MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA PROMOTION CIVIQUE

EDUNOTE
Portail Intégré de Réussite Scolaire

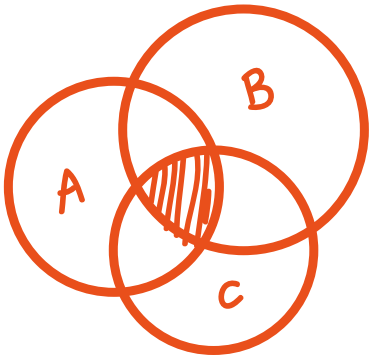
Maths
3 ème

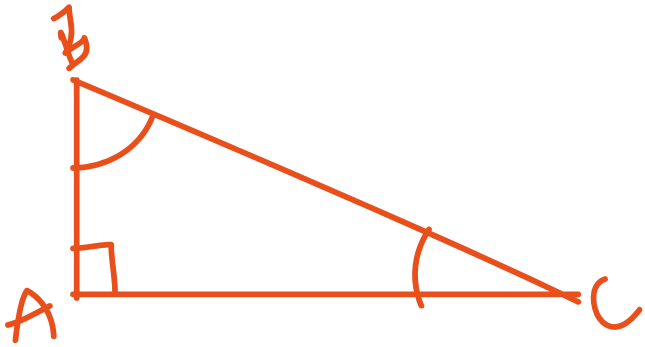
SUPPORT OFFICIEL DE L'ENSEIGNEMENT À DISTANCE AU TCHAD

✓ ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

✓ ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

✓ EXERCICES CORRIGÉS





Inscrivez-vous
www.edunote.org

Appelez le Call center
Pédagogique au
1317

Scannez puis Téléchargez
le Livre en Pdf

unicef pour chaque enfant

EDUCATION CANNOT WAIT
a global fund for education in emergencies

UNFPA

Centre National des Curricula

TECHNIDEV
Institut des Technologies Innovantes pour le Développement

Avant – Propos

Ce support d'enseignement à distance du Mathématiques destiné à la classe de Cinquième de l'Enseignement Moyen au Tchad a été conçu dans le cadre du programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Toutes propositions tendant à l'amélioration du document seront les bienvenues.

Bonne lecture

Equipe éditoriale

Le support d'enseignement à distance du Mathématiques destiné à la classe de Cinquième a été réalisé par une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants, en particulier :

MM.

- WEDA MBAFE, Professeur certifié de Mathématiques ;
- BOUMASSOU BOUKAR, Professeur de CEG de Mathématiques ;
- ABAYE ARMAND, Professeur de CEG de Mathématiques ;
- NODJINAIBEYE FREDERIC, Professeur de Mathématiques.

Sous la supervision de

NGARADOUM FABIEN,

Professeur certifié de Mathématiques

Saisie et mise en page

NODJIKOUAMBAYE MBAINAIDA,

Chef de Division Bibliothèque au CNC

Assistance technique :

MAHAMAT ABBA MAHAMAT,

Professeur de Mathématiques

Coordination :

Dr. ABOUBAKAR ALI KORE,

Directeur Général du Centre National des Curricula

KHALID FADOUL DOUTOUM,

Directeur Général de TECHNIDEV.

PREFACE

Chers élèves, enseignants, parents et parties prenantes de l'école tchadienne,

Conformément au **protocole d'accord de partenariat du 02 septembre 2016** ayant pour objet le renforcement des capacités en technologies de l'information et de la communication dans les établissements secondaires, liant l'Etat Tchadien représenté par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique (MENPC) et l'Institut TECHNIDEV, ce dernier est amené à expérimenter des approches innovantes intégrant le numérique et visant à améliorer l'efficacité interne du système éducatif tchadien. **Le résultat attendu de cette convention (MENPC/ TECHNIDEV) étant l'accès à une éducation et la réussite pour tous.**

C'est dans ce cadre que le programme Soutien Scolaire Intégré est développé et mis en œuvre par TECHNIDEV, avec pour objectif de :

- Prendre en charge tous les élèves en difficultés scolaires dans une discipline inscrite au programme officiel et ce, conformément au niveau de l'élève ;
- Contribuer à améliorer les notes en classe de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à assurer le passage en classe supérieure de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à améliorer le taux de réussite au BAC de tous les candidats bénéficiaires ;
- Contribuer au maintien des filles à l'école.

TECHNIDEV tient à exprimer ses remerciements aux cadres du MENPC, aux partenaires (ECW et UNICEF), les experts, les inspecteurs, les enseignants et les animateurs pédagogiques et à toutes celles et tous ceux qui ont contribué d'élaboration de ce guide.

Le présent guide pédagogique décline les stratégies d'une prise en charge de l'élève soucieux de la qualité de son éducation et de sa réussite, adhérant au projet et respectant les conditions spécifiques de sa mise en œuvre.

L'enseignant, spécialisé en techniques d'évaluation et de remédiation et en éducation par le numérique, dispose d'un outil lui permettant d'agir avec une méthode axée sur les résultats en terme de développement des compétences des élèves.

Pour les parents, c'est un instrument de suivi quotidien des activités d'apprentissage de l'enfant par rapport à la progression dans le programme.

J'invite les élèves, les enseignant (e)s et les parents à une exploitation judicieuse de ce guide pour une contribution efficace dans la mise en œuvre de programmes de Soutien Scolaire Intégré (SSI) et partant, la redynamisation de l'école tchadienne.

KHALID FADOUL DOUTOUM

Directeur Général de TECHNIDEV

INTRODUCTION

Le présent guide a été réalisé dans le cadre de programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants a contribué à son élaboration.

Ce guide, destiné principalement aux enseignants et aux élèves, a pour but de contribuer à l'amélioration et le renforcement des capacités de l'élève et ce, d'abord par l''identification de ses difficultés suivi un accompagnement stratégique basé sur une approche par compétences. Il s'adresse aux élèves du CM à la Terminale et s'appesantit principalement sur les matières fondamentales que sont le Français et les Mathématiques. Chaque Guide traite un trimestre spécifique conformément au programme de l'enseignement proposé par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique du Tchad.

Dans ce contexte, le guide met en évidence les principales compétences jugées incontournables pour la réussite de l'élève et suggère aux enseignants des stratégies et méthodologies appropriées pouvant servir à mettre en place une meilleure prise en charge individuelle de l'élève.

Dans son architecture, le guide présente de la manière suivante :

Partie 1 (destinée en premier lieu à l'enseignant) : La Fiche de programmation trimestrielle, la Fiche de Progression et la Fiche de développement de compétences du trimestre mis en exergue par ledit Guide ainsi qu'un chronogramme de prise en charge individuelle de l'élève par l'enseignant.

Partie 2 (destinée aux élèves) : Elle déroule les différentes compétences que l'élève doit développer, ainsi que des épreuves et applications favorisant l'acquisition de ces compétences. Des tableaux d'évaluation des élèves sont consacrés à la fin de chaque épreuve.

Table des Illustrations

 = Important pour l'élève

 = Relire plusieurs fois

 = Astuces et consignes

 = Compétence non-acquise

 = Exercice d'application

 = Compétence en cours

 = Exercices d'approfondissement

 = Compétence acquise

PREMIERE PARTIE DESTINEE A L'ENSEIGNANT

FICHE DE PROGRAMMATION ANNUELLE		
	CB1 : Activités Numériques	**CB2 : Activités Géométriques**
Trimestre I	**Leçon 1 :** Racines carrées et ensemble des nombres réels **Leçon 2 :** Calculs dans $\mathbb{R}$ **Leçon 3 :** Fonctions – Applications **Leçon 4 :** Monômes - Polynômes	**Leçon 1 :** Propriété de Thalès **Leçon 2 :** Trigonométrie dans le triangle rectangle **Leçon 3 :** Angles inscrits dans un cercle et application aux configurations du plan **Leçon 4 :** Vecteurs et opérations **Leçon 5 :** Translation **Leçon 6 :** Coordonnées d'un vecteur

Trimestre II	**Leçon 5 :** Applications linéaires –Applications affines et Composée d'applications affines **Leçon 6 :** Fractions rationnelles **Leçon 7 :** Equations et inéquations du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ **Leçon 8 :** Systèmes d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	**Leçon 7 :** Equations de droites **Leçon 8 :** Symétrie centrale – symétrie orthogonale **Leçon 9 :** Rotation **Leçon 10 :** Homothétie
Trimestre III	**Leçon 9 :** Dénombrement **Leçon 10 :** Statistique	**Leçon 11 :** Pyramides **Leçon 12 :** Cônes

Objectif Terminal d'Intégration (OTI)

Au terme de la classe de Troisième, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives permettant la consolidation, l'enrichissement et le transfert des savoirs et savoir-faire acquis dans les classes antérieures, tant en activités numériques que géométriques dans des contextes variés. Il doit donc faire preuve de capacité de raisonnement scientifique et d'aptitude à la communication orale et écrite.

Compétence de base n° 1 (CB 1) :

Au terme de la classe de Troisième, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir :

- les opérations sur les réels et les opérations intégrant les activités géométriques ;
- les opérations sur les équations et les inéquations ;
- l'organisation, le traitement, la représentation et l'interprétation des données.

Compétence de base n°2 (CB 2) :

Au terme de la classe de Troisième, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir :

- la construction, la représentation, la description et le codage des figures ;
- la mesure et le calcul des grandeurs géométriques ;
- la justification et la vérification des propriétés.

Fiche de programmation horaire du 1er trimestre

1er Trimestre	Compétences	Leçon	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombre d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
1er Octobre au 31 Décembre 11 semaines	CB1	1	Racines carrées et ensemble des nombres réels	4H	1H	2H	5H	55H
		2	Calculs dans ℝ	4H	1H		5H	
		3	Fonctions – Applications	4H	1H		5H	
		4	Monômes - Polynômes	4H	1H		5H	
	CB2	1	Propriété de Thalès	4H	1H		5H	
		2	Trigonométrie dans le triangle rectangle	4H	1H		5H	

		3	Angles inscrits dans un cercle et application aux configurations du plan	4H	1H	2H	5H	
		4	Vecteurs et opérations	4H	1H		5H	
		5	Translation	4H	1H		5H	
		6	Coordonnées d'un vecteur	4H	1H		5H	

Trimestre	Période	Contenus	
		CB 1 :	CB 2 :
I	1er Octobre au 10 Novembre	**Leçon 1 :** Racines carrées et ensemble des nombres réels **Leçon 2 :** Calculs dans $\mathbb{R}$	**Leçon 1 :** Propriété de Thalès **Leçon 2 :** Trigonométrie dans le triangle rectangle **Leçon 3 :** Angles inscrits dans un cercle et application aux configurations du plan
	11 Novembre au 31Décembre	**Leçon 3 :** Fonctions – Applications **Leçon 4 :** Monômes - Polynômes	**Leçon 4 :** Vecteurs et opérations **Leçon 5 :** Translation **Leçon 6 :** Coordonnées d'un vecteur

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Troisième

Premier trimestre

Compétence de Base 1

Troisième–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et les fonctions (applications, monômes et polynômes).

Ressources		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
- Racines carrées et ensemble des nombres réels.	– Identifier les nombres non rationnels ; – utiliser les propriétés des radicaux pour : ➢ comparer les nombres réels, ➢ réduire l'écriture de sommes, de produits et de quotients de réels ; – utiliser correctement une table numérique (éventuellement une calculatrice) pour effectuer des calculs sur les racines carrées ; – écrire un dénominateur sans radical.	– Identification des nombres non rationnels ; – comparaison des nombres réels en utilisant les propriétés des radicaux ; – réduction de l'écriture de sommes, de produits et de quotients de réels en utilisant les propriétés des radicaux ; – utilisation correcte d'une table numérique (éventuellement une calculatrice) pour effectuer des calculs sur les racines carrées ;

			- écriture d'un dénominateur sans radical.
	- Calculs dans $\mathbb{R}$.	- Calculer la valeur absolue d'un nombre réel ; - utiliser les propriétés des valeurs absolues ; - encadrer un nombre réel positif par des décimaux ; - déduire de l'encadrement d'un nombre réel son appartenance à un intervalle et réciproquement ; - donner une approximation décimale d'un nombre réel positif ; - utiliser les propriétés des puissances pour effectuer des calculs.	- Calcul de la valeur absolue d'un nombre réel ; - utilisation des propriétés des valeurs absolues ; - encadrement d'un nombre réel positif par des décimaux ; - traduction de l'encadrement d'un nombre réel par son appartenance à un intervalle et réciproquement ; - détermination d'une approximation décimale d'un nombre réel positif ; - utilisation des propriétés des puissances pour effectuer des calculs.
	- Fonctions – Applications.	- Reconnaître une fonction ; - reconnaître une application ; - composer des applications ; - reconnaître et/ou définir une bijection ; - définir une bijection réciproque.	- Reconnaissance d'une fonction ; - reconnaissance d'une application ; - composition des applications ; - reconnaissance et/ou définition d'une bijection ; - définition d'une bijection réciproque.

	- Monômes – polynômes.	- Développer et réduire des expressions littérales en utilisant des produits remarquables et des propriétés ; - factoriser des expressions littérales en utilisant des produits remarquables et les propriétés ; - définir un monôme et en déterminer le degré, le coefficient et la variable ; - définir un polynôme et en déterminer le degré ; - effectuer des opérations sur les polynômes.	- Développement et réduction des expressions littérales en utilisant des produits remarquables et les propriétés ; - factorisation des expressions littérales en utilisant des produits remarquables et les propriétés ; - définition d'un monôme puis détermination de son degré, de son coefficient et de sa variable ; - définition d'un polynôme puis détermination de son degré ; - calculs sur les polynômes.

Compétence de Base 2

Troisième–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre la propriété de Thales, la trigonométrie dans le triangle rectangle, les angles inscrits dans un cercle, les opérations sur les vecteurs, la translation et le calcul des coordonnées de vecteurs.			
	Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
	Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
	- Propriété de Thalès.	- Reconnaître une configuration de Thalès dans le cas d'un triangle et dans le cas général ; - établir des égalités de rapports ou les justifier ; - calculer des distances ; - utiliser la réciproque du théorème de Thalès pour justifier un parallélisme de droites (dans le cas d'un triangle et dans le cas général) ; - partager un segment dans un rapport donné ; - construire une quatrième proportionnelle ; - reconnaitre deux triangles semblables par leurs propriétés.	- Reconnaissance d'une configuration de Thalès dans le cas d'un triangle ; - reconnaissance d'une configuration de Thalès dans le cas général ; - écriture ou justification d'égalités de rapports ; - calcul des distances ; - justification du parallélisme de droites (dans le cas d'un triangle et dans le cas général) en utilisant la réciproque du théorème de Thalès ; - partage d'un segment dans un rapport donné ; - construction d'une quatrième proportionnelle ; - reconnaissance de deux triangles semblables par leurs propriétés.
	- Trigonométrie dans le triangle rectangle.	- Calculer le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; - calculer un rapport trigonométrique d'un angle connaissant l'autre dans un triangle rectangle ; - construire un angle aigu dont on connaît le sinus, le cosinus ou la tangente en utilisant une calculatrice ou une table trigonométrique ; - calculer des angles et des distances dans un triangle rectangle ;	- Calcul du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; - calcul d'un rapport trigonométrique d'un angle connaissant l'autre dans un triangle rectangle ; - construction d'un angle aigu dont on connaît le sinus, le cosinus ou la tangente en utilisant une calculatrice ou une table trigonométrique ; - calcul des angles et des distances dans un triangle rectangle ;

		- lire une table trigonométrique en degré ; - reconnaître les lignes trigonométriques des angles remarquables : 30°, 45°et 60°.	- lecture d'une table trigonométrique en degré ; - reconnaissance des lignes trigonométriques des angles remarquables : 30°, 45°et 60°.
	- Angles inscrits dans un cercle et application aux configurations du plan.	– Reconnaître un angle inscrit, le secteur angulaire au centre associé et l'arc qu'ils interceptent ; – reconnaître deux angles inscrits interceptant le même arc ; – utiliser la propriété des angles inscrits interceptant le même arc ou la propriété de l'angle inscrit et du secteur angulaire associé, pour déterminer : ➢ la mesure d'un angle, ➢ l'égalité de deux angles, – déterminer la mesure d'un angle dans un polygone régulier ; – calculer des distances dans un polygone régulier ; – justifier qu'un quadrilatère est inscriptible.	– Reconnaissance d'un angle inscrit, du secteur angulaire au centre associé et de l'arc qu'ils interceptent ; – reconnaissance de deux angles inscrits interceptant le même arc ; – détermination de la mesure d'un angle en utilisant la propriété des angles inscrits interceptant le même arc ou la propriété de l'angle inscrit et du secteur angulaire associé ; – détermination de l'égalité de deux angles en utilisant la propriété des angles inscrits interceptant le même arc ou la propriété de l'angle inscrit et du secteur angulaire associé ; – détermination de la mesure d'un angle dans un polygone régulier ; – calcul des distances dans un polygone régulier ; - justification qu'un quadrilatère est inscriptible.
	- Vecteurs et opérations.	- Construire la somme et la différence de deux vecteurs ; - réduire une somme de vecteurs ; - construire un représentant du vecteur $k.\overrightarrow{AB}$, connaissant $\overrightarrow{AB}$ et le réel k ; - déterminer des vecteurs colinéaires ; - déterminer des vecteurs orthogonaux.	- Construction de la somme et de la différence de deux vecteurs ; - réduction d'une somme de vecteurs ; - construction d'un représentant du vecteur $k.\overrightarrow{AB}$, connaissant $\overrightarrow{AB}$ et le réel k ; - détermination des vecteurs colinéaires ; - détermination des vecteurs orthogonaux.
	- Translation.	- Utiliser une translation pour construire ; - utiliser une translation pour démontrer : ➢ une égalité de distances, ➢ un alignement des points, ➢ une perpendicularité de droites, ➢ un parallélisme de droites ;	- Utilisation d'une translation pour construire ; - démonstration d'une égalité de distances en utilisant une translation ; - démonstration d'un alignement de points en utilisant une translation ; - démonstration de la perpendicularité de droites en utilisant une translation ;

		- composer des translations.	- démonstration d'un parallélisme de ; droites en utilisant une translation ; - composition de translations.
	- Coordonnées d'un vecteur.	- Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ connaissant les coordonnées des points A et B ; - calculer les coordonnées d'un point A ou B, connaissant les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de l'un de ces points ; - calculer les coordonnées : ➢ de la somme de deux vecteurs, ➢ du vecteur $k.\overrightarrow{AB}$, ➢ du milieu d'un segment ; - justifier à l'aide de leurs coordonnées, que deux vecteurs : ➢ ont la même direction, ➢ sont orthogonaux ; – justifier, à l'aide de leurs coordonnées, que trois points sont alignés ; – calculer les coordonnées de l'un des deux vecteurs orthogonaux ou de même direction connaissant celles de l'autre ; – calculer la distance de deux points donnés par leurs coordonnées.	- Calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ connaissant les coordonnées des points A et B ; - calcul des coordonnées d'un point A ou B, connaissant les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de l'un de ces points ; - calcul des coordonnées de la somme de deux vecteurs ; - calcul des coordonnées du vecteur $k.\overrightarrow{AB}$; - calcul des coordonnées du milieu d'un segment ; - justification, à l'aide de leurs coordonnées, que deux vecteurs ont la même direction ; - justification à l'aide de leurs coordonnées que deux vecteurs sont orthogonaux ; – justification de l'alignement de trois points à l'aide de leurs coordonnées ; – calcul des coordonnées de l'un des deux vecteurs orthogonaux ou de même direction connaissant celles de l'autre ; - calcul de la distance de deux points donnés par leurs coordonnées.

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Racine carrée et ensemble des nombres

SEQUENCE 1

Définition et propriété de la racine carrée

Objectif : - Définir et noter la racine carrée d'un nombre positif

Définition

La racine carrée du nombre positif ou nul a est le nombre réel dont le carré est égale à a ;

on le note $\sqrt{a}$ et on lit : la racine carrée de a.

Le symbole $\sqrt{}$ est appelé radical et le réel a est le radicande

Exemples

1. $\sqrt{81} = 9$ car $9^2 = 81$
2. $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$
3. $\sqrt{36} = 6$ car $6^2 = 36$

SEQUENCE 2

Conséquences de la définition

Objectif : utiliser la conséquence de la définition

a et b étant des nombres positifs,

- $\sqrt{a} = b$ équivaut à $a = b^2$.
- $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.
- $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$
- Si $a = b$ alors $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.
- Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- Si $a > b$ alors $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

  N.B: La Racine carrée d'un nombre strictement négatif n'existe pas

SEQUENCE 3

Ensemble des nombres réels

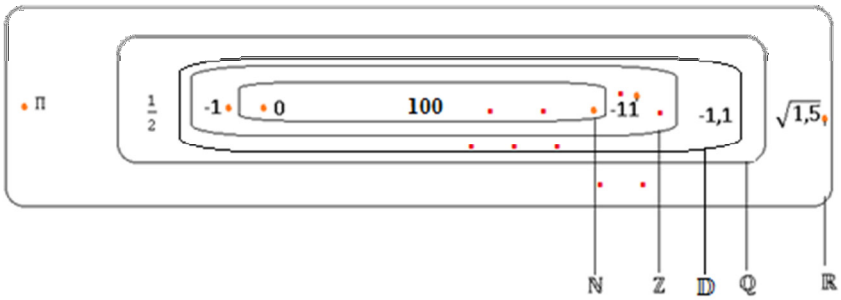
Objectif : Reconnaitre un nombre irrationnel et la notation $\mathbb{R}$ de l'ensemble des nombres réels

Les nombres $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; ….. ne sont pas des nombres rationnels car il n'existe aucune fraction qui leur soit égale. On dit qu'ils sont des nombres irrationnels. Un nombre qui n'est pas rationnel est appelé nombre irrationnel.

L'ensemble formé par les nombres rationnels et par les nombres irrationnels est appelé ensemble des nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}$.

