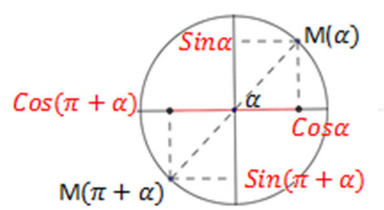
Sinus et cosinus d'angles associés

On considère un cercle trigonométrique (C) de centre O et soit M un point de (C) associé au réel α. *On a les cas suivants :*

1) $M(\pi + \alpha)$

$$cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

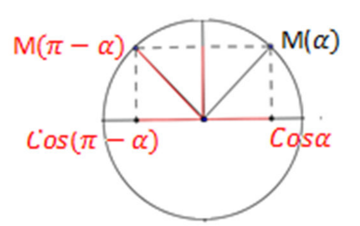
$$sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$



2) $M(\pi - \alpha)$

$$cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

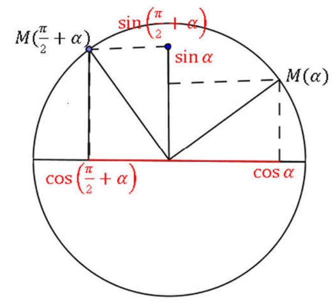
$$sin(\pi - \alpha) = sin\,\alpha$$



3) $M(\frac{\pi}{2}+\alpha)$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\,sin\,\alpha$$

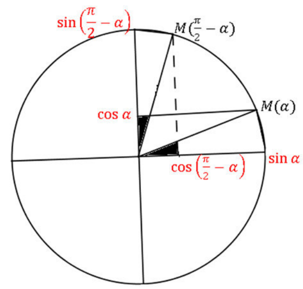
$$sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = cos\,\alpha$$



4) $M(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sin\,\alpha$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = cos\,\alpha$$



SEQUENCE 48

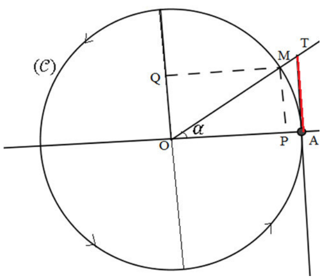
Tangente d'un angle orienté

Objectif

Définir la tangente d'un angle orienté

Définition

Soit un angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ *non droit de mesure principale* $\alpha(\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ *et* $\alpha \neq -\frac{\pi}{2})$.



La tangente de cet angle orienté ou de sa mesure principale est définie par : $\tan(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

M est l'image de α *sur le cercle (C). On a :*

$\overline{AT} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$ donc $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Propriété

Quelque soit le nombre réel α *de* $]-\pi;\pi[$ *tel que* $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ *et* $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$, *on a :*

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Démonstration

On sait que $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \forall\ \alpha\ \epsilon]-\pi;\pi[\ tel\ que\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}\ et\ \alpha\neq-\frac{\pi}{2}$.

Calculons : $1+\tan^2\alpha$.

$1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ or $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ donc

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

Exercices

1) Détermine la tangente des angles orientés de mesure respectives : 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Calcule $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$ sachant que : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercices d'entrainement de la compétence de Base 1 du deuxième trimestre

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

a) $f(x)=2x^2-3x^2+5x-1$;
b) $f(x)=(3-2x)(5x+1)$;
c) $f(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{3x+1}$;
d) $f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-3)}$;
e) $f(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}$;
f) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$.

Exercice 2

f et g sont des fonctions définies par :

$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x$.

$g(x)=\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x}$.

1) Trouver D_f et D_g.
2) Calculer l'image par f et g de chacun des nombres suivants :
   10^{-1} ; 10^2 ; 10^{-3} ; -10^{-1} ; -10^3.

Exercice 3

L'unité de longueur est le cm. ABC est un triangle rectangle en C tel que AB = 6 et AC $= x$.

1) Calculer BC en fonction de x.
2) $\mathcal{A}$ est la fonction qui, à x, associe l'aire du triangle ABC.
   a) Calculer $\mathcal{A}(x)$.
   b) Quel est l'ensemble de définition de $\mathcal{A}$?

Exercice 4

f est la fonction définie par $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$.

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f.

1) Parmi les points suivants, indiquer ceux qui appartiennent à $(\mathcal{C})$:

   $A\binom{2}{2}$. $B\binom{3}{1}$. $C\binom{0}{-1}$. $D\binom{-2}{2}$.

2) Déterminer les ordonnées des points $(\mathcal{C})$ dont les abscisses sont $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, dire si les fonctions f et g sont égales ou non sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$.
b) $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$; $g(x) = |x| - 1$.
c) $f(x) = x$; $g(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer D_f et D_g puis le plus grand des ensembles sur lequel f et g coincident.

a) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$; $g(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.
b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+é}$; $g(x) = x - 2$.
c) $f(x) = |x|$; $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$.
d) $f(x) = |x|$; $g(x) = \frac{x^2}{|x|}$.

Exercice 7

Démontrer que les fonctions suivantes présentent un minimum sur leur ensemble de définition :

a) $f(x) = |x - 3| + 1;$
b) $g(x) = (x - 1)^2 + 3;$
c) $h(x) = \sqrt{2x - 1} - 4;$
d) 1) Etudier les variations de f sur $]-\infty; 3]$ et $[3\,;+\infty[$.
   2) Etudier les variations de g sur $]-\infty; 1]$ et $[1\,;+\infty[$.
   3) Etudier les variations de h sur $]\frac{1}{2}; +\infty]$.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, montrer que f est une fonction affine par intervalles :

1) $f(x) = 7x + 1 - |4x + 3|$
2) $f(x) = |2x + 3| + |x - 5|$
3) $f(x) = max(3x - 1\,; x - 1)$
4) $f(x) = min(x\,; 3x + 1)$

Exercice 9

Trouver une fonction f telle que $f(-2) = 1$; $f(1) = 4$ et $f(5) = -3$. f est-elle une fonction affine ?

Exercice 10

Quand il fait 12 heures à N'Djamena, à New-York il est 6 heures. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, construire la représentation graphique de la fonction qui, à l'heure de N'Djamena, associe l'heure de New-York.

Exercices d'entrainement de la compétence de Base 2 du deuxième trimestre

Exercice 1

Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire d'aire 1200m^2, sachant que sa longueur dépasse sa largeur de 10m.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(3x+2)^2 = (6x+4)(x+2)$;

b) $3x + \dfrac{x+1}{2} = 8 + x$;

c) $\dfrac{x+1}{x-1} = x$;

d) $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{2}{x-3} = 1$;

e) $\dfrac{12x+9}{4x+3} = 3$;

f) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$;

g) $(x-1)^2 + (x+1)^2 = 2(x-2)(x+1) + 38$

h) $(x+3)^2 = (2x-1)^2$;

i) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;

j) $x^2 = 25$;

k) $x^4 = 4$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

e) $\sqrt{25-6x} = x-3$

f) $1 - x = \sqrt{5-2x}$

g) $x - \sqrt{2x+3} = -2$

h) $2\sqrt{2x+2} - 3 = 2x$

i) $x + \sqrt{2x-2} = \dfrac{1}{2}$

j) $x - 1 = \sqrt{x-1}$

k) $x + 1 = \sqrt{5x-1}$

l) $1 - \sqrt{x^2+2} = x$.

Exercice 4

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a) $\dfrac{2x-3}{x+5} \geq 0$

b) $\frac{-x+7}{4x+1} < 0$.

c) $\frac{x\sqrt{3}-1}{2x-\sqrt{3}} > 0$.

Exercice 5

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\frac{x^2+2x}{x-3} \geq 0$;

b) $\frac{(3x-2)^2}{4x^2-1} < \frac{(2x+11)^2}{4x^2-1}$

c) $\frac{x^2-6x-7}{7-4x} \leq 0$;

d) $\frac{(x-1)^2}{2x^2+1} \leq \frac{1}{2}$;

e) $\frac{x-2}{x-3} - \frac{2x+11}{2x+9} < \frac{17}{(x-3)(2x+9)}$

f) $x+2-\frac{2}{x+3} < \frac{x^2+5x+6}{x+3}$.

Exercice 6

Préciser, sans les résoudre, le nombre de solutions des systèmes suivants:

$(s_1) : \begin{cases} 3x+4y=5 \\ 5x-2y=17 \end{cases}$; $(s_2) : \begin{cases} 4x-12y=4 \\ 7x-21y=7 \end{cases}$;

$(s_3) : \begin{cases} 9x-5y=39 \\ 15x-3y=81 \end{cases}$; $(s_4) : \begin{cases} 3x-y=4 \\ x-\frac{y}{3}=1 \end{cases}$.

Exercice 7

Résoudre les systèmes :

$(s_1) : \begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=0 \\ x-3y=7 \end{cases}$; $(s_2) : \begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-3y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$

Exercice 8

Utilise un changement d'inconnue pour résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ 2y^2 - x^2 = 14 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} \sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -3 \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 23 \end{cases}$;

Exercice 9

Kalibou a 575 F en pièce de 25 F et 50 F. Il a en tout 16 pièces. Combien a-t-il de pièces de chaque sorte ?

Exercices d'entrainement de la compétence de Base 3 du deuxième trimestre

Exercice 1

Soit ABC un triangle. On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{CA}$. Détermine les coordonnées, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{BM}$ sachant que :

a) $\overrightarrow{BM} = 5\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2

On considère un triangle ABC et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par

$\vec{u} = (3 - \sqrt{2})\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 7\,\overrightarrow{AB} + (3 - \sqrt{2})\,\overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont – ils colinéaires ?

Exercice 3

On considère les points A(2 ;0) ; B(−1 ; $\sqrt{3}$) ; et C (−1 ; −$\sqrt{3}$).

a) Montre que le triangle ABC est équilatéral.

b) Détermine les coordonnées du point D tel que ABCD est un losange.

Exercice 4

ABCD est un parallélogramme de centre I.

a) Justifie que le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base du plan.

Détermine, dans cette base, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que :

$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + 3(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}) + 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}) - 2(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA})$.

b) Construis le point E défini par $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ forment – ils une base du plan ?

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points A(2 ; 0), B(3 ;0), C (4 ; 0), A'(0 ; 1), B'(0 ;3), et C'(0 ; 6). Les droites (AB') et (BA') se coupent en E ; (BC') et (CB') se coupent en F ; (AC') et (CA') en G.

a) Constate graphiquement que les points E, F, G semblent alignés. On se propose de démontrer cette propriété.

b) Calcule les coordonnées des points E, F et G.

c) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

Exercice 6

Soit A et B deux points distincts :

a) Place les points C et D tels que $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

b) Compare $\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}$ et $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$

c) Soit I le milieu de $[AB]$; exprime IA^2 et $\overline{IC} \times \overline{ID}$ en fonction de AB et conclus.

d) Calcule $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ et $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$

Déduis-en que : $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

Exercice 7

Compléter

Degrés	1		-15	20	270		
Radians		1				$\frac{167\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$

Exercice 8

ABCD est un carré de côté 1.

Calculer la longueur AC puis en déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{4}$ et $sin\frac{\pi}{4}$.

1) Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés :
   $\alpha = 12°$ et $\beta = 195°$

2) Convertir en degrés les mesures d'angles exprimées en radians :

$\alpha = \frac{7\pi}{12}$ et $\beta = \frac{13\pi}{9}$.

Exercice 9

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique de centre O et d'origine I. Soit M, N et Q trois points du cercle trigonométrique images respectives des angles $\frac{9\pi}{4}, \frac{18\pi}{4}$ et $\frac{-47\pi}{6}$.

Donner les mesure des angles orientés $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$, $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP})$, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$.

Exercice 10

On sait d'u réel x que $x \in [O, \pi]$ et $cosx = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Déterminer la valeur exacte de $sinx$.
2. On sait que le réel x cherché est l'un des reels $\left\{-\frac{4\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$.

   Qui est ce x? Justifier.

Exercice 11

Tracer un cercle trigonométrique puis placer les points-images des angles en radians suivants :

a) $\frac{3\pi}{2}$; b) $-\frac{3\pi}{4}$; c) $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 12

On donne $cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

a) Calculer la valeur exacte de $sin\frac{\pi}{5}$.

b) En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus des réels $\frac{4\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}$.