Ainsi, on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

D'où le diagramme suivant :



SEQUENCE 4

Opérations et racine carrée

Objectif : utiliser les propriétés des radicaux pour réduire l'écriture de sommes, de produits, et de quotients

Somme et racines carrées

Propriété

a et b étant des nombres plus grands que zéro, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

Exemple : $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$; $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$7 \neq 5$

Produit, quotient et racine carrée

Propriété

a et b étant deux nombres positifs,

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

$Si\ b \neq 0\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$

Exemples

1. $\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$

2. $\sqrt{3} \times \sqrt{3 \times 49} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{49} = 3 \times 7 = 21$

3. $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

4. $\sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$

5. $\sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3}. = 2$

Exercice

Ecris plus simplement les nombres suivants :

$A = 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2}$ x $2\sqrt{15}$

$B = \sqrt{25} \times \sqrt{625}$

$C = \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$

Correction

$A = 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2}$ x $2\sqrt{15}$ $\qquad$ $B = \sqrt{25} \times \sqrt{625}$

$C = \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$

$= 3X5X2X\sqrt{5X5}$ X $\sqrt{2}$ $X\ \sqrt{3} = \sqrt{25}$ x $\sqrt{25}$ x $\sqrt{25} = \frac{\sqrt{3X49}}{\sqrt{3}}$

A $= 150\ \sqrt{6} = 5X5X5 = 7\ X\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$B = 125$

$C = 7$

SEQUENCE 5

Racine carrée et puissance- Calcul avec les racines carrées

Objectif : Utiliser les radicaux pour calculer les puissances, développer et factoriser

Racine carrée et puissance

Propriété

a étant un nombre positif et n un nombre entier relatif,

$\sqrt{a^{2n}} = a^n\ et\ \sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$

Exemples1. $\sqrt{10^7} = \sqrt{10^6 \times 10} = \sqrt{(10^3)^2 \times 10} = 10^3 \times \sqrt{10}$

a, b et c étant trois nombres positifs, $\sqrt{a^3} \times \sqrt{b^{13}} \times \sqrt{c^{15}} = a \times b^6 \times c^7 \times \sqrt{abc}$

Calculs avec les racines carrées

Développement et réduction – Factorisation

Exemples

a. Développons et réduisons

$D = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$

$= (3\sqrt{2})^2 + 12\sqrt{6} - 6\sqrt{6} - 8(\sqrt{3})^2$

$= 18 + 6\sqrt{6} - 24$

$= -6 + 6\sqrt{6}$

$= 6(\sqrt{6} - 1)$

b. Factorisons

$x^2 - 35 = x^2 - (\sqrt{35})^2$

$= (x - \sqrt{35})(x + \sqrt{35})$

$15 - 7x^2 = (\sqrt{15} - x\sqrt{7})(\sqrt{15} + x\sqrt{7})$

$x^2 + 4x\sqrt{2} + 8 = x^2 + 2\times 2\sqrt{2}\times x + (2\sqrt{2})^2$

$= (x + 2\sqrt{2})^2$

SEQUENCE 6

Ecriture d'un quotient sans radical au dénominateur

Objectif : Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un ou plusieurs radicaux

Les expressions $2 + \sqrt{7}$ et $2 - \sqrt{7}$ sont dites conjuguées l'une de l'autre. Leur produit peut s'écrire sans radical.

Il en est de même pour $3 - 2\sqrt{5}$ et $3 + 2\sqrt{5}$ et de $3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}$.

Ainsi, pour écrire un quotient sans radical au dénominateur, on utilise l'expression conjuguée du dénominateur pour multiplier le numérateur et le dénominateur du quotient considéré.

Exemple

Ecrivons sans radical au dénominateur les nombres suivants :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{3}{2+\sqrt{7}} = \frac{3(2-\sqrt{7})}{(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})}$$

$= \frac{3(2-\sqrt{7})}{4-7}$

$= \frac{3(2-\sqrt{7})}{-3}$

$= \sqrt{7} - 2$

Calculs dans IR

SEQUENCE 7

Rappels sur les quotients

Objectif : Effectuer les calculs comportant les quotients

Définition

Soient a et b deux nombres réels, b non nul.

Le quotient de a par b est l'unique nombre réel x tel que : bx = a. On a doncx $= \frac{a}{b}$.

Propriétés

a, b, c et d étant des réels tels que b et d ne soient pas nuls. On a :

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$;

Exemple: $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$

2.. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Exemple: $\frac{2}{7} + \frac{5}{2} == \frac{2\times2+7\times5}{7\times2} = \frac{39}{14}$

3. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

Exemple: $\frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{2x5}{7x3} =: \frac{10}{21}$

4. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Exemple: calculer a, où a désigne un nombre réel différent de 0 ; $\frac{3}{a} = \frac{4}{12}$

Solution: $\frac{3}{a} = \frac{4}{12}$

équivaut à 3×12=4xa équivaut à a $= \frac{3x12}{4}$ =9

5 . $\frac{\frac{1}{c}}{d} = \frac{1}{cd}$ $(c \neq 0)$; $\frac{\frac{1}{6}}{5} = \frac{1}{6x5} =: \frac{1}{30}$

SEQUENCE 8

Valeur absolue d'un nombre réel

Objectif : Calculer la valeur absolue d'un nombre réel

Définition

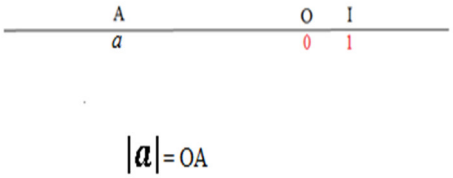
Soit a un nombre réel. On appelle valeur absolue de a, le plus grand des deux nombres réels a et –a. On le note |a| et on lit :

« valeur absolue de a ».

On a donc :

$|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a \leq 0$.

Graphiquement, la valeur absolue d'un nombre a est la distance à zéro de ce nombre.



Exemples

1. $|-4{,}9| = 4{,}9$; $|0| = 0$; $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$; $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$.

2. $|1-\pi| = -(1-\pi) = -1+\pi$ car $1-\pi < 0$.

$|\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$ car $\sqrt{5}-2 > 0$

$|\sqrt{10}-4| = -(\sqrt{10}-4) = 4-\sqrt{10}$ car $\sqrt{10}-4 < 0$.

Propriétés

Pour tout réel x, on a :

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$.

SEQUENCE 9

Valeur absolue et opérations

Objectif : effectuer des opérations avec des valeurs absolues

Propriétés

Pour tous réels x et y, on a :

1. $|x| \times |y| = |xy|$

2. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$. *($y \neq 0$).*

Exemples

1. On considère les nombres suivants :

$x = -4\sqrt{3}$ et $y = 5$. Calculons les produits $|x| \cdot |y|$ et $|xy|$.

On a $|x| \times |y| = \left|-4\sqrt{3}\right||5|$

$= 4\sqrt{3} \times 5 = 20\sqrt{3}$.

$|xy| = \left|\left(-4\sqrt{3}\right) \times (5)\right|$.

$= \left|-20\sqrt{3}\right| = 20\sqrt{3}$.

On constate que : $|x| \times |y| = |xy|$.

2. Calculons les sommes suivantes

$\left|1 + \sqrt{2}\right| + \left|3 - \sqrt{10}\right|$ et $\left|\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(3 - \sqrt{10}\right)\right|$.

Calcul de la somme $\left|1 + \sqrt{2}\right| + \left|3 - \sqrt{10}\right|$. On a : $\left|\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(3 - \sqrt{10}\right)\right| = \left|1 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{10}\right|$

$= \left|4 + \sqrt{2} - \sqrt{10}\right|$.

Et comme $4 + \sqrt{2} - \sqrt{10} > 0$ alors $\left|4 + \sqrt{2} - \sqrt{10}\right| = 4 + \sqrt{2} - \sqrt{10}$

Donc $\left|\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(3 - \sqrt{10}\right)\right| = 4 + \sqrt{2} - \sqrt{10}$.

On constate que les deux résultats ne sont pas égaux. En effet :

$\sqrt{2} + \sqrt{10} - 2 \neq 4 + \sqrt{2} - \sqrt{10}$.

Donc $\left|1 + \sqrt{2}\right| + \left|3 - \sqrt{10}\right| \neq \left|\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(3 - \sqrt{10}\right)\right|$

3. Calculons les quotients suivants et comparons les résultats obtenus : $\left|\frac{2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}}\right|$ et $\frac{|2\sqrt{3}|}{|3-2\sqrt{3}|}$.

On a : $\left|\frac{2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{2\sqrt{3}(3+2\sqrt{3})}{(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})}\right| = \left|\frac{6\sqrt{3}+12}{-3}\right|$

$\left|-(2\sqrt{3} + 4)\right| = 2\sqrt{3} + 4$.

$\frac{|2\sqrt{3}|}{|3-2\sqrt{3}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$ car $3 - 2\sqrt{3} < 0$.

Ainsi $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} = \frac{2\sqrt{3}(2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)} = \frac{12+6\sqrt{3}}{12-9} = \frac{12+6\sqrt{3}}{3}$.

$= 4 + 2\sqrt{3}$.

Donc : $\frac{|2\sqrt{3}|}{|3-2\sqrt{3}|} = 4 + 2\sqrt{3}$.

On constate que : . $\left|\frac{2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}}\right| = \frac{|2\sqrt{3}|}{|3-2\sqrt{3}|}$

SEQUENCE 10

Valeur absolue et égalités

Objectif : Utiliser les propriétés des valeurs absolues pour résoudre une équation

Propriétés

1. Pour tous nombres réels a et b, on a :

. $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$.

Exemple

Soit x un nombre réel donné.

Si on a $|x+1| = |2x-3|$, en appliquant la règle ci-dessus, on obtient :

$x + 1 = 2x - 3$ ou $x + 1 = -2x + 3$.

La première équation nous donne $x = 4$.

La seconde équation nous donne $x = \frac{2}{3}$.

En conclusion : $|x+1| = |2x-3| \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = \frac{2}{3}$.

2. Soient x et a des réels, a > 0 :

$|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$.

Exemple

$|5 + x| = 2 \Leftrightarrow 5 + x = 2$ ou $5 + x = -2$

$x = -3$ ou $x = -7$; On vérifie que si $x = -3$, $|5-3| = 2$

Ou si $x = -7$, $|5-7| = |-2| = 2$

SEQUENCE 11

Valeurs absolues et inégalités

Objectif : Utiliser les propriétés des valeurs absolues pour résoudre une inéquation

Pour tous nombres réels x et a, avec a > 0 :

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Exemple : $|x| \leq 5$.

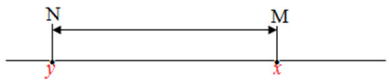
D'après la propriété ci-dessus, on a :

$|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$.

Les valeurs de x pour lesquelles $|x| \leq 5$ sont les nombres réels compris entre -5 et 5.

Valeur absolue et distance

Définition



$MN = |x - y|$

Soient x et y deux nombres réels.

Le nombre réel $|x - y|$ est appelé distance de x et y.

SEQUENCE 12

Intervalles et encadrement

Intervalles

Objectif : Utiliser le vocabulaire et la représentation des intervalles

Vocabulaire et représentation

Vocabulaire

a et b sont des nombres réels tels que $a < b$.

Les nombres a et b déterminent, sur une droite graduée, des ensembles appelés intervalles qu'on note :

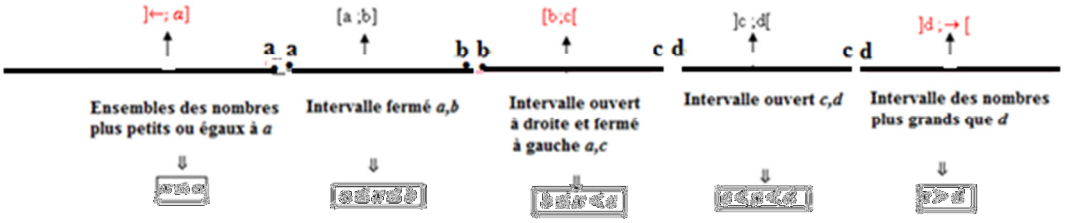
$]\leftarrow; a]$, $]\leftarrow; a[$, $[a ; b]$, $]a; b[$, $[b; \rightarrow[$

et $]b; \rightarrow[$, $[a ; b[$; $]a ; b]$.

Dans les intervalles $]\leftarrow; a]$ ou $[a ; b]$ ou $[a ; b[$ ou $]a ; b]$ les nombres a et b sont appelés des bornes.

La distance $|a - b|$ de ces intervalles est appelée l'amplitude de ces intervalles.

Représentation



SEQUENCE 13

Encadrement et calcul approché

Objectif : Encadrer un nombre réel positif par deux nombres décimaux et donner son approximation décimale

Encadrement

Définition

Soient x et y deux nombres réels et u un nombre réel strictement positif.

y est une valeur approchée de x à u près signifie que $|x - y| \leq u$.

On note :$x \cong y$ à u près

Le nombre u est appelé incertitude de cette valeur approchée y.

Exemple

$\sqrt{15} \cong 3,8729833$

$3,87 < \sqrt{15} < 3,88$ donc $\sqrt{15} \in]3,87; 3,88[$.

On calcule l'amplitude : $|3,87 - 3,88| = |-0,01| = 0,01 = 10^{-2}$

3,87 est une approximation décimale par défaut d'ordre deux de $\sqrt{15}$.

On dit que 3,87 et 3,88 sont des valeurs approchées de $\sqrt{15}$ à 10^{-2} près

10^{-2} est l'incertitude de cet encadrement.

SEQUENCE 14

Comparaison de nombres réels

Objectif : Comparer les carrés et les racines carrées

Comparaison des carrés et des racines carrées

Propriétés

1.a et b sont des nombres négatifs, on a:

$a < b$ équivaut à $a^2 > b^2$

$a \leq b$ équivaut à $a^2 \geq b^2$

2. a et b sont des nombres positifs. On a :

$a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$

$a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$

3. a et b sont des nombres positifs. On a :

$a < b$ équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

$a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Exemple

Comparons les nombres $5\sqrt{7}$ et $7\sqrt{5}$

Pour effectuer la comparaison voulue, élevons les deux nombres donnés au carré. On a :

$(5\sqrt{7})^2 = 25 \times 7 = 175$ et $(7\sqrt{5})^2 = 49 \times 5 = 245$.

On constate que $245 > 175$

Donc $7\sqrt{5} > 5\sqrt{7}$

SEQUENCE 15

Fonctions

Objectif : :

Reconnaitre et définir une fonction

Définition

Une fonction d'un ensemble E vers un ensemble F (ou de E vers F) est une correspondance qui, à tout élément x de E associe au plus un élément y de l'ensemble F.

En d'autres termes :

Soient E et F deux ensembles et G un graphe de $E \times F$.

Le triplet (E, F, G) est appelé fonction si, pour tout x de E, il existe au plus un élément y appartenant à F tel que $(x, y) \in G$.

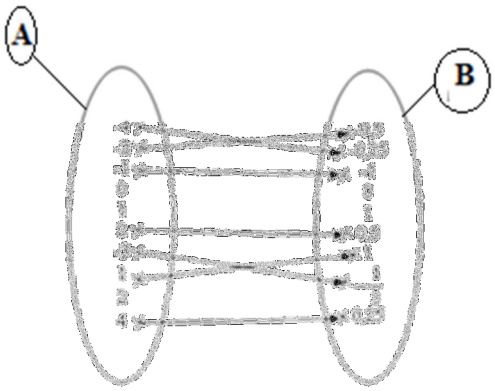
Si le couple $(x, y) \in G$, on dit que x est un antécédent de y par la fonction et y est une image de x par la même fonction.

Exemple : On considère les ensembles suivants :

A= {-4 ; -2 ; 0 ; -1 ; 2 ;-3 ; 1 ; 4} et B = {-0,5 ; -0,25 ; -1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 5 ; $-\frac{1}{3}$; 0 ; 25}.

On définit une correspondance de A vers B par la relation « …a pour inverse… ».

Le diagramme sagittal de cette relation est:



Le graphe G de cette fonction est donc :

G = {(-4 ; -0,25) , (-2 ; -0,5) , (-1 ; -1) , (-3 ; $-\frac{1}{3}$), (1 ; 1) , (2 ; 0,5) , (4 ; 0,25)}

Par exemple, on dira que -4 est l'antécédent de -0,25 .par cette fonction et -0,25 est l'image de -4 par cette même fonction.

Domaine de définition

Définition

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction f, l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ qui ont une image dans l'ensemble d'arrivée.

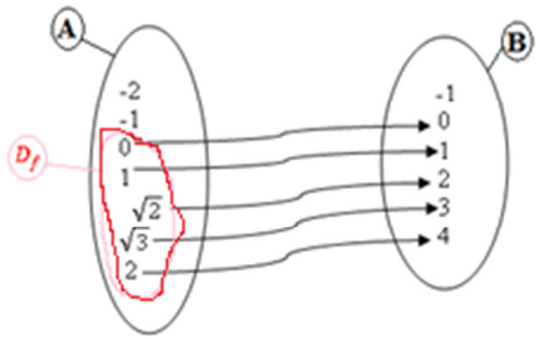
On note : D_f

Si $f:\begin{smallmatrix}A\to B\\ x\mapsto f(x)\end{smallmatrix}$ on a : $\boxed{D_f = \{x \in A \text{ tel qu'il existe } y \in B \text{ et } y = f(x)\}}$

Exemple

Si l'on considère la fonction $f : A \to B$ définie par :...est la racine carrée de...avec

$A = \{-2, -1, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$ et $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, la représentation de f sous forme de diagramme sagittal donne :



f est une fonction de A vers B car tout élément x de A a au plus une image y dans B.

L'ensemble délimité par le trait rouge est le domaine de définition de f car les éléments de cet ensemble (D_f) ont exactement une image dans B.

SEQUENCE 16

Application

Objectif : Reconnaitre une application

Définition

Une application d'un ensemble E dans un ensemble F (ou de E vers F) est une fonction qui, à tout élément x de E associe un élément et un seul y de l'ensemble F.

y est appelé l'image de x par f et se note $y = f(x)$.

x est appelé un antécédent de y par f.

L'application f de E dans F se note : $\begin{array}{l} f: E \longrightarrow F \\ \quad x \longmapsto f(x) \end{array}$

Egalité des applications

Propriété

Soient E, F, G et H quatre ensembles et soient : $\begin{array}{l} f: E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ et $\begin{array}{l} g: G \longrightarrow H \\ x \longmapsto g(x) \end{array}$ deux applications.

On dit que f est égale à g et on note f = g si :

- E = G et F = H
- $\forall x \in E, f(x) = g(x)$

SEQUENCE 17

Composition des applications

Objectif : Composer des applications

Définition

Soient E, F et G trois ensembles quelconques. Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G.

C'est-à-dire : $\begin{array}{l} f: E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ et $\begin{array}{l} g: F \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(x) \end{array}$.

Considérons la suite des fonctions suivantes :

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

$x \longmapsto f(x) \longmapsto g[f(x)]$.

g[f(x)] est appelée la composée de l'application f par l'application g.

On note : (g of)(x) = g[f(x)] et on lit "g rond f de x". Exemple

On considère les applications suivantes :

$\begin{array}{l} f: \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ x \longmapsto |x| \end{array}$ et $\begin{array}{l} g: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}_+^* \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$

Déterminons la composée de *f* par *g*.

Par le calcul on a : $(gof)(x) = g[f(x)] = g[|x|] = \frac{1}{|x|}$.

Donc $(gof)(x) = \frac{1}{|x|}$.

gof est la composée de *f* par *g*.

Exercice

On considère les fonctions suivantes :

$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x + 3 \end{array}$ et $\begin{array}{l} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x^2 \end{array}$.

Détermine les composées gof et fog des applications f et g.

Corrigé :

$gof(x) = g[f(x)]$ $\qquad$ $fog(x) = f[g(x)]$

$= 2(2x+3)^2$ $\qquad$ $= 2(2x^2) + 3$

$= 2(4x^2+12x+9)$ $\qquad$ $= 4x^2 + 3$

$gof(x) = 8X^2 + 24x + 18$ $\qquad$ $fog(x) = 4x^2 + 3$

SEQUENCE 18

Bijection

Objectif : - Reconnaitre et/ou définir une bijection

Définition

Une application f est dite bijective lorsque tout élément de son ensemble d'arrivée a un antécédent et un seul par f dans l'ensemble de départ.

Si f est une application bijective, on dit encore que f est une bijection.

Exemples

L'application $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ est une bijection.

SEQUENCE 19

Bijection réciproque

Objectif : Définir une bijection réciproque

Définition :

Soient E et F deux ensembles quelconques et f : E⟶ F une application bijective.

L'application de F dans E qui, à tout élément de l'ensemble d'arrivée de f associe son unique antécédent par f se note f^{-1}et s'appelle l'application réciproque de f.

Propriété :

Soient E et F deux ensembles quelconques et f, une application de E dans F.

f est une bijection si et seulement si, pour tout élément y de F, l'équation d'inconnue x, f(x) = y admet une unique solution dans E.

Exemple

On considère la fonction f définie par:. $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x + 3 \end{array}$

- Montrons que f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, l'image de x existe et on a : $f(x) = 2x + 3$ est unique.

De plus, on sait que $D_f = \mathbb{R}$ donc D_f est confondue avec l'ensemble de départ de f.

f est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Montrons que f est une bijection.

  Pour cela, résolvons l'équation $\forall\, y \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

  On a $f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 3 = y \Leftrightarrow 2x = y - 3$ et $x = \frac{1}{2}(y - 3)$.

  $\forall x \in \mathbb{R}, x = \frac{1}{2}(y - 3)$ est unique dans $\mathbb{R}$.

f est donc une bijection. note $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$

Monômes - polynômes

SEQUENCE 20

Développement, réduction

Objectif : Développer et réduire les expressions littérales en utilisant les propriétés et les produits remarquables

Rappels sur les puissances

Propriétés

a et b sont deux nombres non nuls, m et n deux entiers relatifs.

1. $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
2. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
3. $(a^n)^m = a^{n \times m}$
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Développement et réduction

Propriétés

1.a et b sont des nombres. On a :

$a + (b - c) = a + b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$

$a - (b + c) = a - b - c$

Ces règles sont appelées des règles de suppression des parenthèses.

2. Dans une suite d'opérations, la multiplication est prioritaire sur l'addition et la soustraction.
3. Dans une suite d'opérations, l'élévation à une puissance est prioritaire sur la multiplication.

4 .x, y et z étant des nombres, on a :

$x(y + z) = xy + xz$

$x(y - z) = xy - xz$

5. Les égalités remarquables :

a et b étant des nombres, on a :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

<u>Exemple :</u>

Développe et réduis les expressions littérales suivantes :

$A = (2x + 3)^2$

$B = \left(\frac{7}{2}x - 4\right)^2$

$C = (3x - 5)(3x + 5)$

$D = (x + 2)(x - 5) - (x + 3)^2$

$E = (2x - 6)(3 - 4x) + 7x^2$

Corrigé

$A = 4x^2 + 12x + 9$; $B = \frac{49}{4}x^2 - 28x + 16$; $C = 9x^2 - 25$; $D = x^2 - 3x - 10 - x^2 - 6x - 9$

$D = -9x - 19$

$E = 6x - 8x^2 - 18 + 24x + 7x^2$

$E = -x^2 + 30x - 18$

SEQUENCE 21

Factorisation

Objectif : Factoriser les expressions littérales en utilisant les propriétés et les produits remarquables

Définition

Factoriser une expression littérale, c'est la transformer en un produit de facteurs.

Méthode : pour factoriser une expression littérale, on utilise les méthodes suivantes :

- En mettant en facteur les termes communs : $ka + kb = k(a + b)$
- En utilisant les égalités remarquables données au développement
- En combinant ces différentes techniques

SEQUENCE 22

Objectif : factoriser une expression littérale par facteur commun

Définition

Pour factoriser une expression littérale comportant plusieurs termes, on identifie le facteur commun puis on applique l'une des règles

$$ka + kb = k(a + b)$$

$$ka - kb = k(a - b)$$

Exemple :

Factorisons les expressions littérales suivantes

$A = x^2 - x$

$= x(x - 1)$

$B = (2x - 3)(2x + 3) + (x + 1)(2x - 3)$

$= (2x - 3)(2x + 3 + x + 1)$

$= (2x - 3)(3x + 4)$

SEQUENCE 23

Objectif : factoriser une expression littérale à l'aide des égalités remarquables

Propriété

a et b étant des nombres, on a :

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

<u>Exemples</u>

$B = 4x^2 - 4x + 1$ $\quad$ $E = 9 - x^2$ $\quad$ $C = (2x + 1)^2 - (5x - 2)^2$

$D = 9x^2 + 12x + 4$

$B = (2x - 1)^2$ $\quad$ $E = (3 - x)(3 + x)$ $\quad$ $C = (2x + 1 + 5x - 2)(2x + 1 - 5x + 2)$

$D = (3x + 2)^2$

$C = 3(7x - 1)(-x + 1)$

SEQUENCE 24

Objectif : factoriser une expression littérale en utilisant plusieurs techniques

Règle : Dans certaines expressions littérales on trouve des termes comportant des facteurs communs et des égalités remarquables. Dans ce cas on combine les deux techniques pour factoriser.

Exemples :

A= $x^3 - x$

A= $x(x^2\text{-}1)$

A= $x(x+1)(x-1)$

B= $9 - x^2 + (2x+5)(x-3)$

$= -(x^2 - 9) + (2x+5)(x-3)$

$= -(x+3)(x\text{-}3) + (2x+5)(x-3)$

$= (x\text{-}3)(-x\text{-}3+2x+5)$

$B = (x-3)(x+2)$

SEQUENCE 25

Monômes

Objectif : Définir un monôme et déterminer son degré, son coefficient et la variable

Définition

a est un nombre quelconque, n un entier naturel non nul.

L'expression $a \times x^n$ est appelée monôme.

Le nombre a est le coefficient du monôme ;

L'entier naturel non nul est le degré du monôme.

Exemple :

L'expression $5x^7$ est un monôme. Le nombre 5 est son coefficient ; 7 est son degré.

SEQUENCE 26

Polynômes

Objectif : Définir un polynôme et déterminer son degré

Définition

On appelle polynôme une somme de monômes.

Le degré d'un polynôme est le plus grand des degrés des monômes qui interviennent dans son écriture.

Un polynôme peut être développé, réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes ou croissantes de x.

Exemple

$5x^3 + 7x^2 - x + 5$ est un polynôme réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

Son degré est le plus grand des exposants de x c'est-à-dire 3.

Il peut également être factorisé.

Par un polynôme, on peut calculer l'image de tout nombre réel. On dit que les polynômes sont définis sur $\mathbb{R}$.

SEQUENCE 27

Opérations sur les polynômes

Objectif : Effectuer les opérations sur les polynômes

Propriété : On peut faire la somme ou le produit des polynômes. Le résultat d'une somme ou d'un produit de polynômes est un polynôme.

Exercice

On donne deux polynômes f et g tels que :

$f(x) = (x - 1)^2 - (3x + 2)^2$ et $g(x) = x^2 - 2$

Calcule $f(x) + g(x)$; $f(x) \times g(x)$ et $f(x) - g(x)$. Pour chaque résultat, écris le degré du polynôme obtenu.

Corrigé

$f(x) + g(x) = (x - 1)^2 - (3x + 2)^2 + x^2 - 2$

$= x^2 - 2x + 1 - 9x^2 - 12x - 4 + x^2 - 2$

$f(x) \times g(x) = ((x - 1)^2 - (3x + 2)^2)(x^2 - 2)$

$= (x^2 - 2)(x - 1)^2 - (x^2 - 2)(3x + 2)^2$

après développement on obtient :

$f(x) + g(x) = \mathbf{-7x^2 - 14x - 5}$

$f(x) \times g(x) = \mathbf{-8x^4 - 14x^3 + 13x^2 + 20x + 10}$

$f(x) - g(x) = -8x^2 - 14x - 3 - x^2 + 2$

$\mathbf{= -9x^2 - 14x - 1}$

Leçons de la compétence de base 2 du premier trimestre

Propriétés de Thalès

SEQUENCE 28

Configuration de Thalès

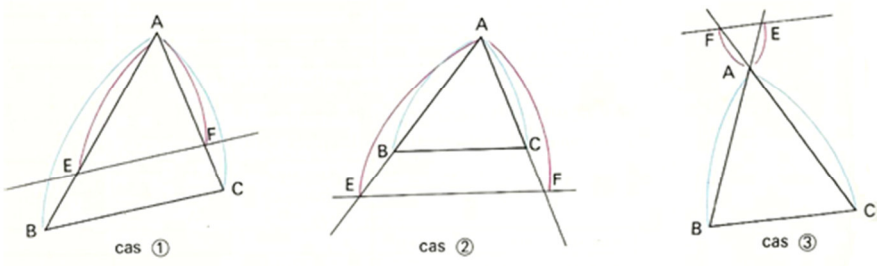
Objectif : Reconnaitre une configuration de Thalès

Configuration de Thalès

Définition

Dans une configuration de deux triangles, les troisièmes côtés sont parallèles. Les côtés de même support ou de supports parallèles sont appelés des cotés associés.

Exemple



Les triangles ABC et AEF sont en configuration de Thalès. On dit aussi que les triangles ABC et AEF sont en position de Thalès

Autrement dit, dans une configuration de deux triangles, les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés associés de l'autre

SEQUENCE 29

Propriété de Thalès dans un triangle

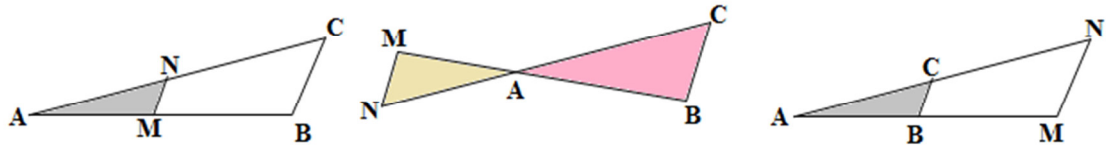
Objectif : connaitre la propriété de Thales et utiliser la propriété de Thalès pour calculer les distances

Propriété de Thalès :

ABC est un triangle, M est un point de (AB) et N un point de (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de N par rapport à A et C.(MN)// (BC) équivaut à $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$;

Conséquence de la propriété de Thalès :

Pour tout triangle ABC, si la droite (MN) est parallèle à (BC), avec M sur (AB) et N sur

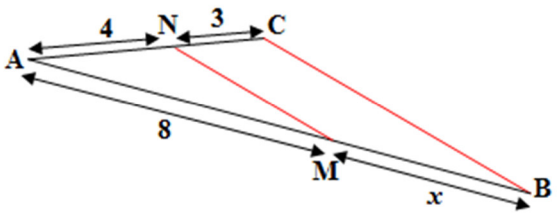


(AC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Exemple

Dans la figure suivante, (BC) est parallèle à (MN).

Calcule *x*.



AC = 4+3 = 7

D'après la propriété de Thales on a : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} \leftrightarrow \frac{4}{7} = \frac{8}{8+x}$

$$4(x+8) = 56$$

$$x = 6$$

Méthode

Pour calculer une longueur, on peut :

- utiliser la propriété de Pythagore ;
- utiliser la propriété de Thalès.

SEQUENCE 30

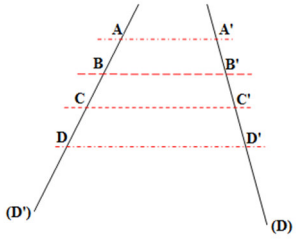
Propriété de Thalès dans le cas général

Objectif : Reconnaitre la configuration de Thalès dans le cas général

Propriété

Des droites parallèles découpent des segments de mesures proportionnelles sur deux droites qui leur sont sécantes.

P est la projection sur (D') parallèlement à (AA')

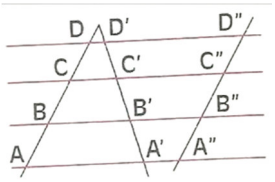


P	
A	A'
B	B'
C	C'
D	D'

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots.$$

Exercice

Sur la figure suivante, les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont parallèles.



Parmi les quotients suivants, note ceux qui sont égaux :

$\frac{AB}{AD}$; $\frac{AB}{AC}$; $\frac{BC}{BD}$; $\frac{A'B'}{A'D'}$; $\frac{A'B'}{A'C'}$; $\frac{B'C'}{B'D'}$; $\frac{A''B''}{A''C''}$; $\frac{A''B''}{A''D''}$; $\frac{B''C''}{B''D''}$.

Corrigé

$\frac{AB}{AD} = \frac{A''B''}{A''D''}$; ; $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$; $\frac{BC}{BD} = \frac{B'C'}{B'D'}$. ; $\frac{A'B'}{A'D'} = \frac{A''B''}{A''D''}$ ……

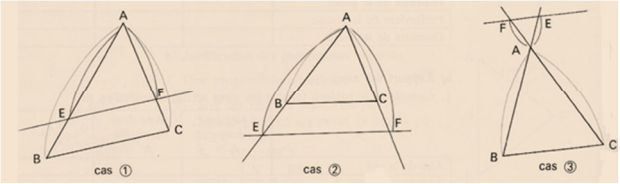
SEQUENCE 31

Réciproque de la propriété de Thalès

Objectifs : -Utiliser la réciproque de la propriété de Thalès pour le parallélisme des droites

-Partager un segment dans un rapport donné

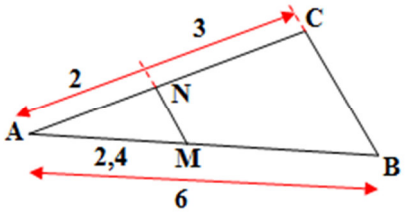
ABC est un triangle, E un point sur (AB) et F un point sur (AC) selon les trois cas de figures suivantes.



Si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exemple

Considère la figure suivante et démontre que les droites(MN) et (BC) sont parallèles.



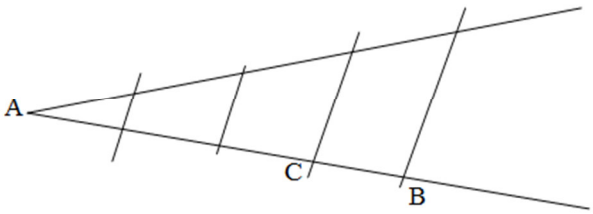
$\frac{AN}{AC}=\frac{2}{5}$; $\frac{AM}{AB}=\frac{2,4}{6}=\frac{2}{5}$ On a donc $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}$ alors d'après la réciproque de la propriété de Thales,les droites (MN) et (BC) sont donc parallèles

▼Méthode

Pour démontrer que deux droites sont parallèles, on peut utiliser la réciproque de la propriété de Thalès.

Partage de segment dans un rapport donné

Par projection de droite à droite, toute graduation régulière devient une graduation régulière. $AC=\frac{3}{4}AB$



SEQUENCE 32

Construction d'une quatrième proportionnelle

Objectif : Construire une quatrième proportionnelle

Définition

a, b et c sont trois longueurs.

On appelle la quatrième proportionnelle des nombres a, b et c pris dans cet ordre le nombre x tel que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

a	c
b	x

Ce tableau est appelé tableau de proportionnalité

▼Méthode de construction et de détermination de la quatrième proportionnelle

Etant donnés trois segments de longueurs a, b et c.

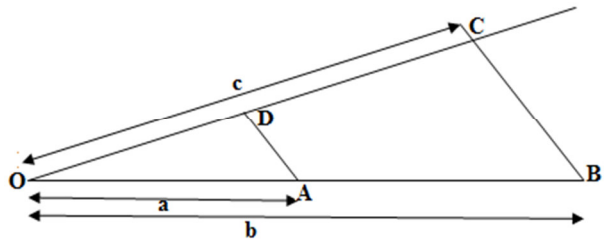
Déterminer la quatrième proportionnelle des nombres a, b et c pris dans cet ordre revient à construire un segment [OD] tel que $\frac{a}{b} = \frac{c}{OD}$.

Pour cela :

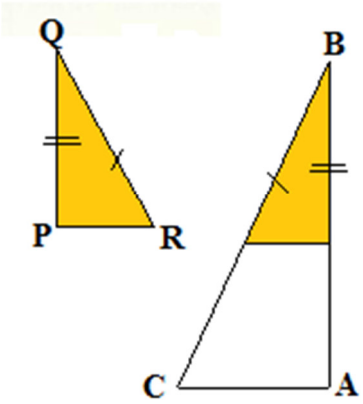
- On trace deux demi-droites de même origine O.
- Sur l'une des demi-droites, on marque deux points A et B tels que OA = a et OB = b.
- Sur l'autre demi-droite, on marque le point C tel que OC = c.
- On trace la droite parallèle à (BC) passant par A. Elle coupe (OC) en D.

En utilisant la propriété de Thalès dans le triangle OBC, on a : $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$.

OD est donc la quatrième proportionnelle des nombres a, b et c.



SEQUENCE 33



Les triangles semblables

Objectif : Reconnaitre deux triangles semblables par leurs propriétés

Propriétés

1. Si deux triangles sont semblables alors leurs côtés sont deux à deux proportionnels.

ABC et PQR sont semblables alors $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$.

Ou bien

2. Si deux triangles sont semblables alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

ABC et PQR sont semblables alors mes$\widehat{P}$ = mes$\widehat{A}$;

mes $\widehat{Q}$ = mes $\widehat{B}$ et mes $\widehat{R}$ = mes $\widehat{C}$

Méthode

Comment reconnaitre deux triangles semblables ?

- Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux proportionnels alors ils sont semblables.

Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure alors ils sont semblables

Trigonométrie dans le triangle rectangle

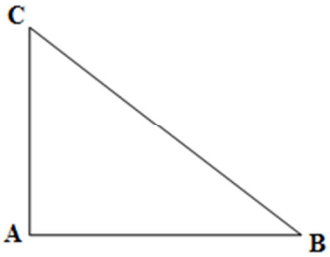
SEQUENCE 34

Propriété de Pythagore

Objectif : Utiliser les propriétés de Pythagore

Propriété de Pythagore

Si un triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

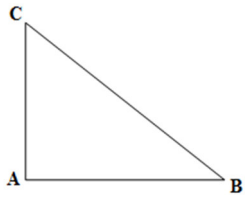


Réciproque de la propriété de Pythagore

Propriété :

Réciproque de la propriété de Pythagore

Si un triangle ABC est tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ce triangle est rectangle en A.



Exemple :ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 5 et AC= 7 ; calcule BC

Solution : D'après la propriété de Pythagore on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$BC^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$; $BC^2 = 74$ d'où $BC = \sqrt{74}$

SEQUENCE 35

Sinus et cosinus d'un angle aigu

Objectif : Connaitre la définition et la notation du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Définition du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu

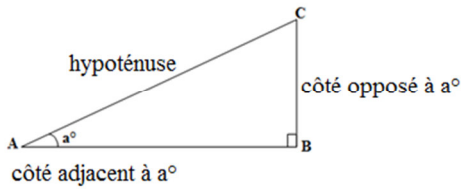
Définition

ABC est un triangle rectangle. On appelle :

Sinus d'un angle aigu, le quotient du côté opposé à cet angle Par l'hypoténuse ;

Cosinus d'un angle aigu, le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse ;

tangente d'un angle aigu, le quotient du côté opposé à cet angle par son côté adjacent



On écrit :

$$\text{Cos } a° = \cos \widehat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan \widehat{A} = \frac{\text{Sin } \widehat{A}}{\text{Cos } \widehat{A}} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{A}}{\text{coté adjacent à l'angle} \widehat{A}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{Sin } a° = \sin \widehat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

Exemple

Exprimons en fonction des côtés du triangle ABC :

Sin $\widehat{B}$; cos $\widehat{B}$; sin $\widehat{C}$; cos$\widehat{C}$.

On a : Sin $\widehat{B}$ $= \frac{AC}{BC}$; cos $\widehat{B} = \frac{AB}{BC}$; sin $\widehat{C} = \frac{AB}{BC}$; cos$\widehat{C} = \frac{AC}{BC}$

SEQUENCE 36

Somme des carrés du cosinus et du sinus d'un angle

Objectif : Calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Propriété :

Pour tout angle aigu de mesure a°, on a :

- $0 < \cos a° < 1$
- $0 < \sin a° < 1$
- $(\cos a°)^2 + (\sin a°)^2 = 1$

Exemple :

$\widehat{A}$ est un angle aigu tel que cos $\widehat{A} = \frac{2}{5}$. Calcule sin $\widehat{A}$.

$\widehat{B}$ est un angle aigu tel que sin $\widehat{B} = \frac{1}{3}$. Calcule cos $\widehat{B}$

Corrigé:

On sait que $\sin^2 \widehat{A} + \cos^2\widehat{A}. = 1$ équivaut à $\sin^2 \widehat{A} = 1 - \cos^2 \widehat{A}$.

$$= 1 - (\frac{2}{5})^2$$

$$= 1 - \frac{4}{25}$$

$$= \frac{21}{25}$$

D'où sin $\widehat{A} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ De la même manière on obtient : cos $\widehat{B} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

SEQUENCE 37

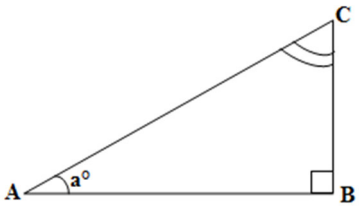
Cosinus, sinus et tangente d'angles complémentaires et particuliers

Objectif : Utiliser la propriété des angles complémentaires

Propriété

Si deux angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont complémentaires

alors sin $\widehat{A}$= cos $\widehat{B}$ et cos $\widehat{A}$ = sin $\widehat{B}$;



On note : cos (90° - $\widehat{A}$) = sin $\widehat{A}$ et sin (90° - $\widehat{A}$) = cos $\widehat{A}$

Les tangentes des deux angles complémentaires d'un triangle

Rectangle sont inverses l'une de l'autre.

tan a° × tan (90° – a°) = 1

tan $\widehat{A}$ × tan $\widehat{C}$ = 1

Exemple :

1°) ABC est un triangle rectangle en A. Calcule sin $\widehat{B}$, sin $\widehat{C}$ et cos $\widehat{C}$, sachant que cos $\widehat{B}$=0,1

2°) EFG est un triangle rectangle en E tel que EF = 3; FG = 5 et GE = 4

Calcule tan $\widehat{F}$ et tan $\widehat{G}$.

Corrigé abrégé

2°) tan $\widehat{F}$ $= \frac{EG}{FG} = \frac{4}{5}$ et tan $\widehat{G} = \frac{EF}{FG} = \frac{3}{5}$

SEQUENCE 38

Cosinus, sinus et tangente d'angles particuliers

Objectif : connaitre les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente des angles

Tableau des sinus, cosinus et tangente des angles particuliers

Le tableau suivant donne les valeurs des sinus et cosinus de quelques angles particuliers

a°	30°	45°	60	90°
Sin *a°*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos *a°*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan *a°*	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Exemple

1) Calcule tan 30° ; tan 45° et tan 60°.

2°) MNP est un triangle rectangle en M tel que tan $\widehat{P}$ = 0,75 et PN = 10. Calcule MN.

Corrigé :

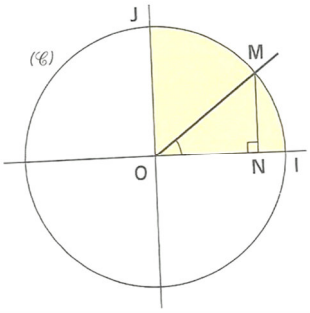
1°) tan 30° $= \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; ; tan 45° = 1 ; tan 60° = $\sqrt{3}$

2°) On sait que

$\tan \widehat{\mathbf{P}} = \frac{MN}{PN}$ équivaut à MN = tan $\widehat{\mathbf{P}}$ x PN = 0 ,75 X10

d'où MN = 7,5

SEQUENCE 39



Utilisation de la trigonométrie

Objectif : Lire directement dans le plan des informations concernant le sinus et le cosinus

Utilisation d'un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé (O, I, J), désignons par (C) le cercle de centre O

et de rayon 1.