Exercice 13

Exprimer à l'aide de $cosx$ et $sinx$ les expressions suivantes :

a) $\sin(-x) + \cos(-x)$.

b) $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$.

c) $(\pi - 2) + \cos(3\pi + x)$.

d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(\pi - x)$.

Exercice 14

1) Sans utiliser la calculatrice, donner la valeur exacte des nombres suivants (on pourra utiliser éventuellement un cercle trigonométrique).

   a) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; b) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; c) $tan\,\frac{3\pi}{4}$; d) $\sin\frac{2\pi}{3}$; e) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;

   f) $\cos\frac{19\pi}{3}$; g) $\sin\frac{7\pi}{4}$; h) $\tan\frac{25\pi}{6}$.

Evaluation

Exercice 1

1) Soit $A = \left\{-5; -2; -1; 0; \frac{1}{2}; 1; \sqrt{3}; 2{,}5\right\}$ et

$f: \begin{matrix} A \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{|x|-1} \end{matrix}$.

a) Détermine l'ensemble de définition de f.

b) Trouver les antécédents de -4 et $\frac{1}{2}$ par f.

2) On donne $f(x) = |3x - 1|$

   a) Montre que f est une fonction par affine.

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $(3x+2)^2 = (6x+4)(x+2)$

b) $\dfrac{2x-3}{x+5} \geq 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants :

$$(s_1) : \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 5x - 2y = 17 \end{cases}$$

$$(s_2) : \begin{cases} 4x - 12y = 4 \\ 7x - 21y = 7 \end{cases}$$

Exercice 3

On sait que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

a) Calculer $\sin\frac{\pi}{12}$.

b) A l'aide d'un cercle trigonométrique, en déduire $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Difficultés rencontrées liées à la résolution de l’exercice :

- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………

Conseils et orientation de l’enseignant :

- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………

Evaluation de la compétence

☐

☐

☐

Troisième trimestre

Programmation horaire du 3e trimestre

3e trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée des chapitres	Nombre d'heures du Trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
Avril- juin (4-13 Avril : Congé) 9 semaines	CB1	5	Fonctions de référence	5H	1H	2H	6H	27H
	CB2	4	Organisation des données	4H	1H		5H	
	CB3	5	Graphiques	4H	1H		5H	
		6	Caractéristiques de position et de dispersion	4H	1H		5H	
		10	Droites du plan				5H	

FICHE DE PROGRESSION

Trimestre	Période	Contenus		
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité	CB3 : Géométrie
3	1er Avril au 10 Mai	– Fonctions de référence	– Organisation des données – Graphiques	
	11 Mai au 10 Juin		– Caractéristiques de position et de dispersion	Droites du plan

Compétence de Base 1

Seconde S–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les fonctions de référence.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)

Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
Fonctions de référence – Parité, périodicité d'une fonction – Etude des fonctions : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$ $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array}$ $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$ – Composition de fonctions de référence avec une fonction linéaire	– Etudier la parité ou la périodicité d'une fonction – Etudier les fonctions de référence – Composer une fonction de référence avec une fonction linéaire et représenter son graphique	– Etude de la parité d'une fonction – Etude de la périodicité d'une fonction – Etude des fonctions de référence – Composition d'une fonction de référence avec une fonction linéaire – Représentation graphique de la composée d'une fonction de référence avec une fonction linéaire

Compétence de Base 2

Terminale D–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les statistiques.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)

Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
Organisation des données - Types de caractères statistiques - Effectifs et fréquences cumulés	- Organiser les données selon les différents types de caractères statistiques - Déterminer les effectifs et les fréquences cumulés	- Organisation des données selon les différents types de caractères statistiques - Détermination des effectifs simples - Détermination des effectifs cumulés - Détermination des fréquences simples - Détermination des fréquences cumulées
Graphiques statistiques Différentes représentations d'une distribution statistique : semi-circulaire, circulaire, diagramme en bâton, cumulatif, histogramme.	- Représenter graphiquement une distribution statistique	- Représentation graphique d'une distribution statistique par un diagramme : semi-circulaire, circulaire, diagramme en bâton, cumulatif, histogramme.
Caractéristiques de position et de dispersion	- Lire et interpréter un diagramme - Déterminer le mode, la moyenne et la médiane - Déterminer l'écart moyen, la variance et l'écart type.	- Lecture et interprétation d'un diagramme - Détermination du mode, la moyenne et la médiane - Détermination de l'écart moyen, la variance et l'écart type.

Compétence de base 3

Seconde S–CB3 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les droites du plan.		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
Les droites du plan - Vecteur directeur, vecteur normal - Equation cartésienne d'une droite - Représentation paramétrique d'une droite d'un plan - Equation cartésienne d'un cercle dans le plan.	- Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal d'une droite - Trouver une équation cartésienne d'une droite - Trouver une représentation paramétrique d'une droite - Passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique et vice versa - Tracer une droite connaissant une de ses équations cartésiennes ou une de ses représentations paramétriques - Trouver l'intersection de deux droites - Prouver que deux droites sont perpendiculaires ou parallèles - Trouver une équation cartésienne d'une droite parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée - Calculer la distance d'un point à une droite	- Détermination d'un vecteur directeur ou d'un vecteur normal d'une droite - Détermination d'une équation cartésienne d'une droite - Détermination d'une représentation paramétrique d'une droite - Passage d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique et vice versa - Représentation d'une droite connaissant une de ses équations cartésiennes ou une de ses représentations paramétriques - Détermination de l'intersection de deux droites - Démonstration de la perpendicularité ou du parallélisme de deux droites - Détermination d'une équation cartésienne d'une droite parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée - Calcul de la distance d'un point à une droite

PARTIE DESTINEEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du troisième trimestre

Leçon : Fonctions de référence

SEQUENCE 1s

Parité d'une fonction

Objectifs

Etudier la parité d'une fonction

Parité d'une fonction

Définition d'un ensemble symétrique par rapport à zéro

Un ensemble D de réels est symétrique par rapport à zéro si pour tout x de D, – x appartient à D.

Exemples

1) Les ensembles$]-4\,;4[$, $[-10\,;10]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ sont symétriques par rapport à 0 ;
2) Les ensembles$]-4\,;4]$, $[-3\,;7]$, $[0\,;+\infty[$ ne sont pas symétriques par rapport à 0.

Fonction paire

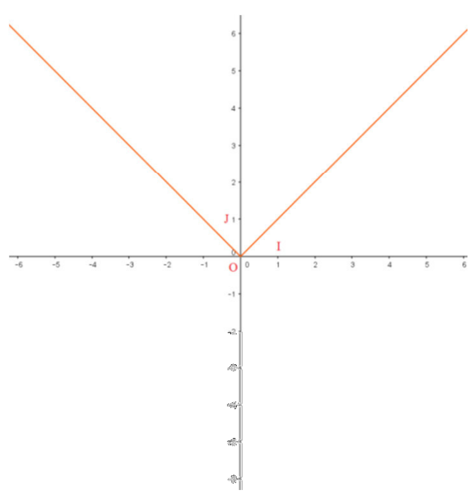
Définition

Une fonction f définie sur un ensemble D de $\mathbb{R}$ est paire si :

- *D est symétrique par rapport à 0 ;*
- *Pour tout x de D, $f(-x) = f(x)$.*

Remarque

Dans un repère orthogonal (O ; I ; J), la représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (OJ).



Exemple

On donne la fonction g définie par $g(x) = |x|$.

Etudions la parité de g.

g est la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $-x$ appartient à $\mathbb{R}$et $g(-x) = |-x|$

$$=|x|$$

$$=g(x)$$

$$g(-x) = g(x).$$

g est donc paire.

Fonction impaire

Définition

Une fonction f définie sur un ensemble D de $\mathbb{R}$ est impaire si :

- *D est symétrique par rapport à 0 ;*
- *Pour tout x de D, $f(-x) = -f(x)$.*

Remarque

Dans un repère orthogonal (O, I, J), la représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère

Exemple

On donne la fonction f définie par $f(x) = -3x$.

Etudions la parité de f.

f est une fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x$ appartient à $\mathbb{R}$ et $f(-x) = -3\times(-x)$

$$= 3x$$

s $$= -f(x).$$

$f(-x) = -f(x)$.

f est donc impaire.

Périodicité

Définition

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T, un réel strictement positif.

f est périodique de période T si pour tout x réel, $f(x + T) = f(x)$.

Remarque

Lorsque T est une période de la fonction f alors, 2T ; 3T ; 4T ; … ; et plus généralement nT (n étant un entier strictement positif) est une période de f.

Exemple

Les fonctions cos et sin sont des fonctions périodiques de période 2π car pour tout x réel, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

SEQUENCE 2

Fonction carrée

Objectif

Etudier et représenter graphiquement la fonction carrée

Etude de $f(x) = x^2$

Etudions la fonction carrée f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Variations de carrée $f(x) = x^2$.

Ensemble de définition

$f(x) = x^2$ est définie pour tout x réel.

On note $D_f = \mathbb{R}$

Sens de variation

x et y étant deux nombres réels tels que $x < y$, on veut comparer $f(x)$ et $f(y)$ c'est-à-dire x^2 et y^2 ;

- Si $x < y \leq 0$ alors, $x^2 > y^2$; la fonction carrée est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_- =]-\infty\,; 0]$.
- Si $0 \leq x < y$ alors $x^2 < y^2$; la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0\,; +\infty[$;

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction carrée admet en 0 un minimum égal à 0.

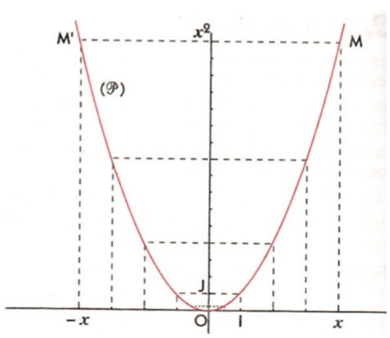
Représentation graphique de *f*

Le plan étant muni d'un repère (O ; I ; J), traçons la courbe représentative de f sur l'intervalle [−3 ; 3].

Table des valeurs de x et $f(x)$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

On obtient la représentation graphique de f :



La représentation graphique de f ainsi obtenue est appelée une parabole notée *(P)*.

Pour obtenir *(P)* avec plus de précision, on pourra établir une table de valeurs de x et $f(x)$ sur l'intervalle [−1 ; 1] avec un pas de 0,1.

Démontrons que (OJ) est un axe de symétrie à la parabole *(P)* représentative de la fonction carrée :

x étant un réel, désignons par M(x ; x^2) le point de la parabole *(P)* d'abscisse x. Son symétrique par rapport à (OJ) est le point M'($-x$; $(-x)^2$). M' est sur la parabole (*P*) car

$x^2 = (-x)^2$.

Ainsi, tout point M de *(P)* admet pour symétrique par rapport à (OJ) un point M' de *(P).*

On dit que *(P)* est une parabole de sommet O et d'axe (OJ

SEQUENCE 3

Fonction racine carrée

Objectif

Etudier et représenter graphiquement la fonction racine carrée

Etude de $g(x) = \sqrt{x}$

Etudions la fonction racine carrée f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

Variations de la fonction racine carrée $g(x) = \sqrt{x}$.

Ensemble de définition

$g(x) = \sqrt{x}$ est définie pour tout x réel positif.

On note $D_g = [0\,;+\infty[$

Sens de variation

x et y étant deux nombres réels positifs tels que $x < y$, on veut comparer $g(x)$ *et* $g(y)$ c'est-à-dire $\sqrt{x}$ *et* $\sqrt{y}$.

On sait que pour $0 \leq x < y$ alors $\sqrt{x} < \sqrt{y}$; la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$;

Tableau de variation

x	0		16		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	

La fonction racine carrée admet en 0 un minimum égal à 0.

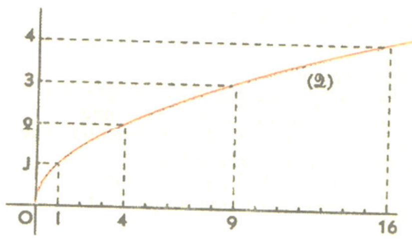
Représentation graphique de g

Le plan étant muni d'un repère (O ; I ; J), traçons la courbe représentative de g sur l'intervalle [0 ; 9].