On lit : Cos $\widehat{IOM} = \frac{ON}{OM} = ON$

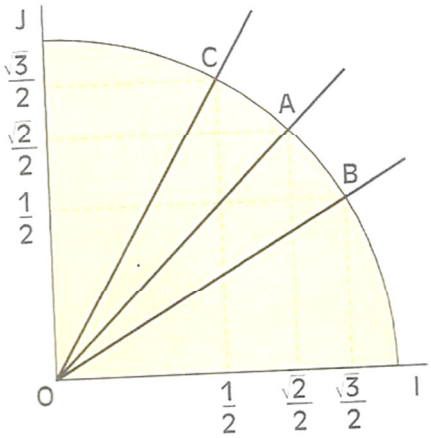
$Sin\,\widehat{IOM} = \frac{MN}{OM} = MN$

On remarque donc que Cos $\widehat{IOM}$ = abscisse de M et sin $\widehat{IOM}$ = ordonnée de M

On peut donc ainsi lire directement dans le plan muni d'un repère

Orthonormé le cosinus et le sinus de certains angles.

- Les cosinus des angles aigus sont rangés dans des ordres contraires à leurs mesures ;
- Les sinus des angles aigus sont rangés dans le même ordre que leurs mesures.



SEQUENCE 40

Lecture d'une table trigonométrique

Objectif : Lire une table trigonométrique en degré.

La table suivante appelée table trigonométrique nous permet d'obtenir le sinus et le cosinus des angles compris entre 0° et 90°.

Degrés	Sin	Cos	
0	0,000	1	90
1	0,017	0,999	89
2	0,035	0,999	88
3	0,052	0,998	87
...	...	...	...
20	0,342	0,939	70
...	...	...	...
32	0,530	0,848	58
...	...	...	...
44	0,694	0,719	46
45	0,707	0,707	45
	Cos	Sin	Degrés

Dans la table, la valeur 32 est dans la colonne marquée degrés en haut. Le sinus est lu sur la même ligne, dans la colonne marquée sin en haut.

On lit donc sin $32° = 0{,}530$

De même sin $44° = 0{,}694$ ....

Dans la table, la valeur 58 est dans la colonne marquée degrés en bas.

Le sinus est lu sur la même ligne, dans la colonne marquée sin en bas.

On lit donc sin $58° = 0{,}848$.

Comme 32° et 58° sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Dans une table trigonométrique, ces deux nombres c'est-à-dire le sinus et cosinus des angles complémentaires figurent sur la même ligne.

Angles inscrits dans un cercle et application aux configurations du plan

SEQUENCE 41

Angle inscrit aigu- Angle au centre

Objectif : Reconnaitre un angle inscrit, le secteur angulaire au centre associé et l'arc qu'ils interceptent

Angle inscrit aigu

Définition

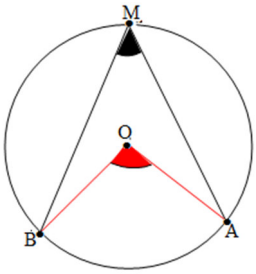
Soit ($\mathcal{C}$) un cercle de centre O.

On appelle angle inscrit dans le cercle ($\mathcal{C}$) un angle formé par deux (2) cordes issues d'un même point du cercle ($\mathcal{C}$).

Angle au centre

Définition

Un angle au centre d'un cercle ($\mathcal{C}$) est un angle dont le sommet est au centre de ce cercle.



Sur la figure ci-contre, l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans le cercle ($\mathcal{C}$) alors que l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre du cercle ($\mathcal{C}$).

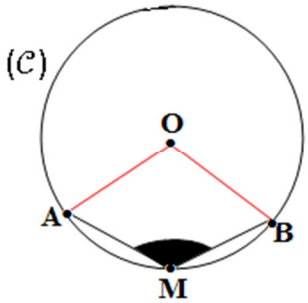
L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ du cercle ($\mathcal{C}$)

Interceptent le même arc de cercle

On dit que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est associé à l'angle aigu inscrit $\widehat{AMB}$.

Angle inscrit obtus

($\mathcal{C}$) est un cercle de centre O.



Sur la figure ci – contre, l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est obtus. Il intercepte l'arc $\breve{AB}$ alors que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$.

SEQUENCE 42

Mesure d'un angle inscrit

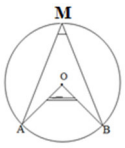
Objectif : Utiliser la propriété des angles inscrits et du secteur angulaire associé pour déterminer la mesure d'un angle et l'égalité de deux angles

Cas d'un angle aigu inscrit dans un cercle

Propriété

Un angle aigu inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

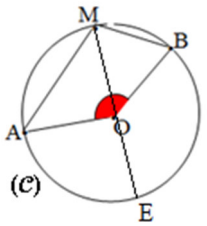
$$\text{mes}\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}$$



Cas d'un angle obtus inscrit dans un cercle

Propriété

Soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et $\widehat{AMB}$ un angle obtus inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$.



$$\text{mes}\widehat{AMB} = \frac{1}{2}(\text{mes}\widehat{AOE} + \text{mes}\widehat{BOE})$$

$$\text{mes}\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}.$$

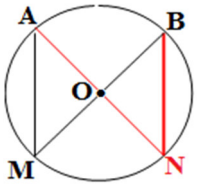
Exemple : Soit un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O. Considérons les deux angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.

a) Quels sont les angles au centre associés respectivement aux deux angles inscrits ci-dessus spécifiés ?

b) Ecris la relation liant la mesure de l'angle inscrit à celle de son angle au centre associé en complétant :

$mes\,\widehat{AMB} =$

$mes\,\widehat{ANB}$



Solution

a)les deux angles inscrits sont associés au même angle au centre $\widehat{AOB}$;

b) $mes\,\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$. $mes\,\widehat{ANB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$. Donc $mes\,\widehat{AMB} = mes\,\widehat{ANB}$

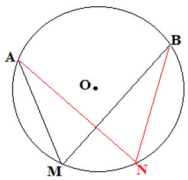
SEQUENCE 43

Angles inscrits interceptant le même arc

Objectif : Reconnaitre deux angles inscrits interceptant le même arc

Propriétés

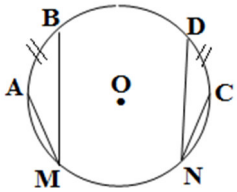
1. Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.



$\boxed{\widehat{AMB} \text{ et } \widehat{ANB} \text{ interceptent le même arc} \widehat{AB}}$

$\boxed{\text{mes } \widehat{AMB} = \text{mes } \widehat{ANB}}$

2. Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont la même mesure.



$\Updownarrow$

Longueur $\widehat{AB} = longueur\ \widehat{CD}$

$mes\ \widehat{AMB} = mes\ \widehat{DNC}$

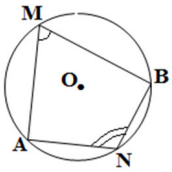
SEQUENCE 44

Quadrilatère inscriptible dans un cercle

Objectif : Justifier qu'un quadrilatère est inscriptible

Propriété

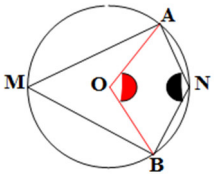
Si un quadrilatère est inscriptible dans un cercle, alors ses angles opposés sont supplémentaires



$\text{mes}\widehat{\text{AMB}} + \text{mes}\widehat{\text{ANB}} = 180°$
$\text{mes}\widehat{\text{MAN}} + \text{mes}\widehat{\text{MBN}} = 180°$

Exemple

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O. A, B, M et N sont des points de ce cercle $(\mathcal{C})$ tels que $\widehat{\text{AMB}}$ est un angle aigu et $\widehat{\text{ANB}}$ est un angle obtus.



Exprime $mes\widehat{\text{AMB}}$ et $mes\widehat{\text{ANB}}$ en fonction de $mes\widehat{\text{AOB}}$ et justifie que les angles $\widehat{\text{AMB}}$ et $\widehat{\text{ANB}}$ sont supplémentaires.

Solution : $mes\widehat{\text{AMB}} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{\text{AOB}}$ Et

$mes\ \widehat{\text{ANB}} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{\text{AOB}}$

$mes\widehat{\text{AMB}} + mes\widehat{\text{ANB}} = 180°$ alors les angles $\widehat{\text{AMB}}$ et $\widehat{\text{ANB}}$ sont supplémentaires.

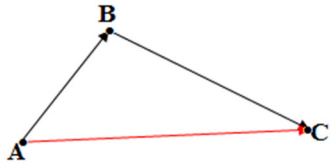
Vecteurs et opérations

SEQUENCE 45

SOMME DE VECTEURS

Objectif : Construire la somme et la différence de deux vecteurs

Egalité de Chasles

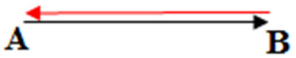


A, B et C sont des points distincts du plan.

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (la relation de Chasles)

On dit que $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Vecteurs opposés



A et B étant des points distincts du plan, on a :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés

On écrit alors $\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$

SEQUENCE 46

Réduction de sommes de vecteurs

Objectif : Réduire une somme de vecteurs

▼Méthode de calcul d'une somme de vecteurs

Pour effectuer le calcul d'une somme de vecteurs, on peut regrouper certains de ces vecteurs afin d'appliquer la relation de Chasles ou faire des transformations d'écritures ou encore remplacer certains vecteurs par des vecteurs égaux.

Exemple

Calculons: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$. A, B, C, D, E étant des points du plan.

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ED}) - \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}$

$= \vec{0}$

On a donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

SEQUENCE 47

Produit d'un vecteur par un nombre

Objectif : Construire un représentant du vecteur k. $\overrightarrow{AB}$ connaissant $\overrightarrow{AB}$ et le réel k

Définition

On dit que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est le produit du vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par le réel k si :

- (MN) et (AB) ont la même direction ;
- $\overrightarrow{MN}\ et \overrightarrow{AB} \begin{cases} ont\ le\ même\ sens\ si\ k > 0 \\ ont\ des\ sens\ contraires\ si\ k < 0 \end{cases}$
- $MN = |k|.\ AB.$

On a aussi :

- $k.\vec{O} = \vec{O}.$
- $0 \times \overrightarrow{AB} = \vec{O}$

Propriétés

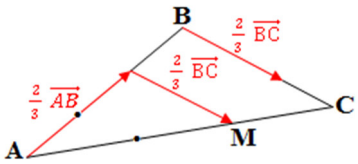
A, B, C et D sont des points du plan, k et h sont des nombres réels. On a :

1. $k \times (h).\overrightarrow{AB} = (k \times h).\overrightarrow{AB}$
2. $k.\overrightarrow{AB} + h.\overrightarrow{AB} = (k + h).\overrightarrow{AB}.$
3. $k.\overrightarrow{AB} + k.\overrightarrow{CD} = k.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}).$
4. $1.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

Exemple :

ABC est un triangle.

Construisons le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$



Par le calcul, on a : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Le point M est le point du plan tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

SEQUENCE 48

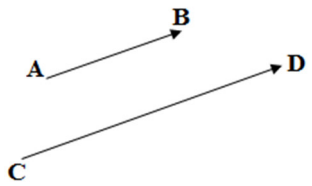
Vecteurs colinéaires-vecteurs directeurs

Objectif : Déterminer des vecteurs colinéaires

Définition et propriété

Définition

Deux vecteurs sont dits colinéaires lorsqu'ils ont même direction ou lorsque l'un d'eux est le vecteur nul.



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

On peut écrire : $\overrightarrow{CD} = k \,.\, \overrightarrow{AB}$ ($k \in \mathbb{R}^*$)

$\overrightarrow{AB} = h \,.\, \overrightarrow{CD}$ ($h \in \mathbb{R}^*$).

Propriété

A et B sont deux points du plan.

$\boxed{M \in (AB)}$ équivaut à $\boxed{\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires}}$

On peut écrire : $\overrightarrow{AM} = k \,.\, \overrightarrow{AB}$ *(*$k \in \mathbb{R}^*$)

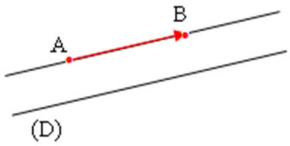
Exemple

On a $M \in (AB)$ donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et on peut écrire $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

On dit que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (D) lorsque les droites (D) et (AB) sont parallèles.



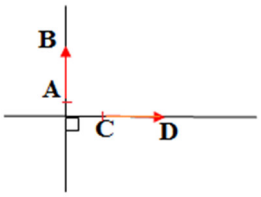
SEQUENCE 49

Vecteurs orthogonaux

Objectif : Déterminer des vecteurs orthogonaux

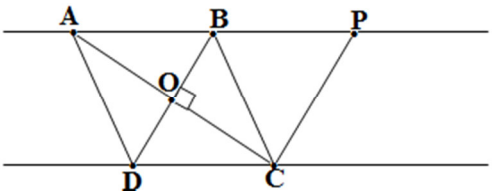
Propriété

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.



On a : (AB) perpendiculaire à (CD) donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

Exercice



Cite les vecteurs qui sont égaux deux à deux.

Cite les vecteurs qui sont orthogonaux deux à deux.

Corrigé

Les vecteurs égaux deux à deux : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} = .\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{PC}$ ……..

Les vecteurs qui sont orthogonaux : $\overrightarrow{BO} \perp \overrightarrow{OC}$. ; $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$. ……

Translation

SEQUENCE 50

Translation

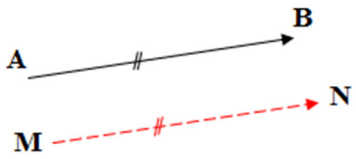
Objectif : Utiliser une translation pour construire

Définition

Soient A et B deux points du plan.

L'image d'un point M par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point N tel que :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.



On note cette translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ et on a : $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = N$.

N est appelé le translaté de M par $\overrightarrow{AB}$.

Définir une translation, c'est déterminer le vecteur de la translation.

Images des figures simples par une translation

Propriété des images par une translation

Propriétés

Par une translation :

1. Des points alignés ont pour images des points alignés ;
2. Un segment a pour image un segment de même longueur. On dit qu'une translation conserve les distances ;
3. L'image d'une droite est une droite ;
4. L'image d'un angle est un angle de même mesure. On dit qu'une translation conserve les Mesures d'angles.

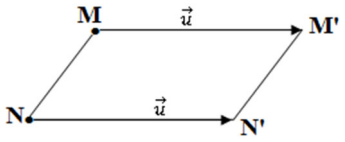
SEQUENCE 51

Translation et configuration plane

Objectif : Utiliser une translation pour démontrer

Propriété fondamentale

Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par $t_{\vec{u}}$, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.



Deux points distincts du plan et leurs images par une même translation forment un parallélogramme.

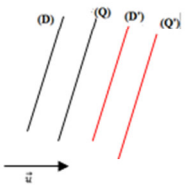
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ équivaut à MNN'M' est un parallélogramme.

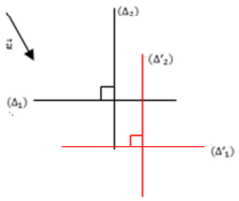
Translation et droites

Propriétés

Par une translation :

1. Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles ;
2. Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.





SEQUENCE 52

Translations successives : composition de translations

Objectif : Composer des translations

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

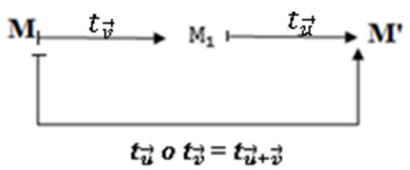
La composée de deux translations de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

On écrit donc $t_{\vec{u}}$ o $t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

Autrement dit :

Faire la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ revient à faire la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

En schématisant, on a :



Donc on obtient : $t_{\vec{u}}$ o $t_{\vec{v}}$:M $\rightarrow$ M'.

On a alors : $(t_{\vec{u}} \text{ o } t_{\vec{v}})(M) = t_{\vec{v}}(t_{\vec{u}}(M)$

$= t_{\vec{v}}(M_1) = M'$

Donc $(t_{\vec{u}} \text{ o } t_{\vec{v}})(M) = M'$

Coordonnées d'un vecteur

SEQUENCE 53

Calculs et coordonnées de vecteurs

Objectif : Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, connaissant les coordonnées des points A et B ;

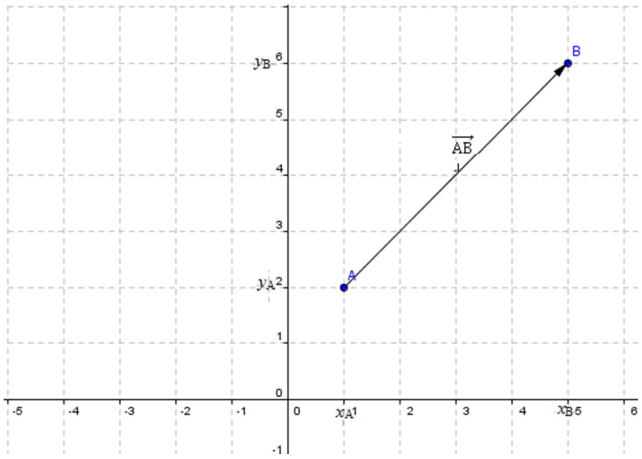
Calcul des coordonnées d'un vecteur défini par deux points

Définition

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne deux points $A(x_A ; y_A)$. et $B(x_B ; y_B)$.

On appelle couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le couple de nombres (x ; y) tels que :

$x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$ et $\overrightarrow{AB} = x.\overrightarrow{OI} + y.\overrightarrow{OJ}$.



On note $\overrightarrow{AB}$ $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$

▼Remarque

On peut déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par simple lecture graphique. Pour cela, l'abscisse du vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond au nombre d'unités comptées sur l'axe des abscisses en allant de l'abscisse de A à l'abscisse de B.

L'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond au nombre d'unités comptées sur l'axe des ordonnées en allant de l'ordonnée de A à l'ordonnée de B.

Exemple

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points A(5 ; - 4) ; B(10 ; 2) ; C(- 1 ; - 3).

Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}$.

Corrigé

$\overrightarrow{AB} = (5; 6)$; $\overrightarrow{BA}(-5; -6)$; $\overrightarrow{AC}(-6; 1)$ *et* $\overrightarrow{BC}(-11;\ -5)$

SEQUENCE 54

Calcul des coordonnées d'un point A ou B connaissant celles du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et celles de l'un des deux points

Objectif : calculer les coordonnées d'un point A ou B, connaissant les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de l'un de ces points

Règle

Dans un repère orthonormé (O, I, J), si A(a ;b) et $\vec{u}$(x ;y), les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ sont données par les relations $x_B = x + a$ et $y_B = y + b$.

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne le point A(2; 3) et $\vec{u}(4\ ;4)$.

Détermine les coordonnées du point B pour que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

SEQUENCE 55

Calcul des coordonnées d'une somme de vecteurs

Objectif : calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs,

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), A, B, C et D sont des points.

Si $\overrightarrow{AB}(x; y)$ et $\overrightarrow{CD}(x'; y')$ alors la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées

$(x + x'\ ;\ y + y')$.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}(2\ ;\ 5)$ et $\overrightarrow{CD}(-\ 6\ ;\ 3)$. Calcule les coordonnées de la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

SEQUENCE 56

Calcul des coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre

Objectif : calculer les coordonnées du vecteur $k\overrightarrow{AB}$

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), A et B sont des points et k un nombre.

Si $\overrightarrow{AB}(x\ ;\ y)$ alors $k.\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(kx\ ;\ ky)$.

On note : $k.\overrightarrow{AB}(kx\ ;\ ky)$.

<u>Exemple :</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne : $\overrightarrow{OA}(\frac{1}{2}\ ;\ 3)$ et $\overrightarrow{OB}(-\ 1\ ;\ -\ 6)$.

1) Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
2) Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC}$.

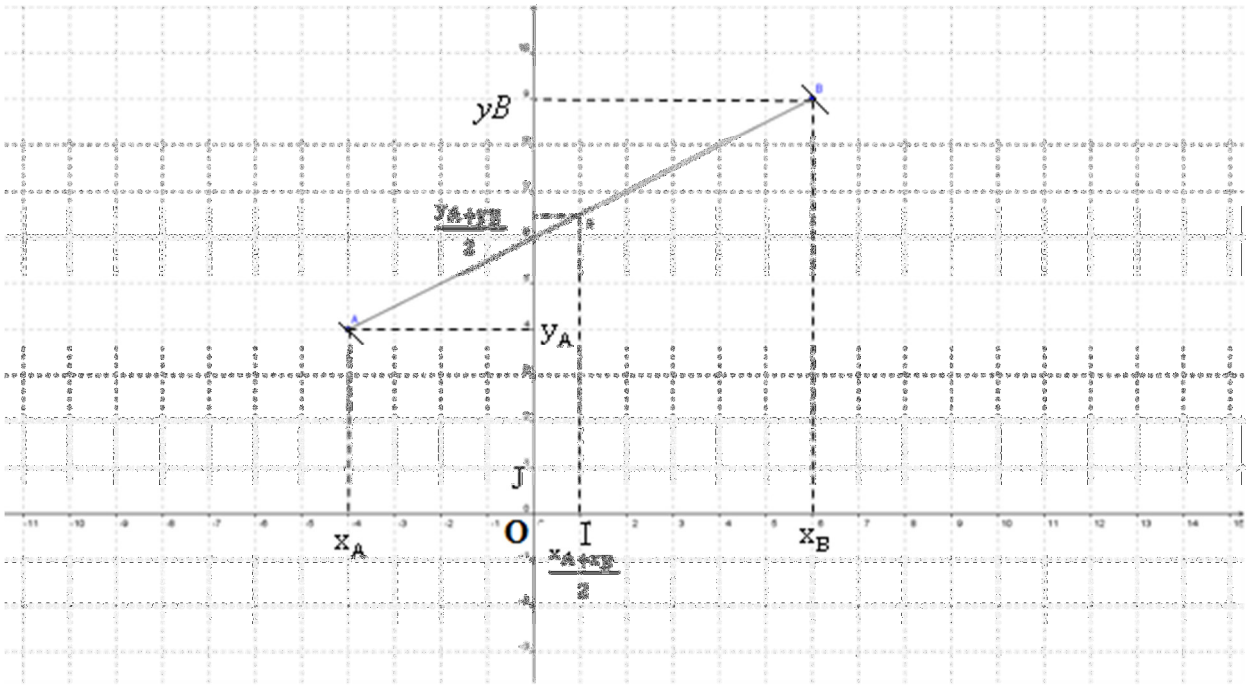
SEQUENCE 57

Calcul des coordonnées du milieu d'un segment

Objectif : calculer les coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ Si K est le milieu du segment [AB] alors les coordonnées du point K sont : $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$



On note : $K\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(2 ; - 3) et $B(\frac{3}{2} ; -5)$.