Table des valeurs de x et $g(x)$:

x	0	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	1	2	3

On obtient la représentation graphique de g :



Pour obtenir la représentation graphique de g avec plus de précision, on pourra établir une table de valeurs de x et $g(x)$ sur l'intervalle [0; 1] avec un pas de 0,1.

SEQUENCE 4

Fonction inverse

Objectif

Etudier et représenter graphiquement la fonction inverse

Etude de $h(x) = \frac{1}{x}$

Etudions la fonction inverse h définie sur ℝ par $h(x) = \frac{1}{x}$

Variations de la fonction inverse $h(x) = \frac{1}{x}$

Ensemble de définition

$h(x) = \frac{1}{x}$ est définie pour tout x réel non nul.

On note $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0\ [\cup]\ 0\ ;+\infty\ [$

Sens de variation

x et y étant deux nombres réels tels que $x < y$, on veut comparer $h(x)$ *et* $h(y)$ c'est-à-dire $\frac{1}{x}$ *et* $\frac{1}{y}$.

- Si $x < y < 0$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$; la fonction inverse est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_- = \,]-\infty\,;0[$.
- Si $0 < x < y$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$; la fonction inverse est aussi strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+ =]0\,;+\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	-4	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	4	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	$-\frac{1}{4}$	-4 ↘	‖	↘ 4	$\frac{1}{4}$	↘

La fonction inverse est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

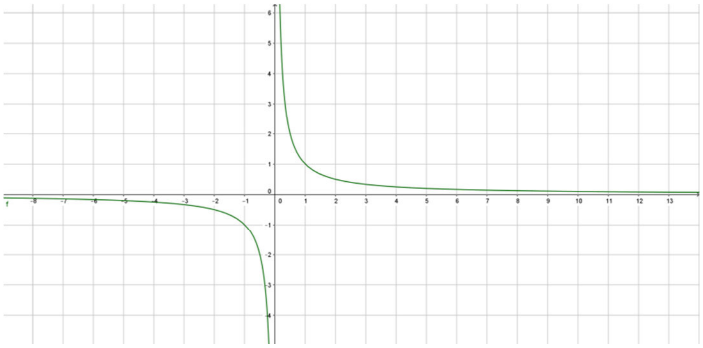
Dans le tableau de variation, les barres sous 0 indiquent que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

Représentation graphique de h

Le plan étant muni d'un repère (O ; I ; J), traçons la courbe représentative de h sur l'intervalle $[-3\,;\,\frac{-1}{3}[\cup]\frac{1}{3}\,;\,3]$.

Table des valeurs de x et $h(x)$:

x	-3	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	-1	-2	-3		3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



On obtient la représentation graphique de h :

La représentation graphique de h ainsi obtenue est appelée une hyperbole notée *(h)*. Elle est constituée de deux branches disjointes.

Démontrons que O est un centre de symétrie de l'hyperbole *(h)* :

x étant un réel non nul, désignons par $M(x ; \frac{1}{x})$ le point de la parabole *(h)* d'abscisse x.

Son symétrique par rapport à O est le point $M'(-x ; \frac{-1}{x})$.

M' est un point de l'hyperbole (h) car $-\frac{1}{x} = \frac{1}{-x}$.

Ainsi, tout point M de *(h)* admet pour symétrique par rapport à O un point M' de *(h)*.

On dit que *(h)* est une hyperbole de centre O.

SEQUENCE 5

Fonction cube

Objectif

Etudier et représenter graphiquement la fonction cube

Etude de $k(x) = x^3$

Etudions la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^3$.

Variations de la fonction cube $k(x) = x^3$.

Ensemble de définition

$k(x) = x^3$ est définie pour tout x réel.

On note $D_f = \mathbb{R}$

Sens de variation

x et y étant deux nombres réels tels que $x < y$, on veut comparer $k(x)$ *et* $f(y)$ c'est-à-dire x^3 *et* y^3.

On sait que pour $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Or

Tableau de variation $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4}$.

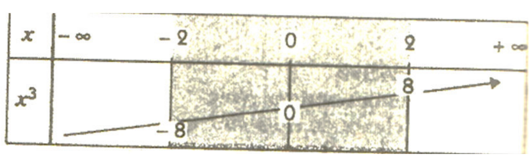
Comme somme de deux carrés, $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$.

Le signe de $x^3 - y^3$ dépend donc du signe de $x - y$ car $x^2 + xy + y^2 > 0$.

Et pour $x < y$, $x - y < 0$ c'est-à-dire $x^3 - y^3 < 0$.

On conclut que pour les nombres réels x *et* y tels que $x < y$, $k(x) < k(y)$.

La fonction cube $k(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



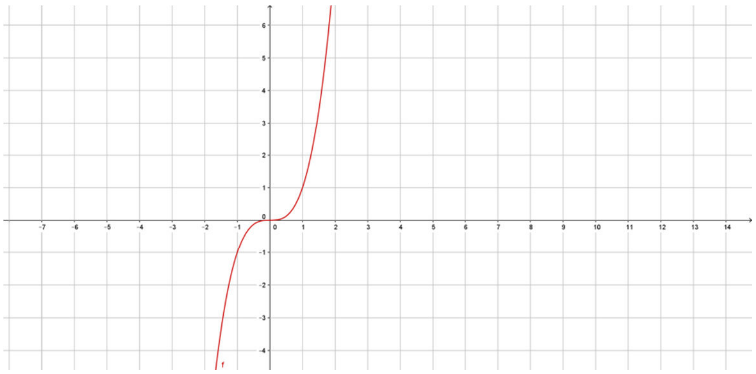
Représentation graphique de ***k***

Le plan étant muni d'un repère (O ; I ; J), traçons la courbe représentative de f sur l'intervalle [– 2 ; 2].

Table des valeurs de x et $k(x)$:

x	–2	–1	0	1	2
x^3	–8	–1	0	1	8

Représentation graphique de k :



Démontrons que O est un centre de symétrie à la représentation graphique de k :

x étant un réel, désignons par M$(x\,;x^3)$ le point de la représentation graphique de k d'abscisse x. Son symétrique par rapport à O est le point M'$(-x\,;-x^3)$. M' est un point de la représentation graphique de k car $-x^3 = (-x)^3$.

SEQUENCE 6

Utilisation des fonctions de référence

Objectif

Utiliser les fonctions de référence pour comparer des nombres

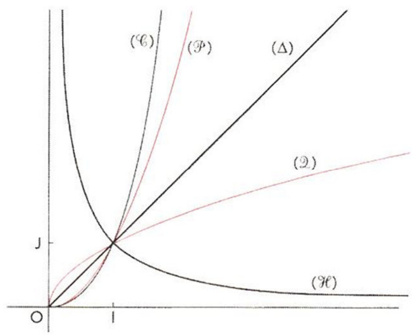
Comparaison des nombres réels $a\,; \boldsymbol{a^2};\ \boldsymbol{a^3};\ \sqrt{\boldsymbol{a}}\,; \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}$ $(\boldsymbol{a} > \mathbf{0})$

En utilisant les représentations graphiques des fonctions de référence, on peut comparer un nombre réel a strictement positif à :

- son carré : a^2;
- cube : a^3;
- sa racine carrée : $\sqrt{a}$ *et*
- son inverse : $\frac{1}{a}$.

Construisons dans un plan muni d'un même repère orthogonal (O ; I ; J), les courbes représentatives des fonctions :

$y = x\,;\, y = x^2;\ y = x^3;\ y = \sqrt{x}\,;\, y = \frac{1}{x}\ (x > 0).$



Les positions relatives de ces courbes permettent de retrouver et d'illustrer les propriétés suivantes :

Propriétés

Pour tout nombre réel a strictement positif :

1) *si* $0 < a < 1,\ a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$.
2) *si* $a > 1,\ \frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$.

SEQUENCE 7

Etude de la fonction $x \longmapsto ax^2$

Objectif

Etudier la fonction $f(x) = ax^2$

Etude de la fonction $f(x) = ax^2$

Pour tout nombre réel non nul a, étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^2$.

Variations de $f(x) = ax^2$.

Ensemble de définition

$f(x) = ax^2$ est définie pour tout x réel.

On note $D_f = \mathbb{R}$

Sens de variation

x et y étant deux nombres réels tels que $x < y$, on veut comparer $f(x)$ et $f(y)$ c'est-à-dire ax^2 et ay^2.

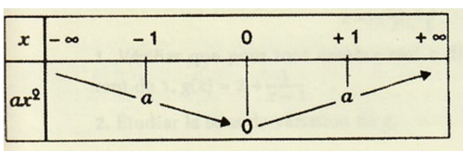
On sait que si $x < y \leq 0$ alors, $x^2 > y^2$ et si $0 \leq x < y$ alors $x^2 < y^2$.

Ainsi , pour $a > 0$:

si $x < y \leq 0$, $x^2 > y^2$ c'est à dire $ax^2 > ay^2$;

si $0 \leq x < y$, $x^2 < y^2$ c'est-à-dire $ax^2 < ay^2$.

Tableau de variation de f dans le cas où $a > 0$

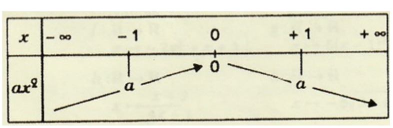


Et pour $a < 0$:

si $x < y \leq 0$, $x^2 > y^2$ c'est à dire $ax^2 < ay^2$;

si $0 \leq x < y$, $x^2 < y^2$ c'est-à-dire $ax^2 > ay^2$.

Tableau de variation de f dans le cas où $a < 0$



SEQUENCE 8

Représenter la fonction : $x \longmapsto ax^2$

Objectif

Représenter la fonction $f(x) = ax^2$

Représentation graphique de f

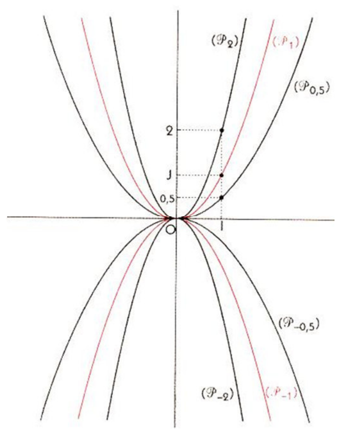
Le plan étant muni d'un repère (O ; I ; J), traçons la représentation graphique de f pour

$a = -2$; $a = -1$; $a = \frac{-1}{2}$; $a = \frac{1}{2}$; $a = 1$ et $a = 2$.

Table des valeurs de x et $f(x)$ pour ces différentes valeurs de a :

x	0	1	2	3	4
$-2x^2$	0	-2	-8	-18	-32
$-x^2$	0	-1	-4	-9	-16
$\frac{-1}{2}x^2$	0	$\frac{-1}{2}$	-2	$\frac{-9}{2}$	-8
$\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8
x^2	0	1	4	9	16
$2x^2$	0	2	8	18	32

On obtient les représentations graphiques suivantes pour les différentes valeurs de a.



Démontrons que (OJ) est un axe de symétrie à la parabole (P_a) représentative de la fonction $f(x) = ax^2$:

x étant un réel, désignons par M(x ; ax^2) le point de la parabole (Pa) d'abscisse x. Son symétrique par rapport à (OJ) est le point M'$(-x\,;\,a\times(-x)^2)$. M' est sur la parabole (P_a) car $a\times(-x)^2 = ax^2$.

Ainsi, tout point M de (P_a) admet pour symétrique par rapport à (OJ) un point M' de (P_a).

On dit que (P_a) est une parabole de sommet O et d'axe (OJ).

Démontrons aussi que (OI) est un axe de symétrie aux paraboles (P_a) et (P_{-a}) représentatives de f_a et f_{-a}.

x étant un réel, désignons par M(x ; ax^2) le point de la parabole (P_a) d'abscisse x. Son symétrique par rapport à (OI) est le point M'(x ; $-ax^2$). M' est sur la parabole (P_{-a}) car $-a\times(x)^2 = -ax^2$.

Ainsi, tout point M de (P_a) admet pour symétrique par rapport à (OI) un point M' de (P_{-a}).

On dit que les paraboles (P_a) et (P_{-a}) sont symétriques par rapport à (OI).

SEQUENCE 9

Etude de la fonction $x \longmapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

Objectif

Etudier la fonction $h(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

Etude de la fonction $h(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

Etudions la fonction carrée h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

Variations de $h(x) = \frac{a}{x}$

Ensemble de définition

$h(x) = \frac{a}{x}$ est définie pour tout x réel non nul.

On note $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$.

Sens de variation

x et y étant deux nombres réels non nuls tels que $x < y$, on veut comparer $h(x)$ et $h(y)$ c'est-à-dire $\frac{a}{x}$ et $\frac{a}{y}$.

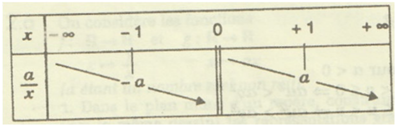
On sait que si $x < y < 0$ alors, $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ et si $0 \leq x < y$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Ainsi, pour $a > 0$:

si $x < y < 0$, $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ c'est-à-dire $\frac{a}{x} > \frac{a}{y}$;

si $0 < x < y$, $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ c'est-à-dire $\frac{a}{x} > \frac{a}{y}$.

Tableau de variation de f dans le cas où $a > 0$

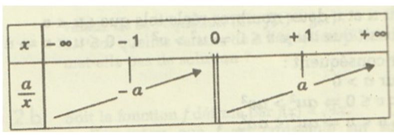


Et pour $a < 0$:

$si\ x < y \leq 0, \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ $c'est\ à\ dire \frac{a}{x} < \frac{a}{y}$;

$si\ 0 \leq x < y, \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ $c'est\text{-}à\text{-}dire \frac{a}{x} < \frac{a}{y}$.

Tableau de variation de f dans le cas où $a < 0$



SEQUENCE 10

Etude de la fonction $x \longmapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

Objectif

Représenter la fonction $h(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

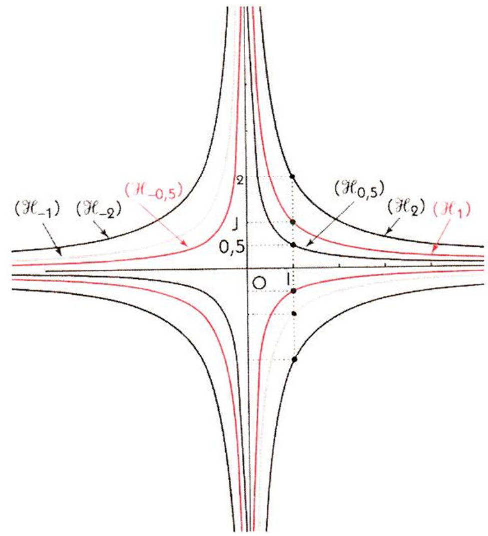
Représentation graphique de h

Table des valeurs de x et $h(x)$ pour $a = -2$; $a = -1$; $a = \frac{-1}{2}$; $a = \frac{1}{2}$;

$a = 1$ et $a = 2$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\frac{-2}{x}$	-8	-6	-4	-2	-1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{2}$
$\frac{-1}{x}$	-4	-3	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{4}$
$\frac{-1}{2x}$	-2	$\frac{-3}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{8}$
$\frac{1}{2x}$	2	$\frac{-3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{x}$	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{x}$	8	6	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

On obtient les représentations graphiques suivantes pour les différentes valeurs de *a*.



Démontrons que O est un centre de symétrie de l'hyperbole (H_a) :

x étant un réel non nul, désignons par M$(x ; \frac{a}{x})$ le point de (H_a) d'abscisse x. Son symétrique par rapport à O est le point M'$(-x ; \frac{a}{-x})$.

M' est un point de l'hyperbole (H_a)car $-\frac{a}{x} = \frac{a}{-x}$.

Ainsi, tout point M de (H_a) admet pour symétrique par rapport à O un point M' de (H_a).

On dit que les courbes (H_a) sont des hyperboles de centre O.

Démontrons aussi que (OI) est un axe de symétrie aux hyperboles (H_a)et (H_{-a}) représentatives de h_a et h_{-a}.

x étant un réel, désignons par M$(x ; \frac{a}{x})$ le point de l'hyperbole (H_a) d'abscisse x. Son symétrique par rapport à (OI) est le point M'$(x ; -\frac{a}{x})$. M' est sur l'hyperbole (H_{-a}) car

$$-\frac{a}{x} = \frac{a}{-x}.$$

Ainsi, tout point M de (H_a) admet pour symétrique par rapport à (OI) un point M' de (H_{-a}).

On dit que les hyperboles (H_a) et (H_{-a}) sont symétriques par rapport à (OI).

Leçon de la compétence de base 2 du troisième trimestre

Leçon : organisation des données

SEQUENCE 11

Organisation des données statistiques : Définition d'une population, d'un échantillon, d'un individu et d'un effectif total

Objectif

Définir une population, un échantillon, un individu et un effectif total

Population

Définition

C'est l'ensemble de référence, c'est-à-dire l'ensemble des unités ou d'individus sur lequel on effectue une étude statistique.

Exemples de populations

1) Les véhicules automobiles immatriculés au Tchad
2) Les salariés d'une entreprise.
3) Les habitants d'une ville.

Remarque

La définition de la population est importante, car elle conditionne l'homogénéité des unités observées et la fiabilité des résultats.

Echantillon

Définition

C'est un ensemble d'individus prélevés dans une population.

Exemples d'échantillons

1) Les véhicules automobiles immatriculés à N'Djamena.
2) Les habitants d'un quartier d'une ville.

Individu ou unité statistique

Définition : *Un individu ou une unité statistique est un élément de la population étudiée.*

Exemples d'individu ou d'unité statistique

1) Un véhicule automobile immatriculé à N'Djamena.
2) Un salarié d'une entreprise.

Effectif total

C'est le nombre total d'individus ou d'unités statistiques observés. On le note n.

SEQUENCE 12

Organisation des données statistiques : Définition d'un caractère statistique, d'un caractère quantitatif, d'un caractère qualitatif

Objectif

Définir un caractère statistique, un caractère quantitatif, un caractère qualitatif

Caractère statistique

C'est l'aspect particulier de l'individu ou de l'unité statistique auquel on s'intéresse. Il peut être quantitatif (mesurable) ou qualitatif (repérable sans être mesurable).

Un caractère peut être discret ou continu.

Caractère quantitatif

Un caractère est quantitatif s'il est mesurable.

Il est :

- *discret si les valeurs numériques observées sont isolées et en nombre fini ;*
- *continu s'il peut prendre toute valeur numérique d'un intervalle réel. On traite comme caractère continu tout caractère discret dont on a groupé les valeurs dans des classes (intervalles).*

Par convention, une classe est un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite, du type $[b_p ; b_{p+1}[$*. Elle est dite « bornée »si* $[b_i \neq -\infty$ *et* $b_{i+1} \neq +\infty[$.

L'effectif n_i *de la classe numéro* i *est le nombre d'individus dont le caractère prend une valeur supérieure ou égale* b_i*.*

Le centre d'une classe bornée est : $\frac{b_i + b_{i+1}}{2}$

Exemples de caractères quantitatifs

1) caractères quantitatifs discrets :
   - le nombre d'enfants d'une famille ;
   - le nombre de matchs d'un championnat.
2) Caractères quantitatifs continus :
   - l'âge des personnes vivant dans un quartier : [0, 1[; [1, 2[[2, 3[; [3, 4[; [4, 5[...
   - la taille en mètre des personnes d'une ville : [0, 1[; [1, 2[.

Caractère qualitatif

Un caractère est qualitatif s'il est lié à une observation ne faisant pas l'objet d'une mesure. Il peut être discret lorsque les valeurs qu'il prend sont en nombre fini.

Exemple

La population tchadienne peut être caractérisée par :

- le sexe (masculin ou féminin)
- l'état matrimonial (célibataire, marié, veuf, divorcé).

SEQUENCE 13

Organisation des données statistiques : Définition d'une modalité, de l'effectif d'une modalité, des effectifs cumulés croissants et décroissants

Objectif

Définir une modalité, l'effectif d'une modalité, les effectifs cumulés croissants et décroissants

Modalités

Ce sont les différentes situations (valeurs) possibles que peut prendre le caractère.

Exemples

- Pour le genre d'une personne, il y a deux modalités possibles : masculin ou féminin.

– Pour l'état matrimonial d'une personne, les modalités possibles sont : célibataire, marié, divorcé ou veuf.
– Pour le nombre d'enfants dans une famille, les modalités sont : 0, 1, 2, 3, 4, …

Effectif n_i d'une modalité

L'effectif n_i *de la modalité de numéro i est le nombre de fois où la modalité de numéro i est observée.*

Effectifs cumulés croissants

Lorsque le caractère étudié est quantitatif, on range les modalités ou les classes par valeurs croissantes. Soit C une classe correspondant à la valeur k du caractère.

La somme des effectifs des classes dont les valeurs sont inférieures ou égales à k est l'effectif cumulé croissant de la classe C.

Remarques

- ✓ On peut aussi déterminer les effectifs cumulés décroissants.
- ✓ On ne détermine les effectifs cumulés que dans le cas des caractères quantitatifs.
- ✓ Si le caractère étudié est quantitatif discret, l'effectif cumulé de la modalité k est simplement la somme des effectifs de modalités inférieures ou égales à k.
- ✓ On parlera des classes lorsque le caractère étudié est quantitatif continu.
- ✓ De manière pratique, on regroupe les modalités d'une série statistique, les effectifs relatifs aux différentes modalités et les effectifs cumulés dans un tableau appelé tableau numérique.

SEQUENCE 14

Exemple d'organisation des données statistiques

Objectif

Organiser les données d'une série statistique

Exemples

1) Les notes à un devoir de mathématiques pour une classe de 34 élèves sont les suivantes : 15 ; 13 ; 8 ; 9 ; 11 ; 5 ; 19 ; 3 ; 7 ; 15 ; 11 ; 7 ; 3 ; 4 ; 9 ; 7 ; 7 ; 9 ; 15 ; 14 ; 11 ; 7 ; 8 ; 5 ; 9 ; 10 ; 12 ; 8 ; 9 ; 11 ; 13 ; 11 ; 9 ; 8.

Dans un tableau, donnons les différentes modalités de cette série statistique, les effectifs correspondants ainsi que les effectifs cumulés croissants.

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	0	0	0	2	1	2	0	5	4	6	1	5	1	2	1	3	0	0	0	1	0
Effectifs cumulés	0	0	0	2	3	5	5	10	14	20	21	26	27	29	30	33	33	33	33	34	34

A la lecture de ce tableau, la dernière ligne (effectifs cumulés) indique que 20 élèves sur les 34 n'ont pas la moyenne à ce devoir.

2) Dix- neuf mesures successives d'une même longueur ont donné les résultats suivants exprimés en mètres : 927,3 ; 927,4 ; 926,9 ; 927,5 ; 926,9 ; 921,0 ; 927,4 ; 928,0 ; 928,1 ; 927,9 ; 927,4 ; 930,4 ; 929,0 ; 928,4 ; 925,0 ; 926,3 ; 927,3 ; 927,4 ; 927,3.
Envisageons d'organiser cette série statistique en classes (intervalles semi - ouverts) d'amplitude égale à 1mètre.

Dans un tableau, donnons les différentes classes, les effectifs correspondants ainsi que les effectifs cumulés croissants.

classes	effectifs	Effectifs cumulés
[921 ; 922[	1	1
[922 ; 923[	0	1
[923 ; 924[	0	1
[924 ; 925[	0	1
[925 ; 926[	1	2
[926 ; 927[	3	5
[927 ; 928[	9	14
[928 ; 929[	3	17
[929 ; 930[	1	18
[930 ; 931[	1	19

SEQUENCE 15

Fréquence d'une modalité et tableau des effectifs et des fréquences

Objectif

Présenter dans un tableau les effectifs et les fréquences des modalités

Fréquence f_i d'une modalité

La fréquence f_i de la modalité de numéro i est le quotient de l'effectif n_i de cette modalité par l'effectif total n.

$f_i = \frac{n_i}{n}$.

Présentation du tableau des effectifs et des fréquences

Modalité numéro i	Effectifs n_i	Fréquences f_i
1 . . . r	n_1 . . . n_r	f_1 . . . f_r

Remarque

Les fréquences peuvent être exprimées dans un tableau, en pourcentage.