Calculons les coordonnées du point K, milieu de [AB].

On a : $K\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{2 + \frac{8}{2}}{2} ; \frac{-3 + (-5)}{2}\right) \Leftrightarrow K\left(\frac{\frac{7}{2}}{2} ; \frac{-8)}{2}\right)$

$\Leftrightarrow K\left(\frac{7}{4} ; -4\right)$

SEQUENCE 58

Vecteurs colinéaires

Objectif : justifier à l'aide de leurs coordonnées, que deux vecteurs sont colinéaires

Vecteurs colinéaires

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), les vecteurs $\overrightarrow{AB}(x\ ;\ y)$

et $\overrightarrow{A'B'}(x'\ ;\ y')$ sont colinéaires si $xy' - x'y = 0$.

<u>Exemple :</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les vecteurs $\overrightarrow{AB}(\ 2\ ;\ \frac{2}{3})$

et $\overrightarrow{CD}(3\ ;\ 1)$. Démontre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction.

Corrigé :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction si et seulement si ils sont colinéaires

A –t-on : $xy' - x'y = ?\ 0$

$2x1 - 3x\frac{2}{3} = 2 - 2 = 0$ donc Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction

SEQUENCE 59

Vecteurs non nuls orthogonaux

Objectif : Justifier à l'aide de leurs coordonnées, que deux vecteurs sont orthogonaux ;

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}(x\ ;\ y)$

et $\overrightarrow{A'B'}(x'\ ;\ y')$ sont orthogonaux si $xx' + yy' = 0$.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(-1\ ;\ 3)$

et $B(6\ ;\ 2)$.

Montre que les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

Corrigé : les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteus

$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux c'est-à-dire : $xx' + yy' = 0$.

$\overrightarrow{OA}$ (-1 ;3) et $\overrightarrow{OB}$ (6 ; 2)

$xx' + yy' = (-1)x6 + 3x2$

$= -6 + 6 = 0$ Alors les droites (OA) et (OB) sont donc perpendiculaires.

SEQUENCE 60

Alignement de trois points donnés par leurs coordonnées

Objectif : Justifier, à l'aide de leurs coordonnées, que trois points sont alignés ;

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), trois points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points

A(1 ; - 2), B(- 1 ; - 1)

et C(5 ; - 4). Démontre que les points A,B et C sont alignés.

SEQUENCE 61

Calcul des coordonnées de l'un des deux vecteurs colinéaires connaissant celles de l'autre

Objectif : calculer les coordonnées de l'un des deux vecteurs colinéaires connaissant celles de l'autre.

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), le vecteur $\vec{v}(x ; y)$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(a ; b)$ donné si $ay - bx = 0$.

▼Méthode

Pour déterminer les coordonnées (x ; y) du vecteur $\vec{v}$ colinéaire au vecteur $\vec{u}$, on donne une valeur quelconque à x et on tire y ou bien, on donne une valeur quelconque à y et on tire x dans l'équation $ay - bx = 0$, les coordonnées (a ; b) du vecteur $\vec{u}$ étant connues.

Exemple

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne le vecteur $\vec{u}(3 ; - 2)$.

Détermine les coordonnées (x ; y) d'un vecteur $\vec{v}$ qui soit colinéaire à $\vec{u}$.

SEQUENCE 62

Calcul des coordonnées de l'un des deux vecteurs orthogonaux connaissant celles de l'autre

Objectif : calculer les coordonnées de l'un des deux vecteurs orthogonaux connaissant celles de l'autre;

Propriété : Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), le vecteur $\vec{v}(x ;y)$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}(a ; b)$ donné si $ax + by = 0$.

▼Méthode

Pour déterminer les coordonnées (x; y) du vecteur $\vec{v}$ orthogonal à un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées ($a; b$), on donne une valeur quelconque à x et on tire y ou bien, on donne une valeur quelconque à y et on tire x dans l'équation $ax + by = 0$.

Exemple

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), on donne le vecteur $\vec{u}(2 ; 3)$.

Détermine les coordonnées (x ; y) d'un vecteur $\vec{v}$ qui soit orthogonal à $\vec{u}$.

SEQUENCE 63

Distance de deux points donnés par leurs coordonnées

Objectif : calculer la distance de deux points donnés par leurs coordonnées

Propriété

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), si les points A et B ont pour coordonnées respectives (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B) alors la distance AB est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)2 + (y_B - y_A)2}$$

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(- 1; 2) et B($\frac{-3}{2}$; $\frac{-1}{2}$).

Calcule les distances OA, OB et AB.

Corrigé

$$OB = \sqrt{(x_B - x_O)2 + (y_B - y_O)2}$$

$$= \sqrt{(\frac{-3}{2} - 0)2 + (\frac{-1}{2} - 0)2}$$

$$OB = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad de\ meme\ OA = \sqrt{5}\ .\ AB = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

EXERCICES D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 1 DU PREMIER TRIMESTRE

1. Ecris plus simplement

$A = \sqrt{125}$; $B = 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}$; $C = (\sqrt{18})^2 \times \sqrt{2}$; $D = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$; $E = \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{12}$; $F = \sqrt{\frac{15}{14}} \times \sqrt{\frac{35}{6}}$ $G = \sqrt{8} \times \sqrt{72} \times \sqrt{121}$; $H = \sqrt{45} \times \sqrt{\frac{26}{30}} \times \sqrt{\frac{27}{13}}$; $I = \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$ $J = \sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 5\sqrt{300}$; $K = \sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{175}$;

$L = \sqrt{42 - \sqrt{42 - \sqrt{42 - \sqrt{36}}}}$; $M = \sqrt{10^5}$;

2. Développe les produits suivants :

$\sqrt{2}(5 + 3\sqrt{2})$; $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$; $(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$; $(2\sqrt{7} + 1)^2$; $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$; $(\sqrt{3} + \sqrt{27})^2$; $(5\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 3)$; $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5})$.

3. Ecris sans radical au dénominateur les nombres suivants :

$A = \frac{1}{\sqrt{7}}$; $B = \frac{3}{\sqrt{5}}$; $C = \frac{-4}{-1+\sqrt{3}}$; $D = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; $E = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$; $F = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$; $G = \frac{2}{-1-\sqrt{3}}$;

$H = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; $I = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Factoriser : $x^2 - 25$; $x^2 - 11$; $5x^2 - 13$; $x^2 - 7$; $4x^2 - 18$.

4. a) Montre que les nombres réels $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont inverses l'un de l'autre.

a) Montre que les réels $\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont opposés l'un de l'autre.

5. x est un nombre réel positif.

a) Développe puis réduis $(3 - \sqrt{2})^2$.

b) Factorise $x^2 - (11 - 6\sqrt{2})$.

6. Calcule :

$\sqrt{(2\pi - 6)^2}$; $\sqrt{(7 - 2\pi)^2}$; $\sqrt{(7 - \sqrt{51})^2}$.

7. Effectue les calculs suivants :

$A = \left|\frac{2\sqrt{2}-3}{+4}\right|$; $B = |\pi - 4| \times |\pi + 4|$; $C = \left|\frac{-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}\right|$; $D = \left|\frac{225}{-5}\right| \times \left|\frac{-15}{45}\right|$.

8. Détermine les valeurs de x pour lesquelles on a les égalités suivantes :

a) $|2x| = 5$; b) $|3 - 2x| = 1$.

9. Détermine les valeurs de x pour lesquelles les inégalités suivantes sont vraies :

a) $|x + 1| \leq 2$; b) $|x| < 3$; c) $|2x - 3| < 1$; d) $|3x| \leq 9$.

Pour chacun des cas, exprime les écritures obtenues en intervalles puis représente ces intervalles sur une droite munie d'un repère (O, I).

10. Traduis à l'aide d'inégalités l'appartenance de x à chacun des intervalles suivants :

[-3 ;2[;]4,1 ;7[;]←; −5] ;]-2 ;→[; [-1 ;4] ; [-5 ;-3[.

11. Représente sur une droite graduée et écris sous forme d'inégalités les intervalles suivants:

]-2 ; →[; [-1 ;→[;]-2,-1[∩[-1 ;→[.

]-2 ;] ∩ [−1; 1] ;]←;-3] ∩ [−3; 2].

12. A l'aide d'une calculatrice, détermine la valeur approchée de chacun de nombres suivants :

$\sqrt{7}$; $\sqrt{131}$; $\sqrt{79}$; $\frac{241}{53}$.

a) Détermine l'encadrement de chacun de ces nombres réels par des décimaux d'ordre 3.
b) Précise pour chacun de ces nombres réels les approximations décimales par défaut et par excès à 10^{-3} près.
c) Pour chacun de ces nombres, détermine une valeur approchée à 10^{-4} près.

13. Compare les nombres suivants:

$5\sqrt{3}$ et $3\sqrt{5}$; $6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$; $3\sqrt{7}$ et 8 ; $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$; $\sqrt{2}$ - $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

14. On considère la fonction définie de l'ensemble ℝ dans ℝ par : $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

a) f est-elle une application de ℝ dans ℝ ? Justifie ta réponse.

b) Détermine le domaine de définition de f, qu'on note D_f sous forme d'intervalle.

c) Considérons la fonction $g : \begin{matrix} D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x-1} \end{matrix}$.

g est-elle une application de $D_f \longrightarrow \mathbb{R}$?

15. Soit A = {-5 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$; 2,5} et. $\begin{array}{l} f: A \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2}{|x|-1} \end{array}$

a) Détermine l'ensemble de définition D_f de *f*.

f est-elle une application de A dans $\mathbb{R}$?

b) Calcule les images des nombres -2 ; 0 ; $\frac{1}{2}$ et $\sqrt{3}$ par *f*.

c) Trouve les antécédents de -4 et $\frac{1}{2}$ par *f*.

16. On considère les fonctions suivantes :

$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x-1 \end{array}$ et $\begin{array}{l} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2-1}{x+1} \end{array}$.

a) *f* et g sont-elles égales sur $\mathbb{R}$? Justifie.

b) Montre que *f* et g sont égales sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty;[$.

17. On donne les fonctions suivantes :

$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$; $g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array}$; $h: \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$; $i: \begin{array}{l}]0; +\infty[\to [0; +\infty[\\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$; $j: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto |x| \end{array}$.

Parmi ces fonctions, lesquelles sont des applications simples ? Lesquelles sont des bijections ?

18. *f* et *g* sont des fonctions telles que :

$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array}$ et. $\begin{array}{l} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x+1 \end{array}$

a) *f* et *g* sont-elles des applications ?

b) Détermine les composées *fog* et *gof*. A-t-on *fog* = *gof* ?

19. On donne les fonctions suivantes :

$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2+1 \end{array}$; $\begin{array}{l} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x \end{array}$ et . $\begin{array}{l} h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$

Calcule : $(fog)(x)$; $(foh)(x)$; $(goh)(x)$; $(gof)(x)$ et $(hof)(x)$.

20. a est un nombre non nul. Ecris plus simplement les expressions suivantes :

$A = a^{-2} \times a^5$; $B = a^{-2} \times a^{-3}$; $C = (a^{-2})^{-3}$; $D = (a^{-3})^2$; $E = (a^4)^{-2}$;

$F = \frac{a^{-2}}{a^{-3}}$; $G = \frac{a^{-3}}{a^{-4}}$; $H = \frac{a^4}{a^{-5}}$.

21. Développer puis réduire les expressions suivantes et donne le degré des polynômes obtenus:

$A = \frac{1}{3}x(6x - 9)$; $B = (3x - 2)(4x + 1) - 5x^2$; $C = (3x + 1)(2x - 5)$;

$D = (-x - 6)(-3x + 8) - 2x^2 + 48$; $E = (3x - 5)^2$; $F = (-2x - 4)^2$;

$G = (4x - \frac{5}{2})^2$; $H = -(2x - 3)(2x + 3)$; $I = (x + 2)(x - 1) - (x - 3)^2$;

$J = 2(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4})^2$; $K = 3(x^2 - 1) + (4x - 3)(x + 1) - 5x(1 - 2x)$;

$L = -4(a + 3)^2 + 5(a - 2)(a + 2) - 3a(3 - a)$.

22. Factoriser les expressions suivantes:

$A = 2a(a - 1) + 3(a - 1)$; $B = -x(2x - 3) - 2x(2x - 3)$;

$C = 4a(3b - \frac{1}{2}) - 3a(6b - 1)$; $D = -5x(x + 1) + (x + 1)^2$; $E = x^2 - 64$;

$F = 25b^2 - 49$; $G = (x - 2)^2 - 3x + 6$; $H = 4(x + 1)^2 - (3 - 2x)^2$;

$I = (2x - 3)(x - 7) + x^2 - 14x + 49$; $J = x^2 - 2x + 1$; $K = 4a^2 + 12a + 9$;

$L = 9x^2 - 12x + 4$; $M = 25 - 4x^2 - (5 - 2x)(2x - 5)$;

$N = x^2 - 4x + 4 - 3x(2 - x)$.

23. On donne le polynôme f défini par:

Pour tout x réel, $f(x) = 9x^2 - (2x + 1)^2$.

a) Développe, réduis et ordonne $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

b) Factorise $f(x)$.

c) En utilisant la forme qui te donne le plus rapidement possible ou le plus facilement le résultat, calcule : $f(0)$; $f(-\frac{1}{3})$;

$f(\frac{1}{3})$; $f(-\frac{1}{5})$; $f(\frac{1}{5})$; $f(1)$; $f(\sqrt{2})$; $f(-\sqrt{2})$; $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$

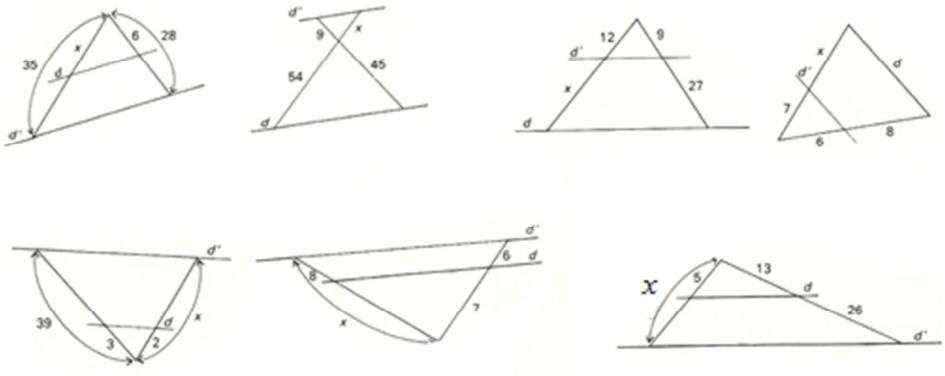
d) Résous dans /R l'équation $f(x) = 0$.

24. a) donne une méthode simple te permettant de calculer le produit de deux nombres de deux chiffres qui se terminent par 1.

b) Calcule rapidement : 41×51 ; 31×91 ; 61×81 ; 71×21.

Exercices d'entrainement de la compétence de base 2 du premier trimestre

1. Dans chacun des cas suivants, calcule *x*.



2 . ABC est un triangle rectangle tel que AB = 7,5cm et AC = 3cm.

Les points M et N appartiennent respectivement aux demi-droites [AB) et [AC) et sont tels que AM = 12,5 et AN = 5.

Justifie que (MN) et (CB) sont parallèles.

3. C et D sont deux points du plan tels que :CD = 7cm.

a) Construis un point N de la droite (CD) tel que $\frac{CN}{CD} = \frac{3}{5}$.

b) Trouve un point P de (CD) distinct de N tel que $\frac{CP}{CD} = \frac{3}{5}$.

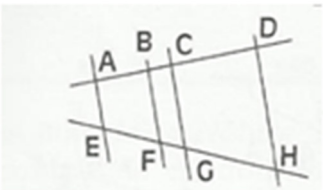
4. ABC est un triangle.

I est un point du segment [AB] non confondu aux extrémités A et B. (D) est la droite passant par le point C et parallèle à (AB).

La droite passant par I et parallèle à (BC) coupe la droite (AC) au point J et la droite (D) au point K.

Démontre que les triangles ABC et JCK sont semblables. Cite les sommets homologues de ces triangles.

5. Sur la figure ci-dessous, les droites (AE) ; (BF) ; (CG) et (DH) sont parallèles.

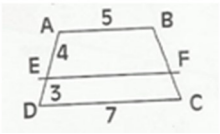


a) Pour EF = 5 ; AC = 6 et AB = 4, calcule EG.

b) Pour EH = 3,5 ; AB = 4 et AD = 7, calcule EF.

c) Pour FG = 5 ; GH = 2,5 et CD = 1,5 ; calcule BC.

6. Sur la figure suivante, les droites (AB) ; (EF) et (DC) sont parallèles. Calcule EF.



7. ABC est un triangle et le point I est milieu du segment [AB]. La droite passant par I et parallèle à (BC) coupe la droite (AC) au point J.

La droite passant par J et parallèle à (AB) coupe la droite (BC) au point K. M est le point d'intersection des droites (IC) et (JK).

Démontre que :

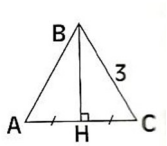
a) (IK) est parallèle à (AC).

b) M est le milieu de [JK]

8. ABCD est un carré tel que AC = $6\sqrt{2}$. Calcule la longueur du côté de ce carré.

9. ABC est un triangle équilatéral:

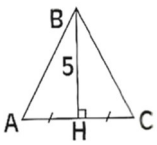
1. de côté c = 3cm.



a) Calcule la hauteur BH.

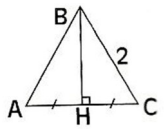
b) On donne 1,732< $\sqrt{3}$< 1,733. Calcule l'approximation d'ordre deux de BH.

2. de hauteur BH = 5cm.



Calcule la longueur du côté de ce triangle.

3. de côté = 2cm.



a)Calcule BH.

b) Enonce un programme de construction d'un segment [MP] tel que MP = 3.

10. (C) est le cercle de centre O et de rayon R = 4cm. [AB] est une corde de (C) de longueur 3cm.

Calcule la distance de O à cette corde.

11.ABC est un triangle rectangle en B tel que :

a) AC = 7,5cm et BC = 4,5cm. Calcule $\sin\widehat{A}$.

b) AC = 32,5cm ; $\sin\widehat{A} = \frac{3}{5}$ et $\cos\widehat{A} = \frac{12}{13}$. Calcule AB et BC.

c) $\sin\widehat{A} = \frac{2}{3}$. Calcule $\cos\widehat{A}$.

d) $\cos\widehat{A} = \frac{9}{41}$. Calcule $\sin\widehat{A}$

e) mes$\widehat{A}$ = 30°et AB = 2cm. Calcule AC et BC.

f) mes$\widehat{A}$ = 60° et AC = 2cm. Calcule BC et AB.

g) $\tan\widehat{A} = \frac{4}{3}$ et BC = 2cm. Calcule AB et AC.

h) mes$\widehat{A}$= 60° et BC = 12cm. Calcule AB et AC.

i) $\tan\widehat{C} = \sqrt{2} - 1$. Calcule $\tan\widehat{A}$.

j) Calcule $\tan\hat{A}$ lorsque :

- $\sin\widehat{A} = \frac{1}{3}$ et $\cos\widehat{A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\sin\widehat{C} = \frac{3}{5}$ et $\cos\widehat{C} = \frac{4}{5}$.ABC est un triangle rectangle en A tel que :

a) AC = 10,8cm et BC = 13,5cm. Calcule $\cos\widehat{C}$.

b) AB = 7,5cm et AC = 12,5cm. Calcule $\tan\widehat{C}$.

12. Sachant que :

a) Cos α = $\frac{3}{4}$ et tan α = $\frac{\sqrt{7}}{3}$, calcule sin α.

b) Cos β = 3sin β, calcule les valeurs exactes de tan β ; sin β et cos β.

c) Sin 15° $= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, montre que cos 15° $= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

13. Trace un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 8cm et $mes\widehat{ABC} = 36°$.

a) Calcule AC.

b) Soit H, le pied de la hauteur issue de A. Calcule AH.

c) Soit M le point d'intersection de la droite (CA) et de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Calcule BM.

d) Soit N le point d'intersection de la droite (AB) et de la médiane issue de C. Calcule CN.

14. ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O.

a) Calcule la mesure de chacun des angles des triangles COD, ABC et ACD.

b) Calcule la mesure de chacun des angles du quadrilatère OCDE.

c) Calcule la mesure de chacun des angles du quadrilatère ABDE. Détermine la nature du quadrilatère ABDE.

15. ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O tel que : $mes\widehat{DCA} = 30°$ et $mes\widehat{CAB} = 45°$.

Calcule la mesure de chacun des angles $\widehat{DOA}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{ODA}$, $\widehat{DAO}$, $\widehat{OCB}$ et $\widehat{OBC}$.

16. ABC est un triangle isocèle en A inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O tel que l'angle $\widehat{BAC}$ soit aigu.

D est le point diamétralement opposé à B.

a) Démontre que: $mes\widehat{ADB} = mes\widehat{ABC}$.

b) Démontre que les angles $\widehat{DCA}$ et $\widehat{ADB}$ sont complémentaires.

17. ABC est un triangle dont les trois angles sont aigus; H est l'orthocentre de ce triangle. $(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit à ABC. Les droites (AH), (BH) et (CH) recoupent $(\mathcal{C})$ respectivement aux points M, N et P.

a) Démontre que: $mes\widehat{ABN} = mes\widehat{PCA}$.

b) Justifie que (AM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PMN}$.

18. ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle $\mathcal{C}(o,r)$ tel que : $mes\widehat{BAD} = 105°$ et $mes\widehat{ABC} = 85°$.

Calcule la mesure de chacun des autres angles de ce quadrilatère.

19. Les polygones suivants sont des polygones réguliers inscrits dans un cercle. Complète le tableau ci-dessous :

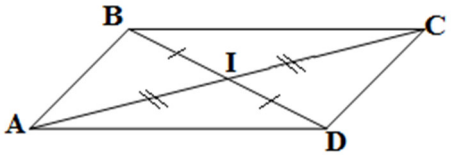
Polygone	Angle au centre en degré	Angle au sommet en degré
Pentagone		
Hexagone		
Octogone		
Ennéagone		
Décagone		
Dodécagone		

20. A, B, C, et D sont 4 points du plan. Construis P et Q tels que :

a) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$.

21. On considère le parallélogramme ABCD de centre I.



a) Nomme un vecteur de la figure qui est égal à :

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;

β) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

γ) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$;

δ) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$.

b) Nomme un vecteur de la figure qui est égal à :

α) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IC}$;

β) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$;

γ) $\overrightarrow{AI}$ - $\overrightarrow{IC}$;

δ) $\overrightarrow{AI}$ - $\overrightarrow{BC}$;

μ) $\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{DI}$.

22. VSOP et VDQS sont des parallélogrammes.

a) Compare les vecteurs $\overrightarrow{DQ}$ et $\overrightarrow{PO}$.

b) Cite tous les vecteurs qui sont égaux deux à deux.

23. Simplifie les sommes suivantes :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EB}$.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BC}$.

24. Simplifie l'écriture de chacune des sommes ci – dessous :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EC}$.

b) $\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{DE}$ - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$.

c) $\overrightarrow{AC}$ - $\overrightarrow{BA}$ - $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}$ - 2 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE}$.

a) $\overrightarrow{CM} =$ - $\overrightarrow{AB}$.

25. A et B sont des points du plan. Simplifie les écritures suivantes :

a) $\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$;

b) $(-2)\left(\frac{3}{4}\right) \times \overrightarrow{AB}$;

c) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$;

d) $-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \left(\frac{4}{3}\right)\overrightarrow{AB}$.

26 ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O.

On désigne par : f: $t_{\overrightarrow{AB}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{CD}}$

g: $t_{\overrightarrow{OA}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{CD}}$.

Complète les tableaux de correspondance ci-contre :

f	
O	
A	

g	
O	
B	

B	
F	

C	
D	

27 On considère un triangle ABC et le carré BCDE extérieur au triangle.

Les droites (EP) et (DQ), respectivement orthogonales à (AC) et (AB) sont sécantes en K.

(Le but de l'exercice est de montrer que (AK) est perpendiculaire à (BC)).

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{EB}$.

a) Détermine les images de (DQ) et (EP) par $t_{\vec{u}}$.

b) On désigne par K' l'image de K par $t_{\vec{u}}$.

Montre que K' est l'orthocentre du triangle ABC.

c) Montre que A, K et K' sont alignés et conclus.

28 a) Construis un rectangle ABCD.

b) Construis le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.Complète : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.= …

c) Construis l'image A'B'C'D' du rectangle ABCD par la translation du vecteur $\overrightarrow{AC}$ suivie de la translation du vecteur $\overrightarrow{BD}$.

d) Détermine le vecteur $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$.

Complète : $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} =$ …

29. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), A, B, C, D et E sont des points tels que :

$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OJ}$;

et $\overrightarrow{OE} = -3\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$.

a) Trouve les couples de coordonnées des points A, B, C, D et E.

b) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{DE}$;

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$; et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$.

30. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(5 ; - 2) ;

B(-2 ; - 3) ; C(- 3 ; 4) ; D(1 ; 5) ; E(5 ; 1) et F(3 ; 4).

Par simple lecture, donne les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{FC}$.

31. Le plan est muni d'un repère (O, I, J). x et y sont des nombres réels.

a) On donne $\overrightarrow{AB}(3 + x ; 7)$ et $\overrightarrow{CD}(1; y - 4)$. Calcule x et y pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient égaux.

b) On donne $\overrightarrow{AB}(5 ; x - 1)$ et $\overrightarrow{CD}(- 3 ; 3 - x)$. Détermine x pour que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires.

c) On donne $\overrightarrow{AB}(2 ; -\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{CD}(x ; \frac{3}{2})$. Trouve x pour que $\overrightarrow{AB}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{CD}$

32. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(- 1 ; 2) et B(2 ; - 5).

a) Place les points C et D tels que $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) Calcule les coordonnées des points C et D.

33. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(2 ; 3) et B (4 ; 5). Calcule le couple de coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$

Que représente le point M pour le segment [AB] ?

34. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(-2 ; 1) ; B (2 ; 3) ; C (2 ; 0) et D (- 2 ; - 2).

a) Calcule les coordonnées du point M milieu de [AC].

b) Calcule les coordonnées du point P milieu de [DB].

c) Quelle est la nature du triangle ABC ?

35. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(-2 ; 3) ; B (3; 1) et C (0 ; - 2).

a) Calcule AB et AC.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

36. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(-1 ; $\frac{2}{3}$) ; B ($\frac{1}{3}$; 2) et C (4 ; $-\frac{5}{3}$). Vérifie par le calcul que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

37. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(5 ; 2) ; B (- 1; 7). On considère la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}\binom{-4}{3}$.

Sachant que A' $= t_{\vec{u}}(A)$ et B' $= t_{\vec{u}}(B)$, calcule les coordonnées de A' et B'. Faire une figure.

EVALUATION

Exercice 1

1°) Ecris le plus simplement possible les nombres réels a et b suivants :

$a = \frac{32}{35} - \frac{16}{42} + \frac{12}{45}$ et $b = \frac{5 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{\sqrt{27} - \sqrt{12}}$

2°) On donne les nombres A ; B ; C et D suivants :

$A = \frac{3}{2} - \frac{10}{3} \times \frac{12}{5}$; $B = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{3}{5} - \frac{3}{4}}$; $C = \frac{-1 + \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{2}} + 1$ et $D = \frac{0{,}64 \times 10^2 \times 4 \times 10^{-5}}{5 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6}}$

1) Calcule A et B et donne chaque résultat sous forme de fraction irréductible.
2) Exprime le plus simplement possible C sans radical au dénominateur.
3) Donne l'écriture décimale puis la notation scientifique de D.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(2 ; - 1) ; B(3 ; 2) et C(0 ; 3).

1) Calcule les distances AB ; BC et AC. déduis – en la nature du triangle ABC.
2) Détermine les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Déduis – en la nature du quadrilatère ABCD.
3) On désigne par (C) le cercle de centre K passant par les points A ; B et C.
   a) Que représente la droite (AC) pour le cercle (C) ? Explique.

Détermine les coordonnées du point K et calcule le rayon r du cercle (C).

Exercice 3

On donne $f(x) = (2x - 6)(1 - x) + (x^2 - 9)$.

1) Factorise f(x).
2) Développe, réduis et ordonne f(x) suivant les puissances décroissantes de x..
3) Calcule la valeur numérique de f(x) pour $x = \sqrt{5}$. Note M le nombre obtenu.
4) Compare les réels 20 et $8\sqrt{5}$ et justifie ta réponse.
   Déduis – en le signe de M et donne sa valeur absolue.
5) Sachant que $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$; donne un encadrement de $20 - 8\sqrt{5}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

PARTIE DESTINEE A L'ENSEIGNANT

Deuxième trimestre

Programmation horaire du 2e trimestre

2e Trimestre	Compétences	Leçon	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombres d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
Du 02 Janvier au 31 Mars 13 semaines	CB1	5	Applications linéaires – Applications affines et Composée d'applications affines	5H	3H	2H	8H	65H
		6	Fractions rationnelles	5H	2H		7H	
		7	Equations et inéquations du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$	5H	3H		8H	
		8	Systèmes d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	5H	4H		9H	
	CB2	7	Equations de droites	5H	4H		9H	
		8	Symétrie centrale – symétrie orthogonale	5H	3H		8H	
		9	Rotation	5H	3H	2H	8H	
		10	Homothétie	5H	3H		8H	

FICHE DE PROGRESSION DU 2ème TRIMESTRE

Trimestre	Période	Contenus	
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité
II	2 Janvier au 28 Février	**Leçon 5 :** Applications linéaires –Applications affines et Composée d'applications affines **Leçon 6 :** Fractions rationnelles **Leçon 7 :** Equations et inéquations du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$	**Leçon 7 :** Equations de droites **Leçon 8 :** Symétrie centrale – symétrie orthogonale
	1er Mars au 31Mars	**Leçon 8 :** Systèmes d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	**Leçon 9 :** Rotation **Leçon 10 :** Homothétie

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Troisième

Deuxième trimestre

Compétence de Base 1

Troisième –CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les applications affines, leurs composées, les fractions rationnelles, les équations et inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ressources		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
- Applications linéaires –- Applications affines- Composée d'applications affines.	– Utiliser une application linéaire pour représenter une situation de proportionnalité ; – appliquer les propriétés de linéarité ; – calculer l'image ou l'antécédent d'un nombre réel par une application affine ; – utiliser le signe du coefficient a pour déterminer le sens de variation d'une application affine déterminée par $f(x) = ax + b$; – représenter graphiquement une application affine et exploiter le graphique ; – utiliser la représentation graphique d'une application affine pour connaître son sens de	– Utilisation d'une application linéaire pour représenter une situation de proportionnalité ; – application des propriétés de linéarité ; – calcul de l'image ou de l'antécédent d'un nombre réel par une application affine ; – utilisation du signe du coefficient a pour déterminer le sens de variation d'une application affine déterminée par $f(x) = ax + b$; – représentation graphique d'une application affine et exploitation du graphique ; – utilisation de la représentation graphique d'une application affine pour connaître son sens de variation ; – interprétation du sens de variation d'une fonction

		variation ; – une situation concrète étant modélisée par une fonction affine ou affine par intervalles, interpréter le sens de variation de cette fonction ; – déterminer une application affine donnée par deux nombres et leurs images ; – calculer la composée d'applications affines ; – utiliser les propriétés de la composée d'applications affines pour effectuer des calculs littéraux : $fo(goh)(x) = (fog)oh(x)$ et $gof \neq fog$.	affine ou affine par intervalles modélisées par une situation concrète ; – détermination d'une application affine donnée par deux nombres et leurs images ; – calcul de la composée d'applications affines ; - utilisation des propriétés de la composée d'applications affines pour effectuer des calculs littéraux : $fo(goh)(x) = (fog)oh(x)$ et $gof \neq fog$.
	- Equations et inéquations du premier degré à une inconnue dans ℝ.	- Résoudre une équation ou une inéquation du premier degré dans ℝ ; - résoudre des problèmes se ramenant aux équations ou aux inéquations du premier degré à une inconnue ; - résoudre un système d'inéquations du premier degré dans ℝ ;	- Résolution d'une équation du premier degré dans ℝ ; - résolution d'une inéquation du premier degré dans ℝ ; - résolution des problèmes se ramenant aux équations du premier degré à une inconnue. - résolution des problèmes se ramenant aux inéquations du premier degré à une inconnue ; - résolution d'un système d'inéquations du premier degré dans ℝ ; - utilisation des intervalles pour donner l'ensemble des

		- utiliser les intervalles pour donner l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$; - représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$ (points d'une droite dont les abscisses sont solutions du système) ; - résoudre des problèmes se ramenant aux systèmes d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$ à une inconnue.	solutions d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$; - représentation graphique de l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$ (points d'une droite dont les abscisses sont solutions du système) ; - résolution des problèmes se ramenant aux systèmes d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$ à une inconnue.
	- Systèmes d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.	- Reconnaître qu'un couple est solution d'une équation ou d'un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - déterminer des couples solutions d'une équation ou d'un système d'équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - résoudre un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - représenter graphiquement l'ensemble des	- Reconnaissance d'un couple solution d'une équation ou d'un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - détermination des couples solutions d'une équation ou d'un système d'équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - résolution d'un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - représentation graphique de l'ensemble des solutions

		solutions d'un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - reconnaître un couple solution d'une inéquation ou d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - déterminer des couples solutions d'une inéquation ou d'un système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - résoudre un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - utiliser les intervalles pour donner l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - lire graphiquement des solutions d'un système d'inéquations.	d'un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - vérification qu'un couple est solution ou non d'une inéquation ou d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - détermination des couples solutions d'une inéquation ou d'un système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - résolution d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - représentation graphique de l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; utilisation des intervalles pour donner l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; - lecture graphique des solutions d'un système d'inéquations.

Troisième–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les équations de droites, les symétries, les rotations et les homothéties.

Ressources		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
- Equations de droites.	– Écrire une équation et/ou une équation réduite de la droite définie par : ➢ un point et un vecteur directeur, ➢ deux points, ➢ un point et son coefficient directeur ; – écrire une équation de la droite : ➢ passant par un point et parallèle à une droite donnée, ➢ passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée ; – construire une droite déterminée par : ➢ une équation, ➢ un point et un vecteur directeur, ➢ un point et son coefficient directeur ; – vérifier l'appartenance ou non d'un point à une droite définie par son équation ; – trouver un vecteur directeur d'une droite définie par son équation ; – déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes ; – trouver, à partir du tracé d'une droite dans le plan muni d'un repère : ➢ une équation de cette droite, ➢ son coefficient directeur, ➢ les coordonnées d'un point de cette droite ; – reconnaître ou justifier, à l'aide de leurs pentes que deux droites sont parallèles ; – reconnaître ou justifier, à l'aide de leurs pentes que deux	– Écriture d'une équation et/ou d'une équation réduite de droite définie par un point et un vecteur directeur ; – écriture d'une équation et/ou d'une équation réduite de droite définie par deux points ; – écriture d'une équation et/ou d'une équation réduite de droite définie par un point et son coefficient directeur ; – écriture d'une équation de droite passant par un point et parallèle à une droite donnée ; – écriture d'une équation de droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée ; – construction d'une droite déterminée par une équation ; – construction d'une droite déterminée par un point et un vecteur directeur ; – construction d'une droite déterminée par un point et son coefficient directeur ; – vérification de l'appartenance ou non d'un point à une droite définie par son équation ; – détermination d'un vecteur directeur d'une droite définie par son équation; – détermination du point d'intersection de deux droites sécantes ; – détermination, à partir du tracé d'une droite dans le plan muni d'un repère, d'une équation de cette droite ; – détermination, à partir du tracé d'une droite dans le plan muni d'un repère, du coefficient directeur de cette droite ; – détermination, à partir du tracé d'une droite dans le plan muni d'un repère, des coordonnées d'un point de cette

		droites sont perpendiculaires.	droite ; – reconnaissance ou justification, à l'aide de leurs pentes, que deux droites sont parallèles ; – reconnaissance ou justification, à l'aide de leurs pentes, que deux droites sont perpendiculaires.
	- Symétrie centrale – symétrie orthogonale.	– Utiliser une symétrie centrale ou une symétrie orthogonale pour construire ; – utiliser une symétrie centrale ou une symétrie orthogonale pour démontrer : ➢ une égalité de distances, ➢ un alignement de points, ➢ une perpendicularité de droites, ➢ un parallélisme de droites ; – composer deux symétries centrales ; – composer deux symétries orthogonales d'axes parallèles ou perpendiculaires.	– Utilisation d'une symétrie centrale ou orthogonale pour construire ; – démonstration d'une égalité de distances en utilisant une symétrie centrale ou orthogonale ; – démonstration d'un alignement de points en utilisant une symétrie centrale ou orthogonale ; – démonstration d'une perpendicularité de droites en utilisant une symétrie centrale ou orthogonale ; – démonstration d'un parallélisme de droites en utilisant une symétrie centrale ou orthogonale ; – composition de deux symétries centrales ; – composition de deux symétries orthogonales d'axes parallèles ; – composition de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires.
	- Rotation.	- Définir une rotation ; - construire l'image d'un point par une rotation ; - construire l'image d'une figure simple par une rotation.	- Définition d'une rotation ; - construction de l'image d'un point par une rotation ; - construction de l'image d'une figure simple par une rotation.
	- Homothétie.	- Définir une homothétie ; - construire l'image d'un point par une homothétie ; - construire l'image d'une figure simple par une homothétie ; - reconnaître deux triangles homothétiques ; - utiliser une homothétie pour réduire ou agrandir une figure.	- Définition d'une homothétie ; - construction de l'image d'un point par une homothétie ; - construction de l'image d'une figure simple par une homothétie ; - reconnaissance de deux triangles homothétiques ; - utilisation d'une homothétie pour réduire ou agrandir une figure.

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE
FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

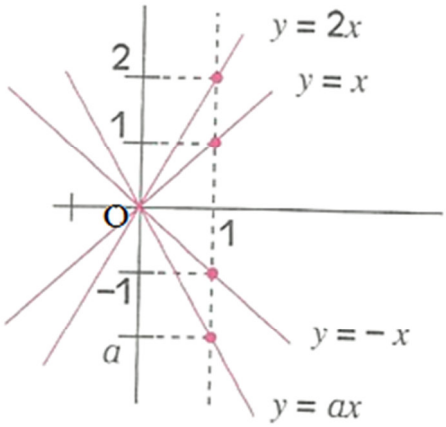
1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Applications linéaires-Applications affines et composée d'applications affines
SEQUENCE 64

Applications linéaires et proportionnalité

Objectif : Définir et reconnaitre une application linéaire

Définition



on appelle application linéaire, toute application définie sous la forme f(x) = ax où a est un nombre réel non nul.

Toute application linéaire traduit une situation de proportionnalité et sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

L'ordonnée du point d'abscisse égale à 1 est le coefficient a de l'application linéaire.

Exemple

1) f est une application linéaire définie par :
   f(x) = 2x. calcule f(1) ; f(5) ; f(7) ; f(- 3) et f(- 9).
2) g est une application linéaire telle que g(2) = 6. Donne l'expression de *g(x)* en fonction de *x*

Corrigé

1°) f(x) = 2x ; f(1) = 2x1=2; . f(5) = 2x5=10 ; f(7) = 2x7=14 ;

f(-3) = 2x(-3)=-6 ; f(-9) =2x(-9)=-18

2°) y = ax , on a 6 = 2a équivaut à a = 3 d'où g(x) = 3x

SEQUENCE 65

Tableau de proportionnalité et linéarité

Objectif : Utiliser une application linéaire pour représenter une situation de proportionnalité

Propriétés de proportionnalité et de linéarité

Une situation de proportionnalité peut être traduite par une application linéaire et réciproquement :

Proportionnalité	Linéarité
$\begin{array}{\|c\|}\hline x \\ \hline ax \\ \hline\end{array}$	$f(x) = ax$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline u & v & u+v \\ \hline au & av & au+av \\ \hline\end{array}$	$f(u+v) = au + av$
$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline u & ku \\ \hline au & k(au) \\ \hline\end{array}$	$f(ku) = kf(u) = k(au)$

Exercice

f est une application linéaire telle que $f(3) - f(4) = \frac{7}{2}$. Donne l'expression de f en fonction de *x*.

Corrigé

On sait que $f(x) = ax$ donc $f3) = 3a$ et $f(4) = 4a$

$f(3) - f(4) = 3a - 4a$

$= -a$

$f(3) - f(4) = \frac{7}{2}$. équivaut à $-a = \frac{7}{2}$

$a = -\frac{7}{2}$ donc $f(x) = -\frac{7}{2}x$

SEQUENCE 66

Applications affines

Objectif : appliquer les propriétés de linéarité et calculer l'image ou l'antécédent d'un nombre réel par une application affine

Définition d'une application affine

Définition

a et b sont des nombres réels.

La relation qui fait correspondre à tout nombre x le nombre ax + b est appelée application affine.

Les applications affines sont généralement notées par des lettres f ; g ; h ;…

Ainsi, on note :

$$f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax + b$$

ou encore : $f(x) = ax + b$

Exemples

1. Pour l'application affine $f(x) = 3x + 5$, $a = 3$ et $b = 5$. Si l'on veut calculer par f l'image de 1, on écrit : $f(1) = 3\times1 + 5 = 8$.

2. Pour l'application affine $g(x) = -2x + 9$, $a = -2$ et $b = 9$. Si l'on veut calculer par g l'image de 0, on écrit : $g(0) = -2 \times 0 + 9 = 9$.

Remarque

Si le coefficient directeur a d'une application affine est non nul, cette application affine est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Méthode

Une application affine $f(x)= ax +b$ étant donnée, on peut déterminer l'antécédent d'un nombre y donné en résolvant simplement l'équation

$ax + b = y$ et l'on tire $x = \frac{y-b}{a}$; a étant non nul.

SEQUENCE 67

Sens de variation d'une application affine

Objectif: utiliser le signe de a pour déterminer le sens de variation d'une application affine déterminée par $f(x) = ax + b$;

Propriété

Une application affine f étant définie par f(x) = ax + b,

- Si a > 0 alors f est croissante
- Si a = 0 alors f est constante
- Si a < 0 alors f est décroissante.

Exercice

Donne le sens de variation de chacune des applications affines suivantes :

a) $f(x) = 2x + 5$

b) $g(x) = -3$

c) $h(x) = -x + 3$.

Corrigé

a) f(x) = 2x +5 ; a = 2 > 0 alors f est croissante

b) g(x) = -3 ; a = 0 alors g est constante

c) h(x) = -x + 3 ; a = -1 < 0 , alors h est décroissante

SEQUENCE 68

Représentation graphique d'une application affine

Objectif : représenter graphiquement une application affine et exploiter le graphique ;

Définition

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), A et B étant des ensembles de nombres réels et f une application de A dans B, on appelle représentation graphique de l'application f, l'ensemble des points du plan de coordonnées (x ; f(x)), x étant un élément de A.