Exemple

Les notes à un devoir de mathématiques pour une classe de 34 élèves sont les suivantes :

15 ; 13 ; 8 ; 9 ; 11 ; 5 ; 19 ; 3 ; 7 ; 15 ; 11 ; 7 ; 3 ; 4 ; 9 ; 7 ; 7 ; 9 ; 15 ; 14 ; 11 ; 7 ; 8 ; 5 ; 9 ; 10 ; 12 ; 8 ; 9 ; 11 ; 13 ; 11 ; 9 ; 8.

Déterminons la fréquence de la note (modalité) 8.

$f_8 = \frac{4}{34} = \frac{2}{17} = 11\%$.

Fréquence cumulée croissante

C'est la somme des fréquences associées aux valeurs du caractère inférieures (strictement) à x : $\sum f_i$ $(i < x)$.

SEQUENCE 16

Exemples de calcul des fréquences

Objectif

A partir de quelques exemples, calculer les fréquences des modalités.

Exemples

1) On choisit au hasard 50 élèves d'un lycée lors d'une enquête portant sur leur âge.

   On obtient les résultats suivants :

Modalités (âge en années)	12	14	15	16	17
Effectifs	1	5	19	17	8

Calculons les fréquences de chaque modalité en pourcentage.

Fréquence de la modalité 12 : $f_{12} = \frac{1}{50} \times 100 = 2\%$

Fréquence de la modalité 14 : $f_{14} = \frac{5}{50} \times 100 = 10\%$

Fréquence de la modalité 15 : $f_{15} = \frac{19}{50} \times 100 = 38\%$

Fréquence de la modalité 16 : $f_{16} = \frac{17}{50} \times 100 = 34\%$

Fréquence de la modalité 17 : $f_{17} = \frac{8}{50} \times 100 = 16\%$

Dans un tableau, on résume :

Modalités	12	14	15	16	17
Effectifs	1	5	19	17	8
Effectifs cumulés	1	6	25	42	50
Fréquences	2%	10%	38%	34%	16%
Fréquences cumulées	2%	12%	50%	84%	100%

2) Tableau associé au caractère quantitatif discret

Valeurs observées x_i	Effectifs n_i	Fréquence f_i	Fréquences cumulées croissantes f_i
x_1	n_1	f_1	f_1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
xp	np	fp	100%

3) Tableau associé au caractère quantitatif continu

Classe numéro i $[b_i ; b_{i+1}[$	Centre x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Fréquences cumulées croissantes
$[b_1 ; b_2[$	x_1	n_1	f_1	f_1
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$[b_p ; b_{p+1}[$	x_p	n_p	f_p	100%

Remarque

La fréquence cumulée est égale au quotient de l'effectif cumulé par l'effectif total.

Fréquence cumulée $= \frac{effectif\ cumulé\ (Ec)}{effectif\ total\ (Et)} \times 100$

Leçon : Graphique

SEQUENCE 17

Représentation graphique d'une série statistique : diagramme à bandes

Objectif

Représenter une série statistique par un diagramme à bandes

Introduction

Les représentations graphiques des caractères statistiques (qualitatifs et quantitatifs) sont nombreuses et sont fonction des différentes modalités de ces caractères.

Nous n'étudierons dans cette leçon que quelques-unes de ces représentations.

Diagramme à bandes

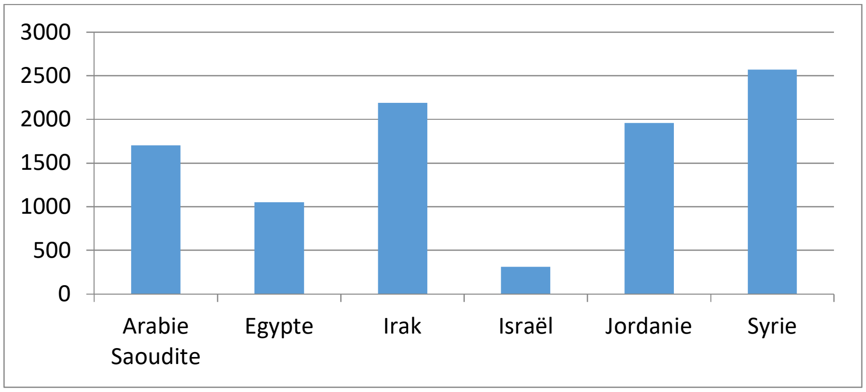
NB : On utilise les diagrammes à bandes pour représenter les séries statistiques à caractère qualitatif.

On place sur une droite horizontale les modalités du caractère. On porte sur un axe vertical les effectifs ou les fréquences et on trace une bande verticale proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence associée à chaque modalité.

Exemple

Dans les pays du Proche-Orient, le nombre d'habitants par médecin est :

Arabie Saoudite	1700
Egypte	1050
Irak	2190
Israël	310
Jordanie	1960
Syrie	2570



Le caractère étant qualitatif, on peut utiliser un diagramme à bande pour représenter cette série statistique. En effet, ce type de diagramme permet une comparaison des effectifs associés à chaque modalité.

SEQUENCE 18

Représentation graphique d'une série statistique : histogramme

Objectif

Représenter une série statistique par un histogramme

Histogramme

NB : On utilise l'histogramme pour représenter une série statistique à caractère qualitatif ou à caractère quantitatif regroupé en classes.

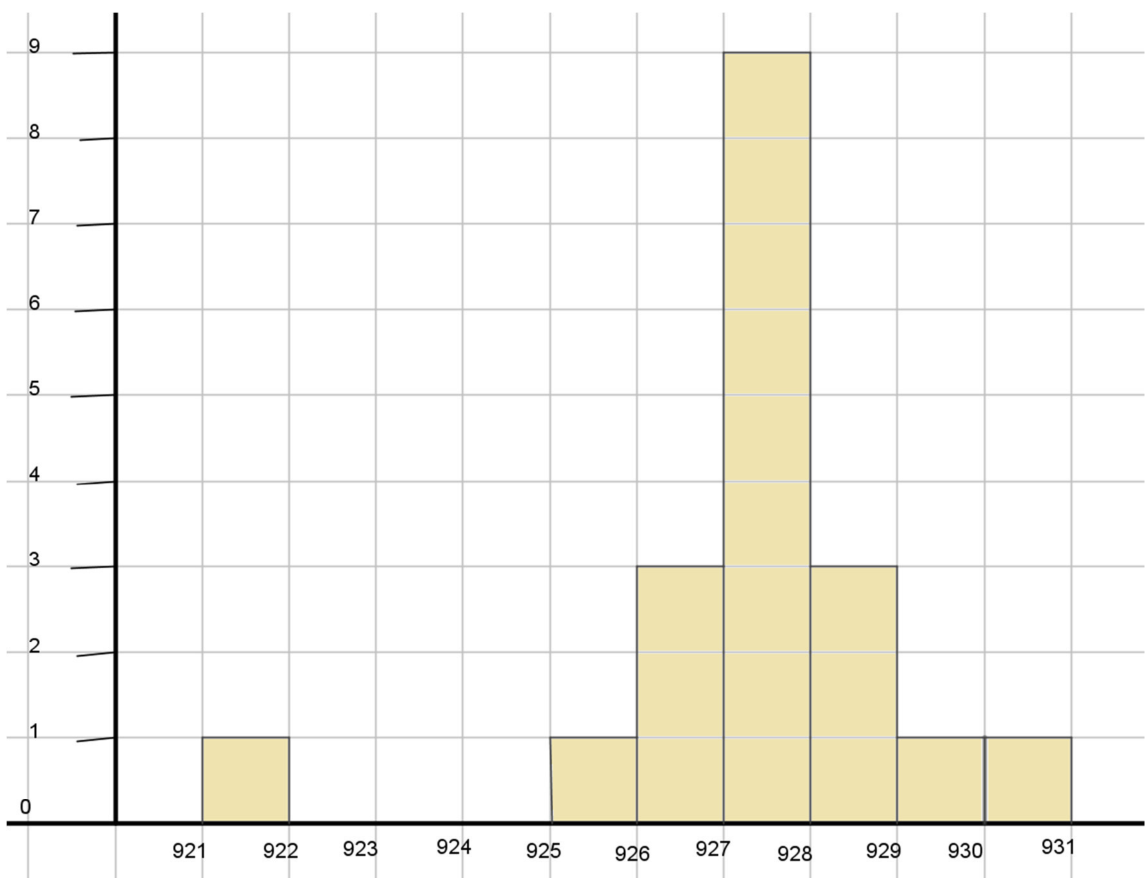
Un histogramme est un ensemble de rectangles contigus. Chaque rectangle est associé à une modalité (caractère qualitatif) ou à une classe (caractère quantitatif continu) et a une surface proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence de cette modalité ou de cette classe.

Exemple

Dix - neuf mesures successives d'une même longueur ont donné les résultats suivants (exprimées en mètres) : 927,3 ; 927,4 ; 926,9 ; 927,5 ; 926,9 ; 921,0 ; 927,4 ; 928,0 ; 928,1 ; 927,9 ; 927,4 ; 930,4 ; 929,0 ; 928,4 ; 925,0 ; 926,3 ; 927,3 ; 927,4 ; 927,3.
Envisageons des classes semi – ouvertes à droite, d'amplitude 1 mètre pour établir le tableau des effectifs correspondant à cette série statistique :

Classes	Effectifs	Effectifs cumulés
[921 ; 922[	1	1
[922 ; 923[	0	1
[923 ; 924[	0	1
[924 ; 925[	0	1
[925 ; 926[	1	2
[926 ; 927[	3	5
[927 ; 928[	9	14
[928 ; 929[	3	17
[929 ; 930[	1	18
[930 ; 931[	1	19

Construisons l'histogramme correspondant.



SEQUENCE 19

Représentation graphique d'une série statistique : diagramme à secteurs

Objectif

Représenter une série statistique par un diagramme à secteurs

Diagramme à secteurs

On utilise le diagramme à secteurs pour représenter n'importe quelle série statistique pourvu que le nombre de modalités ne soit pas trop élevé.

L'effectif total est représenté par un disque (ou un demi-disque).

Chaque modalité est représentée par un secteur circulaire dont la surface est proportionnelle à l'effectif correspondant.

Remarque

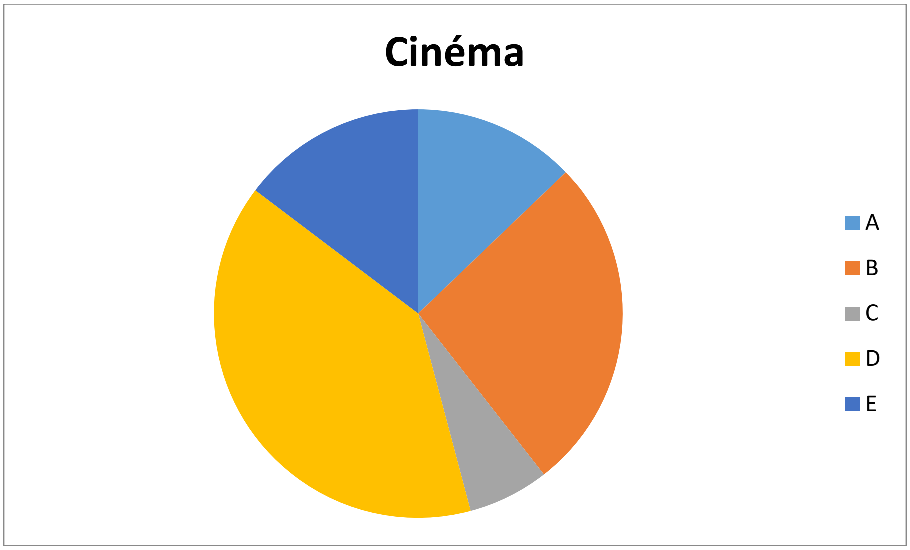
En fait, la surface d'un secteur circulaire étant proportionnelle à l'angle au centre, seule la valeur de celui-ci est calculée.

Exemple

On considère cinq populations notées : A, B, C, D, E. On répartit les individus en fonction de leur préférence en matière de cinéma. On obtient :

Population	Cinéma
A	140
B	290
C	70
D	430
E	160

Représentons sur un diagramme circulaire les cinq populations.



SEQUENCE 20

Représentation graphique d'une série statistique : diagramme à bâtons

Objectif

Représenter une série statistique par un diagramme à bâtons

Diagramme à bâtons

On utilise le diagramme à bâtons pour représenter une série statistique à caractère qualitatif ou quantitatif.

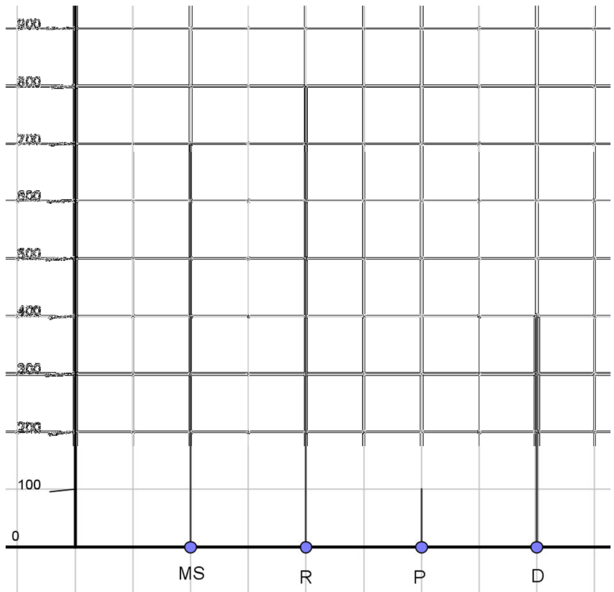
On porte sur l'axe des abscisses les différentes modalités du caractère qualitatif ou les valeurs discrètes du caractère quantitatif et sur l'axe des ordonnées les effectifs (ou fréquences) associés au caractère. On trace des bâtons verticaux dont la longueur est proportionnelle aux effectifs (ou fréquences).

Exemple

La bibliothèque du lycée Félix Eboué contient dans ses rayons 2000 livres ainsi répertoriés :

Genre de l'ouvrage	Manuel scolaire	roman	poésie	document
Effectif	700	800	100	400

Construisons le diagramme en bâtons correspondant à cette série statistique.



SEQUENCE 21

Représentation graphique d'une série statistique : diagramme cumulatif

Objectif

Représenter une série statistique par un diagramme cumulatif

Diagramme cumulatif

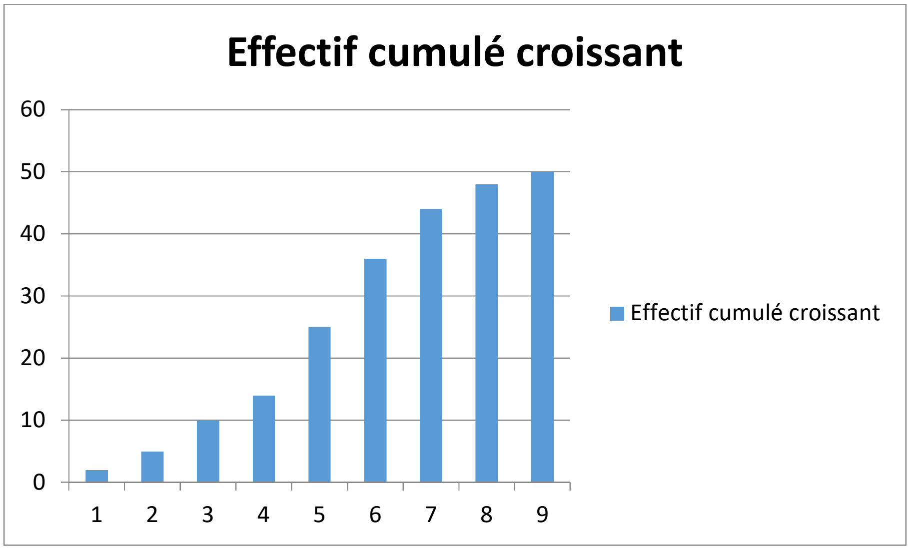
Les effectifs ou fréquences cumulés croissants peuvent être représentés par un diagramme cumulatif.

Exemple

Une enquête portant sur le nombre d'enfants dans chacun des 50 foyers du village de Bodo a donné les résultats suivants :

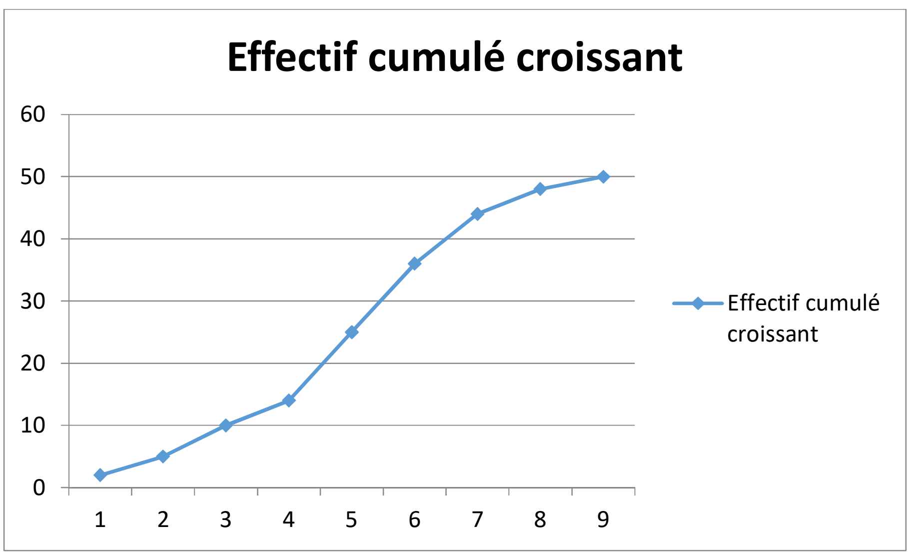
Nombre d'enfant(s)	0	2	3	4	5	6	7	9	10
Effectif	2	3	5	4	11	11	8	4	2
Effectif cumulé croissant	2	5	10	14	25	36	44	48	50
Fréquence cumulée croissante	4%	10%	20%	28%	50%	72%	88%	96%	100%

Construisons le diagramme cumulatif correspondant à cette série statistique



Construisons ensuite la courbe des effectifs cumulés croissants.

On placera, à cet effet, dans un repère orthogonal les points suivants qu'on joindra par des segments de droite : (0 ; 2), (2 ; 5) , (3 ; 10), ..., (10 ; 50).



Leçon : Caractéristiques de position et de dispersion
SEQUENCE 22

Caractéristiques de position

Objectifs

- Déterminer le mode d'une série statistique ;
- Calculer la médiane et la moyenne d'une série statistique.

Introduction

Les paramètres de positions, mode, médiane et moyenne (ou valeurs centrales) sont des valeurs numériques qui « résument » une série statistique en caractérisant l'ordre de grandeur des observations. Ils s'expriment dans la même unité que les observations.

Le mode

Le mode, noté M_O, est la modalité qui admet la plus grande fréquence :

$f(M_O) = Max(f_i)$, $i \in [1 ; n]$.

Il est donc parfaitement défini pour un caractère qualitatif ou un caractère quantitatif discret.

Pour un caractère quantitatif continu, nous parlerons de classe modale. C'est la classe dont la densité de fréquence est maximum.

La médiane

La médiane M_e est telle que l'effectif des observations dont les modalités sont inférieures à M_e est égal à l'effectif des observations dont les modalités sont supérieures à M_e.

Cette définition n'a de sens que si les modalités sont toutes ordonnées.

Dans le cas d'un caractère qualitatif, il est parfois possible de choisir un ordre.

Exemple

Niveau d'études scolaires :

École primaire $<$ 1er cycle $<$ CAP $<$ BEF $<$ Bac $<$ BTS $<$ DEUG $<$ …

La moyenne

La moyenne arithmétique d'une série statistique $\{x_i, n_i\}$, $i = 1 \dots p$ *est le nombre noté* $\overline{x}$ *ainsi définie :*

$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i xi}{N}$ *où* $\sum_{i=1}^{p} n_i = N$

Dans le cas d'un tableau de distribution, on a : $\overline{x} = \frac{\sum_{i}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{P} ni} = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$

Où $x_1, \dots, x_P$ *sont les valeurs observées (ou les centres des classes si la distribution est regroupée) ;*

$n_{1,} \dots, n_P$ *les effectifs correspondants et*

$f_i, \dots,\ f_P$ *les fréquences correspondantes.*

SEQUENCE 23

Exemple de détermination des caractéristiques de position dans le cas d'un caractère quantitatif discret

Objectifs

A partir d'un exemple, déterminer les caractéristiques de position dans le cas d'un caractère quantitatif discret

Exemple

Chacun des huit épreuves étant notées sur 10, un candidat a obtenu les notes suivantes : 3 ; 5 ; 8 ; 10 ; 7 ; 1 ; 9 ; 9.

Calculons la note moyenne de ce candidat.

La moyenne correspondant à la moyenne arithmétique, chaque note ayant un coefficient égal à 1, on peut écrire :

$$\overline{x} = \frac{\sum xi}{8} = \frac{3+8+5+10+7+1+9+9}{8} = \frac{52}{8} = 6{,}5$$

La note moyenne est donc 6,5.

Remarque

Pour un caractère quantitatif, il est naturel de chercher la valeur moyenne des modalités.

Désignons une série statistique par :

Modalité	x_1	x_2	………	x_k
Effectif	n_1	n_2	……..	n_k

La moyenne de la série est :

$\bar{x} = \frac{1}{N}(n_1x_1 + n_2x_2 \; + \ldots + n_kx_k)$ où N est l'effectif de la population

$(N = n_1 + n_2 + \; \ldots + n_k)$.

SEQUENCE 24

Exemple de détermination des caractéristiques de position dans le cas d'un caractère quantitatif discret regroupé en classes

Objectifs

A partir d'un exemple, déterminer les caractéristiques de position dans le cas d'un caractère quantitatif discret regroupé en classes

Exemple

Dans une entreprise, la répartition des individus par âge et par sexe est consignée dans le tableau suivant :

Age (ans)	hommes	femmes
[20; 25[	29	38
[25; 30[	47	57
[30; 35[	36	42
[35; 40[	45	39
[40; 45[	49	42
[45; 50[	32	30
[50; 55[	37	18
[55; 60[	28	20

a) Calcule la moyenne d'âge par sexe.

Le caractère âge étant regroupé en classes, il faut calculer la moyenne en utilisant comme valeur x_i le centre de chaque classe d'âge.

Classes	x_i	n_{i1}	$n_{i1}x_i$	n_{i2}	$n_{i2}x_i$	$n_{i1} + n_{i2}$	$(n_{i1} + n_{i2}) \times x_i$
[20; 25[	22,5	29	652,5	38	855	67	1507,5
[25; 30[	27,5,	48	1320	57	1567,5	105	2887,5
[30; 35[	32,5	36	1170	42	1365	78	25335
[35; 40[	37,5	45	1687,5	39	1462,5	84	3150
[40; 45[	42,5	49	2082,5	41	1742,5	90	3825
[45; 50[	47,5	32	1520	30	1425	62	2945
[50; 55[	52,5	37	1942	18	945	55	2887,5
[55; 60[	57,5	28	1610	20	1150	48	2670
Total		304	11985	285	10512,5	589	22497,5

Le tableau ci-dessous est découpé en trois parties :

- population masculine
- population féminine
- population totale.

Les n_{i1} correspondent aux effectifs masculins

Les n_{i2} correspondent aux effectifs féminins

Les $n_{i1} + n_{i2}$ correspondent à l'effectif total (masculin et féminin).