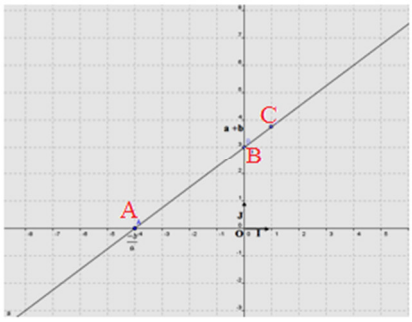
Propriété

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), a et b étant des nombres réels donnés et f une application affine définie par f(x) = ax + b, la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J) est la droite d'équation y = ax + b.

Remarque :

Une application affine f définie par $f(x) = ax + b$ étant donnée, le tableau suivant donne les coordonnées de trois points particuliers de la droite qui représente f dans un repère (O, I, J).

	x	y
B	0	b
A	$-\frac{b}{a}$	0
C	1	$a+b$



Le point B(0 ; b) est appelé le point d'abscisse nulle ; b est l'ordonnée à l'origine.
C'est l'intersection de la droite qui représente la fonction affine f et l'axe des ordonnées.
Le point A($-\frac{b}{a}$;0) est le point d'ordonnée nulle. C'est l'intersection de la droite qui représente la fonction affine f et l'axe des abscisses.

Propriété

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), deux fonctions affines f et f' définies par f(x) = ax +b et f'(x) = a'x + b' sont représentées par deux droites parallèles si a = a'

Exercice

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représente les fonctions affines f et g définies par :
$f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 2x - 3$

Solution guidée

$f(x) = 2x + 1$

	x	y
B	0	1
A	$\frac{-1}{2}$	0

Tracer un repère puis placer les points A($\frac{-1}{2}$ **; 0)** et B (0 ; 1) dans ce repère ,tracer la droite (AB) .De la même manière tracer la fonction g

SEQUENCE 69

APPLICATIONS AFFINES PAR INTERVALLES

Objectif : Reconnaitre et représenter des applications affines per intervalles

Certaines applications affines peuvent avoir des expressions différentes par intervalles de $\mathbb{R}$. On les appelle des fonctions affines par intervalles.

Exemple

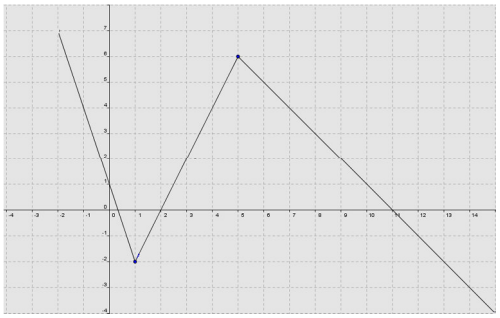
L'application affine f définie par :

$f(x) = -3x + 1$ si $x \in]\leftarrow ; 1]$

$f(x) = 2x - 4$ si $x \in [1 ; 5]$

$f(x) = -x + 11$ si $x \in [5 ; \longrightarrow[$ est une application affine par intervalles.

Représentons f dans un repère (O, I, J).



SEQUENCE 70

DETERMINATION DE L'EXPRESSION D'UNE APPLICATION AFFINE

Objectif : A partir de la représentation graphique d'une application affine déterminer son expression

Une application linéaire est un cas particulier d'une application affine (cas où b = 0).

L'application affine f définie par $f(x) = 4x + 0$ est une application linéaire car on l'écrit simplement $f(x) = 4x$.

A partir de la représentation graphique d'une application affine f par une droite, on peut déterminer l'expression de $f(x)$; c'est-à-dire trouver les valeurs de a et b.

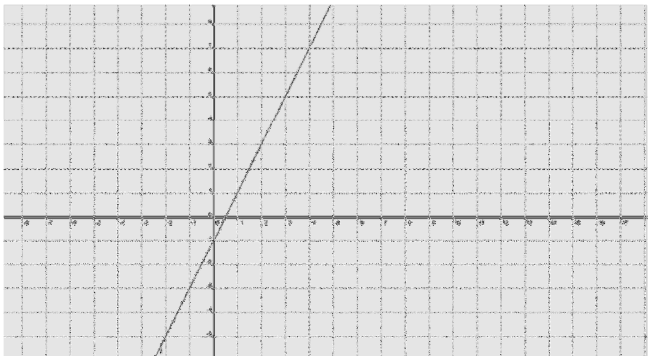
En effet, on sait que B(0 ; b). b est donc lu (déterminé) sur le graphique.

Et comme A($-\frac{b}{a}$; 0) ou C(1 ; $a + b$) on peut déterminer b et écrire

$f(x) = ax + b$.

Exercice

A partir de la représentation de la droite (D); détermine l'application affine f ayant (D) comme représentation graphique.



SEQUENCE 71

DETERMINATION GRAPHIQUE DU SENS DE VARIATION D'UNE APPLICATION AFFINE

Objectif : interpréter le sens de variation d'une fonction

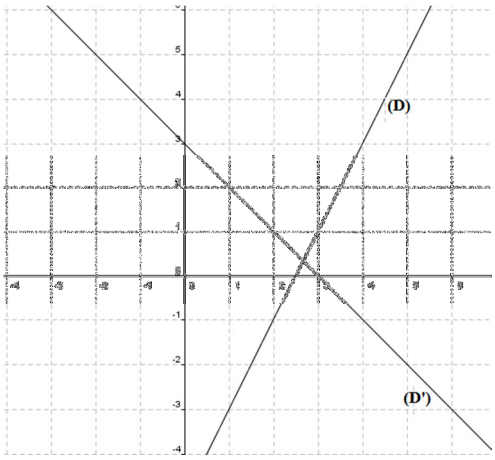
Sens de variation d'une fonction

A partir de la représentation graphique d'une application affine par une droite, on peut déterminer son sens de variation.

Il suffit de considérer deux nombres dans l'intervalle désigné où l'application affine est représentée par une droite ou un segment de droite, de les comparer puis, de comparer leurs images. Si les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents, l'application affine est croissante ; sinon elle est décroissante.

Exercice

A partir de la représentation des droites (D) et (D'), donne le sens de variation de chacune des applications affines f et g ayant (D) et (D') comme représentations graphiques.



SEQUENCE 72

Détermination d'une application affine connaissant deux nombres et leurs images

Objectif : déterminer une application affine donnée par deux nombres et leurs images

▼Méthode

Par la donnée de deux nombres et de leurs images, on peut déterminer une application affine f.

Il suffit pour cela de donner l'expression générale des applications affines

$f(x) = ax + b$ où a et b sont deux nombres à déterminer.

Exemple

f est une application affine telle que $f(2) = 3$ et $f(-1) = 5$.

Détermine les nombres a et b tels que $f(x) = ax + b$.

SEQUENCE 73

Définition de la composée d'applications affines

Objectif : Calculer la composée d'application affines

Définition

f et g étant deux applications affines, la composée de f par g notée gof définie par :

pour tout x réel $(gof)(x) = g[f(x)]$ est aussi une application affine.

Remarques

1) De manière générale, pour tout x réel, $(gof)(x) \neq (fog)(x)$.
2) Pour trois applications affines f, g et h, la composée fogoh est telle que :
   $(fog)oh = fo(goh)$.

Exemples

Dans chacun des cas suivants, déterminons les composées fog et gof des applications affines données :

a) $f(x) = -x + 2$ et $g(x) = 2x - 1$

Pour tout x réel, $fog(x) = f[g(x)]$

$= f(2x - 1)$

$= -(2x - 1) + 2$

$= -2x + 1 + 2$

$= -2x + 3$

$fog(x) = -2x + 3$

Et pour tout x réel, $gof(x) = g[f(x)]$

$= g(-x + 2)$

$= 2(-x + 2) - 1$

$= -2x + 4 - 1$

$= -2x + 3$

$gof(x) = -2x + 3$

SEQUENCE 74

PROPRIETES DE LA COMPOSEE D'APLICATIONS AFFINES

Objectif : Utiliser les propriétés de la composée d'applications affines pour effectuer les calculs littéraux *fo(goh)(x) = (fog)oh(x)* et *gof ≠ fog*.

Exemples

▼Remarque

Ici, fog =gof.

b) $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = -5x + 7$

Pour tout x réel, $fog(x) = f[g(x)]$

$= f(-5x + 7)$

$= 3(-5x + 7) + 1$

$= -15x + 21 + 1$

$= -15x + 22$

$fog(x) = -15x + 22$

Et pour tout x réel, $gof(x) = g[f(x)]$

$= g(3x + 1)$

$= -5(3x + 1) + 7$

$= -15x - 5 + 7$

$= -15x + 2$

▼Remarque

Ici, fog ≠ gof

1) f, g et h sont trois applications affines telles que, pour tout x réel,

$f(x) = 2x - 1$; $g(x) = x - 5$ et $h(x) = -3x + 7$

Déterminons (fog)oh et fo(goh).

Pour tout x réel, trouvons fog puis (fog)oh :

$fog(x) = f[g(x)]$

$= f(x- 5)$

$= 2(x - 5) - 1$

$= 2x - 10 - 1$

$= 2x - 11$

$[(fog)oh](x) = [fog](h(x))$

$= [fog](- 3x + 7)$

$= 2(- 3x + 7) - 11$

$= - 6x + 14 - 11$

$= - 6x + 3$

$[(fog)oh](x) = - 6x + 3$

Et pour tout x réel, trouvons goh puis fo(goh) :

$goh(x) = g[h(x)]$

$= g(- 3x + 7)$

$= - 3x + 7 - 5$

$= - 3x + 2$

$fo(goh)(x) = f[goh(x)]$

$= f(- 3x + 2)$

$= 2(- 3x +2) - 1$

$= - 6x + 4 - 1$

$= - 6x + 3$

$[fo(goh)](x) = - 6x + 3.$

▼Remarque

Pour tout réel x, $[(fog)oh](x) =[fo(goh)](x)$.

Fractions rationnelles

SEQUENCE 75

Définition de fractions rationnelles

Objectif : Déterminer les conditions d'existence d'une fraction rationnelle

Définition

Une fonction f est appelée fonction rationnelle (ou fraction rationnelle) si on peut l'écrire sous forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P(x) et Q(x) sont des fonctions polynômes.

f est définie pour tout x tel que Q(x) $\neq$ 0.

Exemple

Soit f la fonction suivante :

$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{3x^2-2x+1}{x-4} \end{array}$

- f est le quotient de deux fonctions polynômes donc f est une fonction rationnelle.
- Elle est définie pour tout x tel que $x - 4 \neq 0$ c'est $-$ à $-$ dire $x \neq 4$

Donc le domaine de définition de f est l'ensemble $D_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$ ou $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$.

SEQUENCE 76

Simplification de fonctions rationnelles

Objectif: simplifier une fraction rationnelle dans des cas simples

▼Méthode

Soit f(x) $= \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$ une fonction rationnelle.

Pour simplifier l'écriture de f(x), on doit :

- Déterminer le domaine de définition de f.

- Sur cet ensemble de définition, procéder à la simplification du facteur commun aux expressions factorisées de P(x) et de Q(x).

Exemple

Soit $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$.

Simplifions $f(x)$:

f est une fraction rationnelle dont le numérateur est $P(x) = x^2 - 9$ et le dénominateur $Q(x) = x^2 - 6x + 9$.

Factorisons $P(x)$ et $Q(x)$.

En appliquant les identités remarquables, on obtient : $P(x) = (x-3)(x+3)$ et $Q(x) = (x-3)^2$.

On a donc : $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2}$.

a) Déterminons le domaine de définition de f.

f est définie pour tout x tel que$(x-3)^2 \neq 0$, donc $x \neq 3$ et $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

b) Sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$, on peut simplifier$f(x)$.

On a donc : $f(x) = \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{(x-3)\cancel{(x-3)}} = \frac{x+3}{x-3}$.

On écrit :$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}, f(x) = \frac{x+3}{x-3}$.

SEQUENCE 77

Opérations sur les fractions rationnelles

Objectif : utiliser les expressions simplifiées pour le calcul de valeurs numériques ;

Les règles des opérations (addition, multiplication) sont les mêmes sur les fonctions rationnelles que celles des opérations sur les fractions des nombres réels.

Ainsi, on a :

. L'addition (la somme) de deux fonctions rationnelles est une fonction rationnelle.

. La multiplication (ou produit) de deux fractions rationnelles est une fonction rationnelle.

Exemple

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$ et $g(x) = \frac{x+3}{x}$ deux fonctions rationnelles.

a) Détermine D_f et D_g.

b) f et g ont-ils le même dénominateur ?

Calcule f $(x) + g(x)$.

c) Calcule f $(x).g(x)$.

d) Quels sont les domaines de définition de $f(x) + g(x)$ et $f(x).g(x)$?

Corrigé

a°) f est définie pour tout x tel que $3x - 4 \neq 0$, donc $x \neq \frac{4}{3}$ et $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{4}{3}\}$.

g est définie pour tout x tel que $x \neq 0$, et $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b°) f et g n'ont pas le même dénominateur

Calculons :$\frac{2x+1}{3x-4}$

SEQUENCE 78

Equations utilisant les fonctions rationnelles

Objectif : Résoudre des équations impliquant des fractions rationnelles

Règles

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec$Q(x) \neq 0$.

Résoudre $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$.

Résoudre $\frac{P(x)}{Q(x)} = 1$ équivaut à $\begin{cases} P(x) = Q(x) \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$.

- a étant un nombre réel ;

$Résoudre\ \frac{P(x)}{Q(x)} = a\ équivaut$ à $\begin{cases} P(x) = a.Q(x) \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$

Exemple :

On considère la fonction rationnelle

$f(x) = \frac{4x-3}{2x+5}$

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -1$

SEQUENCE 79

Inéquations utilisant les fonctions rationnelles

Objectif : Résoudre des inéquations impliquant des fractions rationnelles

Règle

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, une fonction rationnelle ;Avec $Q(x) \neq 0$

- Résoudre l'inéquation $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ revient à résoudre l'inéquation$P(x).\ Q(x) \leq 0$.

  $(\ Q(x) \neq 0)$
- Résoudre l'inéquation $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ revient à résoudre l'inéquation$P(x).\ Q(x) \geq 0$

  .$(\ Q(x) \neq 0)$

Exemple :

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\frac{2x-4}{x+3} \geq 0$ et $\frac{2x-4}{x+3} < 0$

Equation et inéquation du premier degré une inconnue

SEQUENCE 80

Equation du 1er degré dans IR

Objectif : Définir et reconnaitre une équation du premier degré dans IR

Définition : On appelle équation du 1er degré dans $\mathbb{R}$ une égalité entre deux expressions algébriques en fonction d'une variable de degré 1 appelée inconnue.

Exemples

1. l'écriture : $3x - \frac{5}{4} = 0$ est une équation du 1er degré à une inconnue qui est x.

2. l'égalité d'expressions $-\frac{1}{2}x + 1 = 5x - 7$ est une équation du 1er degré à une inconnue qui est x.

3. l'écriture $4 - y\sqrt{3} = 9 - 2\sqrt{2}$ est une équation du 1er degré dans $\mathbb{R}$ et l'inconnue est y.

SEQUENCE 81

Inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}$

Objectif : Définir et reconnaitre une inéquation du premier degré dans IR

On appelle inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R}$ une inégalité entre deux expressions algébriques qui n'est vraie que pour certaines valeurs de l'inconnue, l'inconnue étant de degré 1.

Exemples

1. L'écriture : $2x - 1 < 3$ est une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R}$. L'inconnue est x et cette inégalité n'est vraie que pour les valeurs de l'inconnue x telle que $x < 2$ ou $x \in]-\infty ; 2[$.
2. L'inégalité : $-4 + 2y \geq y + 5$ est une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R}$. L'inconnue est y et cette inégalité n'est vraie que pour les valeurs de l'inconnue y telles que $y \geq 9$ ou
   $y \in [9 ; +\infty[$.
3. L'écriture : $-2 < -3x + 2\sqrt{7}$ est une inéquation du 1er degré dans$\mathbb{R}$, d'inconnue x. Cette inégalité n'est vraie que pour tout $x < \frac{2}{3}(1 + \sqrt{7})$ ou $x \in]-\infty ; \frac{2}{3}(1 + \sqrt{7})[$.

SEQUENCE 82

Résolution d'équations du 1er degré dans$\mathbb{R}$.

Objectif : Résoudre une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$;

Résoudre une équation du 1er degré dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'équation ou l'inéquation est vraie.

Les équations du type $ax + b = cx + d$ se résolvent par transformations successives pour aboutir à une équation du type $x = u$

(u étant un nombre réel).

Exemple

Résolvons l'équation : (E) : $-3x - \sqrt{2} = 3 + x$ dans $\mathbb{R}$.

On a : $-3x - \sqrt{2} = 3 + x$

$-3x - x = 3 + \sqrt{2}$

$-4x = 3 + \sqrt{2}$

d'où $x = \frac{3+\sqrt{2}}{-4} = \frac{-3-\sqrt{2}}{4}$

qui est du type $x = u$.

On a donc $S = \left\{\frac{-3-\sqrt{2}}{4}\right\}$

- Certaines équations du 2ème ou du 3ième degré peuvent se ramener sous la forme A (x) = 0 où A(x) est un produit de 2 ou 3 facteurs du 1er degré à une inconnue. Dans ce cas, on applique la propriété : ab = 0 équivaut à a = 0 ou b = 0.

  Exemple

  Résolvons l'équation suivante dans ℝ :

  $3x^2 - 7 = -x^2 + 2.$

  On a, par une transformation d'écritures :

  $3x^2 - 7 = -x^2 + 2$

  $3x^2 - 7 + x^2 - 2 = 0$

  $4x^2 - 9 = 0$

  En factorisant cette expression, on a $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$.

  $(2x - 3)(2x + 3) = 0$ équivaut à $2x - 3 = 0$ ou $2x + 3 = 0$.

  Equivaut à $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$.

  Donc $S = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right\}$.

SEQUENCE 83

Résolution d'inéquations du 1er degré dans ℝ.

Objectif : Résoudre une inéquation du premier degré dans ℝ ;

Résoudre une inéquation du 1er degré dans ℝ, c'est déterminer les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'inéquation est vraie.

Les inéquations du type $ax + b \leq cx + d$ peuvent se ramener à des inéquations du type $x \leq u$ ou $x \geq u$.

Exemple

Résolvons l'inéquation suivante dans ℝ :

$-x\sqrt{2} + 3 < \sqrt{2} - 2x$

On procède par transformations successives. On a :

$-x\sqrt{2} + 3 < \sqrt{2} - 2x$

$-x\sqrt{2} + 2x < \sqrt{2} - 3$

$x\left(2 - \sqrt{2}\right) < -3 + \sqrt{2}$ et comme $\left(2 - \sqrt{2}\right) > 0$

alors $x < \frac{-3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ or $\frac{-3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{-4-\sqrt{2}}{2}$

donc $x < \frac{-4-\sqrt{2}}{2}$ et $S = \left]-\infty; \frac{-4-\sqrt{2}}{2}\right[$

- Certaines inéquations du 2ème ou du 3ème degré peuvent se ramener aux inéquations du type $A(x) \leq 0$ ou $A(x) \geq 0$ où $A(x)$ est un produit de facteurs du 1er degré. Dans ce cas, l'étude du signe de $A(x)$ permet d'obtenir les solutions de l'inéquation.

Exemple

Résolvons l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$.

$3x^2 - 7 \geq 2 - x^2$.

Par transformations successives, on a

$3x^2 - 7 \geq 2 - x^2$

$3x^2 + x^2 - 7 \geq 2$

$4x^2 - 9 \geq 0$ d'où $(2x - 3)(2x + 3) \geq 0$

L'étude du signe de l'expression $A(x) = (2x - 3)(2x + 3)$ nous donne :

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
$2x + 3$	$-$	0	$+$		$+$
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Finalement, on obtient : $\boxed{S = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[}$

Exercices

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\left(1 + 2\sqrt{3}\right)x - \sqrt{3} + 2 = 0$

$b)$ $4x^2 - (2x + 5)^2 = 0$

$c)$ $x + 4\sqrt{2} - 1 = 3x\sqrt{2} - 4$

$d)$ $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\frac{x+3}{4} + 1 < x - \frac{x+1}{2}$

b) $-13x + 15 > 6x + 6$

c) $(x + 1)(x - 3) \leq 0$

SEQUENCE 84

Problèmes conduisant à une équation du 1er degré à une inconnue

Objectif : Résoudre des problèmes se ramenant aux équations du premier degré à une inconnue

▼Méthode

Pour organiser la résolution algébrique d'un problème du 1er degré à une inconnue, on procède en respectant les quatre étapes suivantes :

1ère étape : choisir l'inconnue ;

2ème étape : mettre en équation le problème ;

3ème étape : résoudre l'équation obtenue ;

4ème étape : vérifier et Conclure.

Exemple

Résolvons le problème suivant :

Actuellement, l'âge de Mme Elise est le double de celui de son neveu Frédéric. Dans 5 ans, ils auront à eux deux 70 ans. Quel est l'âge de Mme Elise ?

1ère étape : choix de l'inconnue.

Soit x l'âge de Frédéric, actuellement. Dans ce cas, l'âge de Mme Elise est actuellement : $2x$.

2ième étape : Mise en équation

Si x est l'âge de Frédéric actuellement, dans 5 ans, Frédéric aura : $x + 5$

Mme Elise aura aussi, dans 5 ans : $2x + 5$.

Or le problème précise que dans 5 ans, ils auront à eux deux 70 ans.

On traduit donc cette consigne en effectuant la somme des âges des 2 personnes dans 5ans. On obtient :

(âge de Frédéric dans 5 ans) + (âge de Mme Elise dans 5 ans) = 70 ans.

Soit $(x + 5) + (2x + 5) = 70$.

3ième étape : On résout l'équation obtenue

$(x + 5) + (2x + 5) = 70$

$$x + 2x + 10 = 70$$
$$3x = 60$$
$$x = 20$$

4ième étape : on vérifie et on conclut :

on a obtenu $x = 20$ correspondant à l'âge de Frédéric.

Donc Mme Elise a actuellement $2x = 2 \times 20 = 40$ ans. On vérifie que dans 5 ans, Frédéric aura 25 ans et Mme Elise aura 45 ans.

De plus, 25 ans + 45 ans = 70 ans.

L'âge de Mme Elise est bien de 40 ans.