On obtient les moyennes suivantes :

Moyenne d'âge pour les hommes

$\bar{x}_1 = \frac{\sum n_{i1} \times x_i}{\sum n_i} = \frac{11985}{304} \approx 39{,}42$ ans

Moyenne d'âge pour les femmes

$\bar{x}_2 = \frac{\sum n_{i2} \times x_i}{\sum n_i} = \frac{10512{,}5}{285} \approx 36{,}89$ ans

Moyenne d'âge de la population totale :

$\bar{x} = \frac{22497{,}5}{589} \approx 38{,}20$ ans

Remarque

On pouvait calculer $\bar{x}$ en utilisant les résultats intermédiaires $\bar{x}_1$et $\bar{x}_2$ et en pondérant par les effectifs par sexe (ce qui évite la partie droite du tableau).

$$\bar{x}=\frac{x_i \sum n_{i1}+x_i \sum n_{i2}}{\sum n_{i1}+\sum n_{i2}}=\frac{\sum n_{i1}\times x_i}{\sum n_i}+\frac{\sum n_{i2}\times x_i}{\sum n_i}$$

$$=\frac{39{,}42\ x\ 304+36{,}89\ x\ 285}{304+285}\approx 38{,}20.$$

Ou encore

$$\bar{x}=\frac{\sum n_{i1}x_i+\sum n_{i2}\ x_i}{\sum n_{i1}+\sum n_{i2}}=\frac{11985+10512{,}5}{304+285}\approx 38{,}20.$$

SEQUENCE 25

Caractéristiques de dispersion

Objectif

Calculer la variance, l'écart-type et la covariance d'une série statistique.

Variance

La variance d'une série statistique $\{x_i, n_i\}$, $i = 1 \ldots p$ *de moyenne* $\bar{x}$ *est le nombre réel noté V défini par :*

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + n_3(x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + n_p\left(x_p - \bar{x}\right)^2}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_p}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

Ecart-type

L'écart – type d'une série statistique $\{x_i, n_i\}$, $i = 1 \ldots p$ *est le nombre réel positif noté* δ *défini par :* $\delta = \sqrt{V}$

Coefficient de variation ou covariance

Le coefficient de variation est le rapport de l'écart-type à la moyenne : $CV = \frac{\delta}{\bar{x}}$

Exemple

On considère l'ensemble de nombre suivants : 12, 16, 18, 6, 10, 8, 15, 17, 13,15

On calcule d'abord la moyenne :

$$\bar{x} = \frac{(12+16+18+6+10+8+15+17+13+15)}{10} = \frac{130}{10} = 13$$

Puis la variance $V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10}(1 + 9 + 25 + 49 + 9 + 25 + 4 + 16 + 4)$

$$= \frac{142}{10}$$

$$V = 14{,}2$$

On en déduit l'écart – type $\delta = \sqrt{V}$

$$= \sqrt{14{,}2}$$

$$\delta = 3{,}77$$

Et la covariance

$$CV = \frac{\delta}{\bar{x}}$$

$$CV = \frac{3{,}77}{13}$$

$$CV = 0{,}29$$

Leçons de la compétence de base 3 du troisième trimestre

Leçon : Droites et cercles du plan

SEQUENCE 26

Droites dans le plan

Objectif

Définir une équation cartésienne d'une droite

Equation cartésienne d'une droite

Définition

On appelle équation cartésienne d'une droite, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ *où* a *et* c *sont tous non nuls.*

Exemple

Déterminons une équation cartésienne de la droite (L) passant par $A\binom{5}{6}$ et $B\binom{2}{-4}$.

$M\binom{x}{y} \in$ (L) signifie que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$.

Or $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{-10}$; $\overrightarrow{AM}\binom{x-5}{y-6}$.

$\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{AM}$ signifie $det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) = 0$

$det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & x-5 \\ -10 & y-6 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -3(y-6) + 10(x-5) = 0$ donc

(L) : $10x - 3y - 32 = 0$.

Définition

On appelle équation réduite d'une droite toute équation de la forme $y = mx + p, m \neq 0$.

Le réel m *est appelé coefficient directeur de la droite.*

Exemple

Dans l'exemple précédent, on peut écrire $y = \frac{10}{3}x - \frac{32}{3}$ qui est une équation réduite de (L) avec $m = \frac{10}{3}$.

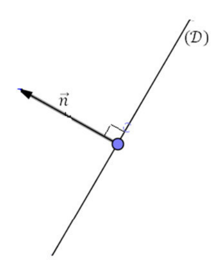
SEQUENCE 27

Vecteur directeur, vecteur normal d'une droite

Objectif

Définir un vecteur directeur et un vecteur normal d'une droite

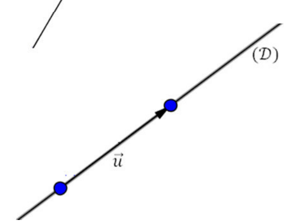
Définitions



Soit $(\mathcal{D})$ *une droite définie par son équation cartésienne*

$ax + by + c = 0$:

– *On appelle vecteur normal de* $(\mathcal{D})$, *tout vecteur ayant une direction orthogonale à celle de* $(\mathcal{D})$. *Il est de coordonnées* $\vec{n}(a; b)$.



– *On appelle vecteur directeur de* $(\mathcal{D})$, *tout vecteur de direction colinéaire à celle de* $(\mathcal{D})$. *Il est de coordonnées* $\vec{u}(-b; a)$

Remarque : Lorsque la droite est définie par une équation réduite de la forme $y = ax + b$, son vecteur normal a pour coordonnées $\vec{n}\binom{a}{-1} a \neq 0$ et son vecteur directeur est de

$\vec{u}\binom{1}{a}$, $a \neq 0$.

Propriétés

Soient $(\mathcal{D})$ *et* $(\mathcal{D}')$ *deux droites de vecteurs normaux respectifs* $\vec{n}$ *et* $\vec{n}'$ *et de vecteurs directeurs respectifs* $\vec{u}$ *et* $\vec{u}'$*:*

1) $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}' = 0 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{u}' = 0$.

2) $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{D}') \Leftrightarrow \vec{n}$ *colinéaire à* $\vec{n}' \Leftrightarrow \vec{u}$ *colinéaire* à $\vec{u}'$.

Exemple

Déterminons une équation cartésienne de la droite de $(\mathcal{D})$passant par A$\binom{-2}{5}$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}\binom{1}{-2}$.

1ère méthode

$(\mathcal{D})$ passe par A$\binom{-2}{5}$ et a pour vecteur normal $\vec{n}\binom{1}{-2}$.

$$\mathrm{M}(x; y) \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$

On a $\overrightarrow{AM}\binom{x+2}{y-5}$ et $\vec{n}\binom{1}{-2}$

$$\widehat{\mathrm{AM}}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow x + 2 - 2(y - 5) = 0$$

$$(\mathcal{D}): x - 2y + 12 = 0$$

Déduisons-en une équation réduite :

$$\boldsymbol{(\mathcal{D}): y = -\frac{1}{2}x + 6}$$

2ème méthode

Puisqu'on connait les coordonnées du vecteur normal de $(\mathcal{D})$, on peut d'ores et déjà écrire une équation de $(\mathcal{D})$ sous forme $x - 2y + c = 0$ où c est à déterminer.

$A \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow x_A - 2y_A + c = 0$

$$\Leftrightarrow c = 12$$

et on a :$(\mathcal{D})$: $x - 2y + 12 = 0$.

SEQUENCE 28

Représentation paramétrique d'une droite

Objectif

Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Propriété et définition

Soit un point $A\binom{x_A}{y_A}$ *, un vecteur* $\vec{u}\binom{x_0}{y_0}$ *et* $(\mathcal{D})$ *la droite passant par A et de vecteur directeur* $\vec{u}$*.*

La représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ *est de la forme :*

$$\begin{cases} x = x_A + tx_0 \\ y = y_A + ty_0 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Exemple

Une représentation paramétrique de la droite (L) de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-5}{8}$ passant par $B\binom{\sqrt{3}}{1}$ est

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} - 5t \\ y = 1 + 8t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Remarque : A chaque fois qu'on attribue une valeur à t, on trouve les coordonnées d'un point de (L).

Exercice

a) Détermine une équation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A\binom{-1}{3}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-5}{1}$

b) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à $(\mathcal{D})$:

A(4; 2) ; B(–1; 10) ; C(–3; 4) et E(9; 1) ?

SEQUENCE 29

Transformation d'équations

Objectifs

- Passer d'une représentation paramétrique d'une droite à son équation cartésienne ;
- Passer d'une équation cartésienne d'une droite à sa représentation paramétrique.

Passage d'une équation paramétrique à une équation cartésienne

Méthode

Une droite étant définie par une représentation paramétrique, pour trouver son équation cartésienne, on peut :

- ou bien résoudre le système en éliminant t puis on trouve une équation cartésienne
- ou bien trouver un point et un vecteur directeur de cette droite puis on détermine son équation cartésienne.

Exercice

Soient (L) et (L') deux droites d'équation respectives.

(L) $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$; (L') $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

On veut étudier l'intersection de (L) et (L').

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs directeurs respectifs de (L) et (L').

- Ces deux droites sont-elles sécantes ?
- Justifie ta réponse
- Vérifie qu'il existe deux réels a et b tels que :
  $\begin{cases} x = -3 + 2a \\ y = 2 - a \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2b \\ y = -1 + b \end{cases}$
- les réels a et b étant trouvés, détermine les coordonnées de I, intersection de (L) et (L').
- Détermine une équation cartésienne de (L)
- Comme (L) et (L') sont sécantes en I, I appartient à (L'), détermine t en utilisant la dernière condition puis détermine les coordonnées de I.

Passage d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique

Méthode

Une droite étant donnée par son équation cartésienne, pour trouver son équation paramétrique, il suffit de déterminer les coordonnées de l'un de ses points et de l'un de ses vecteurs directeurs.

SEQUENCE 30

Construction de droites

Objectif

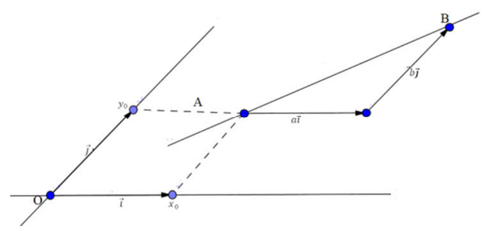
Construire une droite

Méthode de construction de droites

Soit $(\mathcal{D})$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{a}{b}$et passant par le point A$\binom{x_0}{y_0}$.

Pour tracer $(\mathcal{D})$, on place le point A, on place un point B tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.

$(\mathcal{D})$ est alors la droite (AB).



Exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\vec{o},\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Dans chacun des cas suivants, trace la droite $(\mathcal{D})$.

a) $(\mathcal{D})$ est dirigée par $\vec{u}\binom{2}{1}$ et passe par le point $A\binom{-2}{3}$

b) $(\mathcal{D})$ passe par le point$B\binom{0}{4}$ et parallèle à la droite $(\mathcal{D}')$de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 4 + t \end{cases}(t \in \mathbb{R})$.

SEQUENCE 31

Distance d'un point à une droite

Objectif

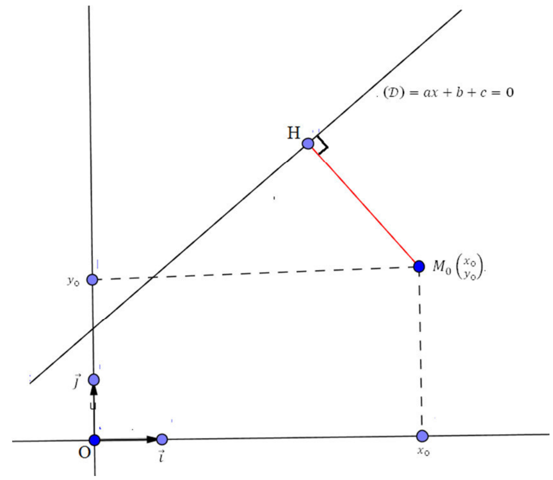
Calculer la distance d'un point à une droite

Définition

Dans un repère orthonormal, soient $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *et* $(\mathcal{D})$ *la droite d'équation :* $ax + by + c = 0$

On appelle distance du point M_0 *à la droite* $(\mathcal{D})$ *le nombre positif* $d(M_0, \mathcal{D})$ *défini par :*

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



C'est la distance M_0H *où H est le projeté orthogonal de* M_0 *sur* $(\mathcal{D})$*.*

Exemple

Soient $A\binom{3}{-2}$ et $(\mathcal{D}) : 2x - y + 4 = 0$.

La distance de A à $(\mathcal{D})$ est :

$$d(A, (\mathcal{D})) = \frac{|2 \times 3 - 1 \times (-2) + 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Exercice

Soit (L) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

a) Montre que le point $A(1; -\sqrt{5})$ n'appartient pas à (L).

b) Calcule la distance $d(\mathrm{A}, \mathrm{L})$.

Exercices d'entrainement de la compétence de Base 1 du troisième trimestre

Exercice 1

Après avoir indiqué leur ensemble de définition, étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 6x^2 - 3$
2) $f(x) = -x^3$
3) $f(x) = \sqrt{x+4}$
4) $f(x) = \frac{-3x}{x^2-1}$
5) $f(x) = \frac{2x^2}{x}$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la fonction numérique définie par $f(x) = (x+2)^2 - 1$.

1) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$ puis tracer sa représentation graphique (C).
2) Tracer le symétrique (C_1) de (C) par rapport au point O et trouver une équation de (C_1).
3) Tracer le symétrique) de (C) par rapport au point OI et trouver une équation de (C_2).
4) Tracer le symétrique (C_3) de (C) par rapport au point OJ et trouver une équation de (C_3).

Exercice 3

On donne la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{3x}{2x-4}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Trouver deux réel a *et* b tels que pour tout x de D_f, $f(x) = a + \frac{b}{2x-4}$.
3) Démontrer que 1 est un minorant de f sur l'intervalle [3 ; 7].
4) Démontrer que 3 est un majorant de f sur l'intervalle [–3 ; – 1].

Exercice 4

On donne la fonction numérique f définie par $f(x) = -x^2 + 1$.

1) Montrer que f est une fonction paire et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
2) En déduire que f admet un maximum pour $x = 0$ et tracer sa courbe représentative.

Exercice 5

Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$ puis tracer leur représentation graphique.

1) $f(x) = \frac{1}{x} - 4$
2) $f(x) = \frac{2}{3x} - 1$
3) $f(x) = \frac{3}{x} + 2$

Exercice 6

Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$
2) $f(x) = -2x^2 + x + 1$
3) $f(x) = 5(x-1)^3 + 2$
4) $f(x) = \sqrt{3x + 15}$

Exercices d'entrainement de la compétence de Base 2 du troisième trimestre

Exercice 1

Les ouvriers d'une entreprise sont répartis en fonction de leurs salaires dans le tableau suivant :

Salaires (en F)	Effectifs
[20,25[	28
[25,30[	59
[30,35[	47
[35,40[	24
[40,45[	12
Plus de 45	2

1) Quelle limite doit-on donner à la dernière classe si l'on veut que toutes les classes aient même amplitude ?

2) Calculer le centre de chaque classe.

3) Calculer les fréquences associées à chaque classe.

Quelle est la proportion d'ouvriers gagnant moins de 35 F à l'heure.

Exercice 2

Une enquête sur la taille de 50 personnes donne les résultats suivants en (cm) :

191	157	190	158	172	166	170	168	175	152
181	180	184	163	160	149	186	188	172	173
175	177	167	172	169	171	173	171	180	1989
166	164	178	170	173	168	167	169	180	181
167	169	190	160	168	166	162	170	182	183

1) Calculer les données (amplitude des classes 5 cm [145,150[; …).

2) Calculer les fréquences.

3) Calculer les fréquences cumulées croissantes.

Exercice 3

On considère l'ensemble des notes obtenues l'ors d'un test noté sur 20, par 50 candidats.

10	8	3	12	13	9	12	9	12	11
11	11	8	5	13	14	14	6	12	16
7	11	10	10	2	15	12	10	1	14
11	7	8	10	13	9	13	9	7	13
11	19	9	4	10	8	9	6	7	14

1) Dépouille ces données et représente les résultats dans un tableau. (On prends les classes suivantes : [0,5[; [5,7[;, [7,9[; [9,11[; [11,13[; [13,15[; [15,20[ ).

2) Calculer les fréquences.

3) Calculer les fréquences cumulées.

4) Quelles est la proportion des candidats ayant une note supérieure à 9 ?

5) Quelles est la proportion des candidats ayant une note supérieure ou égale à 13 ?

6) Quelles est la proportion des candidats ayant une note comprise entre 5 et 20 ?

7) Quelle est la classe dont la densité est la plus forte et celle dont la densité est la plus faible ?

Exercice 4

Une étude portant sur la durée de vie d'une centaine d'appareils électriques a permis d'établir le tableau ci-dessous :

Durée de vie (en heures)	Nombre d'appareils
[0,2000[	8
[2000,4000[	26
[4000,5000[	20
[5000,6000[	22
[6000,8000[	18
[8000,10000[	6

Déterminer la classe modale.

Exercice 5

Compléter le tableau suivant :

Classes	Centre	Fréquences	Fréquences cumulées	Densité
[10,20[	…	0,08	…	…
[20,30[	…	0,21	…	…
[30,40[	…	…	0,55	…
[40,60[	…	…	0,86	…
[60,80[	…	…	…	…

Exercice 6

L'étude statistique d'une population a permis de regrouper les individus par classes dont les centres sont les suivants : 52, 60, 68, 76, 84, 92.

1) Quelle est l'amplitude des classes ?

2) Calculer la limite inférieure et la limite supérieure de chaque classe ?

Exercice 7

On considère cinq populations notées A, B, C, D, E. On répartit les individus en fonction de leur préférence en matière de spectacles. On obtient :

Population	théâtre	concert
A	110	80
B	210	220
C	80	60
D	250	130
E	220	200

Représente, en fonction des spectacles, sur deux diagrammes circulaires ces populations.

Exercice 8

Le tableau suivant donne pour chacun des dix pays de la C.E.E. la population en 1981 et la superficie en km^2.

Pays	Population (en millions d'habitants)	Superficie (en km^2)
Allemagne	61,67	248577
Belgique	9,86	30513
Danemark	5,12	43069
France	53,96	547026
Grande-Bretagne	56,01	244046
Grèce	9,71	131990
Irlande	3,44	70282
Italie	56,22	302263
Luxembourg	0,36	2586
Pays-Bas	14,25	40844

1) Calculer la population totale de la C.E.E. en 1981.

2) Donner une représentation graphique du nombre d'habitants.

3) Donner une représentation graphique des superficies.

4) Calculer la densité (nombre d'habitants au km^2) pour chacun des pays et classer les pays de C.E.E. par densité décroissante.

5) Donner une représentation graphique des densités.

Exercice 9

La répartition des étudiants d'une faculté de droit et sciences économiques en fonction de leurs niveaux d'étude et de leurs spécialités est la suivante :

	Droit	Sciences économiques
DEUG 1ère année	650	324
DEUG 2ème année	296	132
Licence	217	92
Maîtrise	148	78
Troisième cycle	52	23

Donner une représentation graphique de ce tableau.

Exercice 10

Une entreprise consacre un budget fixe B, chaque trimestre, une compagnie d'affichage publicitaire.

Au premier trimestre, le prix de l'affichage était à 35f.

Au second trimestre, le prix de l'affichage était de 38F.

Au troisième trimestre, le prix de l'affichage était de 40F.

Au quatrième, le prix de l'affichage était de 44F.

Calculer le prix moyen de l'affichage.

Exercice 11

Soit la série statistique : 1, 2, 5, 7, 10, 13.

Calculer les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique de cette série.

Exercice 12

On considère la série statistique discrète suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	22	31	20	11	4	1

Calculer les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique de cette série.

Exercice 13

Le tableau suivant donne la répartition d'une population en fonction du nombre de visite de musées durant une année.

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	22	31	20	11	4	1

Calculer le mode de cette série.

Exercice 14

La répartition des employés d'une entreprise suivant la prime de fin d'année a permis de dresser le tableau suivant :

Prime en F	Nombre d'employés
[1250, 1750[	130
[1750, 2250[	350
[2250, 2750[	210
[2750, 3250[	130
[3250, 3750[	90
[3750, 4250[	50
[4250, 4750[	30
[4750, 5250[	10

1) Quelle l'étendue de cette série ?

2) Calculer la prime moyenne.

3) Calculer l'écart-type.

Exercice 15

On considère la distribution suivante :

classes	[15,25[	[25,35[	[35,45[	[45,55[	[55,65[	[65,75[	[75,85[
effectifs	9	15	22	29	17	6	2

a) Calculer l'écart absolu moyen par rapport à la moyenne.

b) Calculer l'écart absolu moyen par rapport à la médiane.

Exercices d'entrainement de la compétence de Base 3 du troisième trimestre

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

On donne les points $\mathrm{A}\binom{0}{4}$ $\mathrm{B}\binom{-4}{5}$ $\mathrm{C}\binom{-1}{1}$ $\mathrm{D}\binom{2}{5}$ $\mathrm{E}\binom{-3}{7}$ $\mathrm{F}\binom{2}{3}$ $\mathrm{G}\binom{-4}{6}$ et $\mathrm{H}\binom{6}{2}$

Parmi les points ci-dessus, quels sont ceux qui appartiennent aux quatre droites suivantes :

(D_1): $2x - 3y + 5 = 0$

(D_2): $3x - 2y + 4 = 0$

(D_3): $4x + 3y + 1 = 0$

(D_4): $-x - 2y + 8 = 0$

Exercice 2

Soit (D) la droite d'équation $3x - 2y - 1 = 0$

1) Calculer l'ordonnée du point A de (D) d'abscisse 1.
2) En déduire que $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 + 3k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$ est une representation paramétrique de (D).

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Etudier, deux à deux, les positions relatives des droites d'équations cartésiennes :

(D_1): $3x + 6y - 5 = 0$ et (D_2): $x - 2y + 4 = 0$

(D_3): $x + 2y + 5 = 0$ et (D_4): $-x - 5y + 3 = 0$

(D_5): $4x - y + 1 = 0$ et (D_6): $7x - 14y + 8 = 0$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Trouver une représentation paramétrique de la droite (D) dans chacun des cas suivants :

1) La droite (D) passe par $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$;
2) (D) est la droite passant par $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$;

En déduire une équation cartésienne de (D) dans chaque cas.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On donne la droite (D) d'équation $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

1) La droite (D) passe-t-elle par $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$? $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$? et $C\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$?
2) Quel est le point de (D) qui a pour abscisse 0? Quel est le point de (D) qui a pour ordonnée 0?
3) Donner une équation cartésienne de la droite (D).

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

On donne les points $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

Déterminer des équations des droites (D_A) , (D_B) , (D_C) respectivement parallèles aux droites $(BC), (AC)$ *et* (AB) passant par A, B, C.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Donner une équation cartésienne puis une représentation paramétrique des droites :

1. passant par les points $A\binom{2}{5}$ et $B\binom{-1}{1}$
2. passant par le point $C\binom{-2}{0}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\binom{1}{2}$
3. passant par le point $D\binom{-2}{4}$ et dirigée par le vecteur $\vec{i}$
4. passant par le point $E\binom{-3}{1}$ et dirigée par le vecteur $\vec{j}$
5. passant par le point $F\binom{-3}{5}$ et de vecteur $\vec{n}\binom{3}{2}$

EVALUATION

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le nombre réel a pour que l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ passe par le point A(5 ; – 0,6).
2) Démontrer que les points B(–6 ; 0,5), C(– 1,5 ; 2), et D(– 3 ; 1) appartiennent à cette hyperbole

Exercice 2

On a soumis vingt sujets au test multi-aptitude de cureton à l'épreuve de reconnaissance de mots, ils ont obtenu les « notes » suivants :

sujets	notes
1	11
2	9
3	10
4	13
5	12

sujets	notes
6	9
7	11
8	10
9	11
10	14

Sujets	notes
11	15
12	8
13	13
14	7
15	10

sujets	notes
16	11
17	13
18	11
19	10
20	12

a) Etablir le tableau des effectifs de cette série statistique.
b) Quelle est la mode de cette série ?

c) Dresser un tableau de fréquences cumulées croissantes.

d) Représenter graphiquement cette série.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Vérifier que les droites (D) et (D') de représentations paramétriques respectives :

$(D) : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $(D') : \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -2\lambda + 1 \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ sont sécants et trouver les coordonnées de leur point d'intersection.

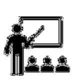
Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice :

- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………

Conseils et orientation de l'enseignant :

- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………

Evaluation de la compétence




☐


☐


☐

Table des matières

4

EDUNOTE

Portail Integré de Réussite Scolaire

Inscrivez-vous sur www.edunote.org

TECHNIDEV

Institut des Technologies Innovantes pour le Développement