SEQUENCE 85

Problèmes conduisant à une inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R}$

Objectif: Résoudre des problèmes se ramenant aux inéquations du premier degré à une inconnue

La méthode de résolution de problèmes conduisant à des inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}$ comporte les mêmes étapes que pour la méthode de résolution de problèmes conduisant à des équations du 1er degré dans $\mathbb{R}$:

1ère étape : choisir de l'inconnue

2ième étape : traduire en inéquation le problème proposé

3ième étape : résoudre l'inéquation obtenue

4ième étape : vérifier et conclure.

Exemple

Résolvons le problème suivant :

Rébecca a 30 ans et sa fille Caroline en a 5. Pendant combien d'années l'âge de Rébecca restera – t – il plus grand que le double de l'âge de Caroline ?

Appliquons les différentes étapes pour résoudre le problème proposé.

1ère étape : choix de l'inconnue

Soit x le nombre d'années recherché.

Ainsi, dans x ans, Rébecca aura $(30 + x)$ ans et le double de l'âge de Caroline sera donc : $[(5 + x) \times 2]$

2ième étape : mise sous forme d'inéquation du problème

Le problème a précisé : dans combien d'années l'âge de Rébecca $(30 + x)$ ans restera – t – il plus grand que le double de l'âge de Caroline $[(5 + x)\text{x } 2]$ ans ?

On traduit donc par l'inéquation :

$30 + x > (5 + x) \text{ x } 2$

Ce qui nous donne : $30 + x > 2x + 10$

3ième étape : résolution de l'inéquation

On a : $30 + x > 2\text{x} + 10$

$x - 2x > 10 - 30$

$-x > -20$

D'où $x < 20$.

4ième étape : vérification et conclusion

On peut effectivement vérifier que l'âge de Rébecca reste plus grand que le double de l'âge de Caroline chaque fois qu'on compare leurs âges à des années données :

$(30 + x)$ ans et $(5 + x)$ x 2 ans pour $x < 20$.

De plus, lorsque $x = 20$, on se rend compte que $30 + 20 = (5 + 20)\ x\,2$ et quand $x > 20$, on se rend compte que l'âge de Rébecca devient plus petit que le double de l'âge de Caroline.

On conclut donc que l'âge de Rébecca restera plus grand que le double de l'âge de Caroline pendant dix - neuf (19) ans et à la vingtième année, ces âges s'égaleront.

SEQUENCE 86

Système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$

Objectif : Résoudre un système d'inéquation du premier degré dans IR

Définition et méthode

Deux inéquations du premier degré (I_1) et (I_2) étant données, lorsqu'on veut trouver les nombres qui sont à la fois solutions de (I_1) et (I_2), on dit qu'on résout un système de deux inéquations du premier degré.

Pour indiquer qu'on s'intéresse aux solutions communes à ces deux inéquations, on les écrit l'une en dessous de l'autre dans une accolade qu'on appelle système de deux inéquations d'inconnue x : par exemple $\begin{cases} 2\text{x} - 3 > 0 \\ 3\text{x} + 5 \geq 0 \end{cases}$

Résoudre un tel système, c'est trouver l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations.

Exemples

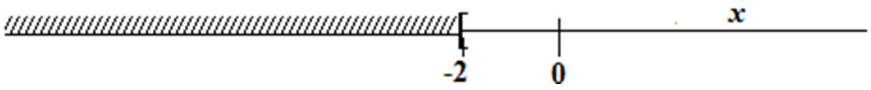
Résolvons les systèmes d'inéquations suivants et représentons l'ensemble de solutions sur une droite graduée (la partie non hachurée représente l'ensemble des solutions).

1) $\begin{cases} 3x + 6 \geq 0 \\ 2x + 1 \leq 3 \end{cases}$

Notons (I_1) l'inéquation $3x + 6 \geq 0$

$3x \geq -6$

$x \geq -2$

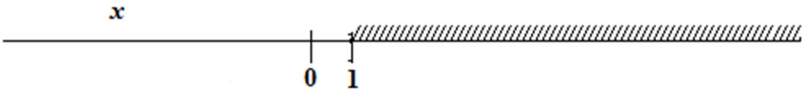


Et (I_2) l'inéquation $2x + 1 \leq 3$

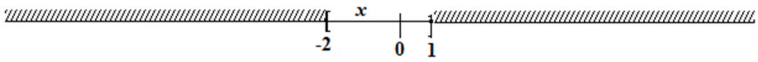
$2x \leq 3 - 1$

$2x \leq 2$

$x \leq 1$



L'ensemble des solutions du système est



C'est-à-dire que $x \in [-2; 1]$

2) $\begin{cases} x + 5 \leq 3x + 1 \\ -7x + 9 \geq -12 \end{cases}$

Notons (I_1) l'inéquation $x + 5 \leq 3x + 1$

$x - 3x \leq -5 + 1$

$-2x \leq -4$

$2x \geq 4$

$x \geq 2$

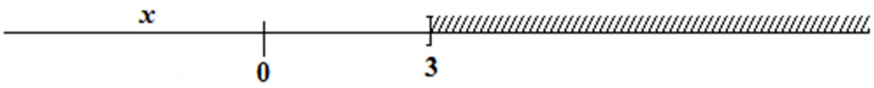
Et (I_2) l'inéquation $-7x + 9 \geq -12$

$-7\,x \geq -9 - 12$

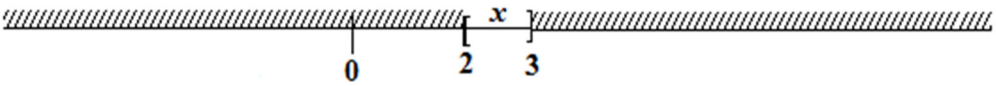
$-7\,x \geq -21$

$7\,x \leq 21$

$x \leq 3$



L'ensemble des solutions du système est



C'est-à-dire que $x \in [2; 3]$

Exercice

Résous les systèmes d'inéquations suivants et représente, si possible, les ensembles de solutions sur une droite graduée :

1) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 3x + 5 \geq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 12x + 3 \geq 8x - 5 \\ 4x - 5 < 2x + 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 1 < -3x + 5 \\ 2x - 7 < 5x - 2 \end{cases}$

SEQUENCE 87

Exemples de problèmes se ramenant à un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$

Objectif : Résoudre des problèmes se ramenant aux systèmes d'inéquations du premier degré dans IR

Exemple

Une société de location de véhicules loue à la journée :

- Renault 5 à 20 000F, plus 30F par kilomètre parcouru
- Renault 9 à 30 000F, plus 10F par kilomètre parcouru
- Renault 11 à 35 000F, plus 15F par kilomètre parcouru.

Pour quel kilométrage le prix de la location d'une Renauld 5 est-il inférieur à celui d'une Renault 11 et supérieur à celui d'une Renault 9?

Solution

- Choix de l'inconnue

Désignons par x le nombre de kilomètres parcourus.

Le prix de location d'une Renault 5 pour x kilomètres parcourus dans la journée est :

$20\,000 + 30\,x$.

Le prix de location d'une Renault 9 pour x kilomètres parcourus dans la journée est :

$30\,000 + 10\,x$

Et le prix de location d'une Renault 11 pour x kilomètres parcourus dans la journée est :

$35\,000 + 15\,x$.

- Mise en inéquation

Le prix de location d'une R5 est inférieur à celui d'une Renault 11 se traduit par l'inéquation : $20\,000 + 30\,x \leq 35\,000 + 15\,x$.

Le prix de location d'une R5 est supérieur à celui d'une Renault 9 se traduit par l'inéquation : $20\,000 + 30\,x \geq 30\,000 + 10\,x$.

On en déduit le système :

$$\begin{cases} 20\,000 + 30\,x \leq 35\,000 + 15\,x. \\ 20\,000 + 30\,x \geq 30\,000 + 10\,x. \end{cases}$$

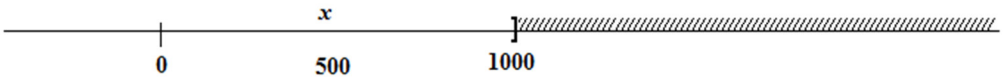
- Résolution du système :

Notons (I_1) l' inéquation $20\,000 + 30\,x \leq 35\,000 + 15\,x$

$$30\,x - 15\,x \leq 35\,000 - 20\,000$$

$$15\,x \leq 15\,000$$

$$x \leq 1000$$



Notons (I_2) l'inéquation $20\,000 + 30x \geq 30\,000 + 10x$

$30\,x - 10\,x \geq 30\,000 - 20\,000$

$20\,x \geq 10\,000$

$x \geq 500$

L'ensemble des solutions du système est représenté par :

– Réponse au problème :

Pour une distance comprise entre 500 et 1000 kilomètres, le prix de location d'une R5 est compris entre celui d'une R11 et d'une R9.

Leçon 8 : Système d'équations et d'inéquations dans IRXIR

SEQUENCE 88

Equations du 1er degré dans $\mathbb{R}$x $\mathbb{R}$

Objectif : Reconnaître qu'un couple est solution d'une équation ou d'un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définition

Une équation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ou une équation du 1er degré à deux inconnues x et y) est une équation de la forme : $ax + by + c = 0$ (a, b, c sont trois réels, b et c non nuls).

Exemple

$4x - 2y = 7.$; $3x + y = -7$; $-x + 2y + 14 = 0$ ou encore $5x - 3y + 1 = 0$ sont des équations du 1er degré à deux inconnues$x$ et y.

Vocabulaire

On considère l'équation du 1er degré à deux inconnues x et y suivante :

$6x - 2y - 5 = 0.$

. le couple $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ est une solution de cette équation car si on remplace x par $\frac{1}{2}$ et y par -1, on obtient $6\times\frac{1}{2} - 2\times(-1) - 5 = \frac{6}{2} + 2 - 5 = 3 + 2 - 5 = 5 - 5 = 0.$

. le couple $(3\,;-2)$ n'est pas une solution de cette équation, car en remplaçant x par 3 et y par -2, on obtient : $6\times3 - 2\times(-2)$-5 $= 18 + 4 - 5 = 22$-5 $= 17 \neq 0.$

On dit que le couple $\left(\frac{1}{2};-1\right)$ vérifie l'équation $6x-2y-5=0$ et que le couple $(3;-2)$ ne vérifie pas la même équation.

SEQUENCE 89

Méthode de résolution graphique des équations du 1er degré dans $\mathbb{R}X\ \mathbb{R}$:

Objectif : Résoudre graphiquement un système d'équation du premier degré dans IRXIR

▼Méthode graphique de résolution des équations du 1er degré à deux inconnues

Soit l'équation du 1er degré à deux inconnues : $ax+by+c=0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, b et c non nuls.

Pour résoudre graphiquement cette équation, on effectue la représentation de l'ensemble des couples solutions de l'équation$ax+by+c=0$.

Pour cela, on procède de la manière suivante :

$ax+by+c=0$ est l'équation à résoudre graphiquement.

- on exprime y en fonction de x : On obtient une écriture $y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$ qui est de la forme $y=mx+p$, équation d'une droite affine avec $m=-\frac{a}{b}$ et $p=\frac{-c}{b}$
- On représente dans un plan muni d'un repère orthonormé la droite (d) d'équation

  $y=mx+p$.

  La droite (d) obtenue représente l'ensemble des couples solutions de l'équation $ax+by+c=0$.

Exemple

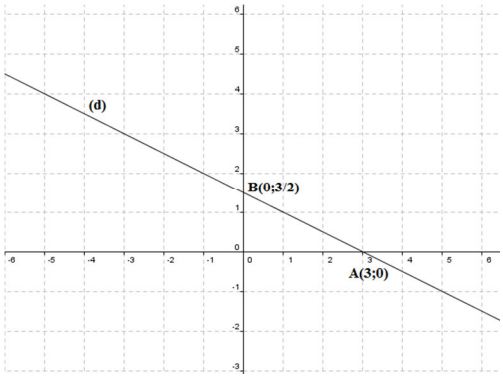
Résolvons graphiquement l'équation du 1er degré à deux inconnues : $2x+4y-6=0$.

Exprimons d'abord y en fonction de x. On a $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, représentons la droite (d) d'équation:

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.donc :

On a :



Cette droite (d) représente l'ensemble des couples solutions de l'équation $2x+4y-6=0$

Exercice :

Soit l'équation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $3x - 6y + 9 = 0$.

- Trouve 5 couples solutions de l'équation donnée.
- Représente graphiquement l'ensemble des solutions de cette équation.

Quels sont les couples solutions de l'équation qui appartiennent à l'axe des abscisses ? A l'axe des ordonnées ?

SEQUENCE 90

Inéquations du 1er degré à deux inconnues

Objectif : Reconnaître qu'un couple est solution d'une inéquation d'équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définition

On appelle inéquation du 1er degré à deux inconnues x et y une inéquation de la forme :

$ax + by + c < 0$ *ou* $ax + by + c > 0$ *ou* $ax + by + c \geq 0$ *ou* $ax + by + c \leq 0$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *, a et b tous non nuls.*

Exemples

$-3x + y < 0$; $4 - 2y + 5x > 0$; $-3x - 4y + 7 \leq 0$; $2x + 5y - 7 \geq 0$ sont des inéquations du 1er degré à deux inconnues x et y.

On donne l'inéquation du 1er degré à deux inconnues suivante : $2x + y - 4 > 0$.

le couple (1 ;9) est solution de cette inéquation. Car si on remplace x par 1 et y par 9 on obtient :

2x1 + 9 – 4 = 2+9-4 = 7 ; 7 > **0**

Le couple (-2 ; 3) n'est pas solution de l'inéquation car ,en remplaçant x par -2 et y par 3 on obtient : 2x(-2)+ 3 – 4 = -4 + 3 - = -5 ; -5 n'est pas supérieur à 0 ;on dit que le couple (-2 ; 3) ne vérifie pas l'inéquation

SEQUENCE 91

Résolution des inéquations du 1er degré à deux inconnues

Objectif : Résoudre une inéquation du premier degré à deux inconnues

Propriété

Les inéquations du 1er degré à deux inconnues de types :

$ax + by + c < 0$; $ax + by + c > 0$; $ax + by + c \geq 0$ *ou* $ax + by + c \leq 0$ ont chacune une infinité de couples solutions.

On peut cependant trouver des couples solutions de ces inéquations pour la composante x fixée ou pour la composante y fixée.

Exemple

Considérons l'inéquation du 1er degré à deux inconnues : $2x - y + 2 < 0$.

Cherchons des solutions de cette inéquation.

. Exprimons-y-en fonction de x ou x en fonction de y.

On a : $2x - y + 2 < 0$

$alors\ y > 2x + 2$ (y en fonction de x)

ou $x < \frac{1}{2}y - 1$ (x en fonction de y).

. Trouvons des couples solutions de l'inéquation $2x - y + 2 < 0$ ayant pour première composante 4.

Pour ce cas, on choisit l'écriture de y en fonction de x.

On a : $y > 2x + 2$ et pour $x = 4$, on a $y > 2 \times 4 + 2\ donc\ y > 10$.

Les couples solutions de l'inéquation $2x - y + 2 < 0$ ayant pour première composante 4 sont :

(4; 11); (4;10,5); (4;12); (4;12,7); (4;50)…

Il y en a encore une infinité !

On peut noter l'ensemble des solutions comme suit :

S = {(4 ; y), y ∈]10; +∞[}.

ou S = {(4 ; y), y > 10}.

. Trouvons des couples solutions de la même inéquation ayant pour deuxième composante 6.

On choisit, pour ce cas, l'écriture de x en fonction de y.

On a obtenu : $x < \frac{1}{2}y - 1$ et pour y = 6, on a :

$$x < \frac{1}{2} \times 6 - 1$$

d'où $x < 2$.

Les couples solutions de cette inéquation ayant pour deuxième composante 6 sont :

(1,9; 6); (1,5; 6) ; (1; 6); (0,5; 6); (0;3); (-1; 6); (-20; 6); (-547; 6);…

Il y en a encore une infinité !

On peut noter l'ensemble des couples solutions :

S = { $(x, 6), x < 2$ } ou S = { $(x, 6)/x \in$] -∞; 2[}.

SEQUENCE 92

Résolution graphique des inéquations du 1er degré à deux inconnues

Objectif : Résoudre graphiquement l'inéquation du 1er degré à deux inconnues

On peut représenter graphiquement l'ensemble des couples solutions des inéquations du 1er degré à deux inconnues.

Exemple

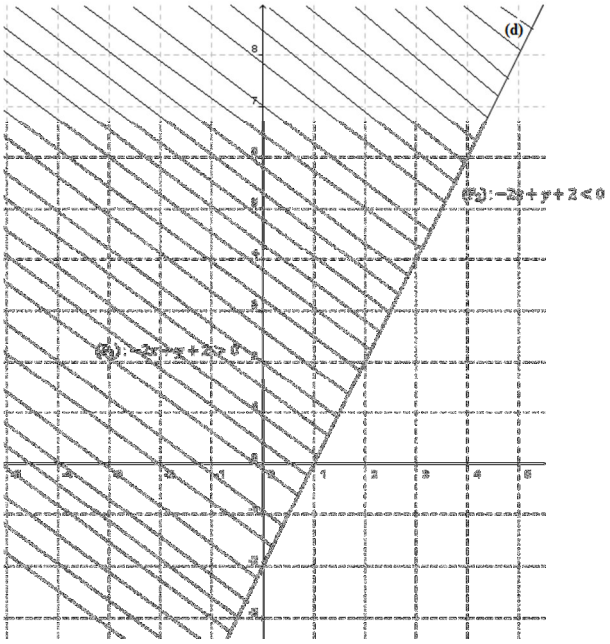
Soit l'inéquation$-2x + y + 2 > 0$.

Résolvons l'inéquation $-2x + y + 2 > 0$.

$$y > 2x - 2.$$

Représentons graphiquement la droite d'équation (d): $y = 2x - 2$.

On obtient le graphique suivant:



La droite (d) partage le plan en deux demi-plans (P_1) et (P_2).

Dans le demi-plan (P_1), choisissons un point de coordonnées connues puis vérifions si le couple de coordonnées est une solution ou non à l'inéquation proposée.

Cette vérification permet de savoir si l'inéquation est vraie pour le point choisi dans (P_1). Si c'est le cas, alors le demi-plan (P_1) est l'ensemble des couples solutions de l'inéquation$-2x + y + 2 > 0$.

Si ce n'est pas le cas, alors (P_2) sera l'ensemble des couples solutions de l'inéquation $-2x + y + 2 > 0$

SEQUENCE 93

Système d'équations du 1er degré à deux inconnues

Objectif : Résoudre un système d'équation du premier degré à deux inconnues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en utilisant différentes méthodes

Définition

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est une écriture de la forme: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b', c' sont des réels donnés, a, b, a' et b' tous non nuls.

Résoudre un tel système, c'est déterminer tous les couples (x, y) de réels qui vérifient simultanément les deux égalités.

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre un système d'équations du 1er degré à deux inconnues :

- La méthode de résolution par substitution ;
- La méthode de résolution par combinaison ;
- La méthode de résolution par interprétation graphique.

Nous abordons ces différentes méthodes de résolution par des exemples de systèmes d'équations du 1er degré à deux inconnues.

SEQUENCE 94

Exemples de résolution des systèmes d'équations du 1er degré à deux inconnues

Objectif: Résoudre des systèmes d'équations du 1er degré deux inconnues par la méthode de substitution

- **Méthode par substitution**

Résolvons le système : $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ -4x - 3y = -4 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 & \text{équation}(1) \\ -4x - 3y = -4 & \text{équation}(2) \end{cases}$

. Exprimons-y-en fonction de x à l'aide de l'équation (1).

On a : $2x - y = 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$ (1')

. Reportons cette expression de y dans l'équation (2).

On a : $-4x - 3(2x - 2) = -4$. Résolvons cette équation.

On a : $-4x - 3(2x - 2) = -4 \Leftrightarrow -4x - 6x + 6 = -4$

$\Leftrightarrow -10x = -10$

d'où $x = 1$

Dans l'équation (1'), on remplace x par sa valeur obtenue ci-dessus.

On a : $y = 2(1) - 2 = 2 - 2 = 0$.

La solution cherchée est donc le couple (1 ;0).

On écrit : S= {(1 ; 0)}.

SEQUENCE 95

Objectif: Résoudre par la méthode de combinaison

Méthode par combinaison

Exemple

Considérons le même système : $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ -4x - 3y = -4 \end{cases}$

Nommons l'équation $2x - y = 2$ par (1) et la seconde par (2).

On a donc : $\begin{cases} 2x - y = 2 & (1) \\ -4x - 3y = -4 & (2) \end{cases}$

Multiplions l'équation (1) par 2 puis additionnons membre à membre les deux équations. On a: $\begin{cases} 2x - y = 2 & (1) \\ -4x - 3y = -4 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times 2x - 2y = 2 \times 2 & (1) \times 2 \\ -4x - 3y = -4 & (2) \end{cases}$

Ce qui donne: $\begin{cases} \cancel{4x} - 2y = 4 & (1') \\ \cancel{-4x} - 3y = -4 & (2) \end{cases}$

On élimine l'inconnue x.

$-5y = 0$ d'où $y = 0$.

On reporte la valeur de y obtenue ($y = 0$) dans l'une ou l'autre des deux équations.

Si on reporte cette valeur de y dans (2), on aura :

$-4x - 3(0) = -4 \Longrightarrow -4x = -4$ d'où $x = 1$.

On remarque que si on avait reporté la même valeur de y dans l'équation (1), on aurait obtenu la même valeur de x.

Comme on a obtenu $x = 1$ et $y = 0$, alors le couple (1 ;0) est la solution du système d'équation : $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -4x - 3y = -4 \end{cases}$.

Donc : S= {(1 ;0)}.

SEQUENCE 96

Objectif : Résoudre par interprétation graphique

Méthode par interprétation graphique

Exemple

Considérons toujours le même système utilisé plus haut: $\begin{cases} 2x - y = 2 & (1) \\ -4x - 3y = -4 & (2) \end{cases}$

. Associons à chaque équation du système une équation de droite:

(d_1): y = 2x − 2

(d_2): y = $-\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

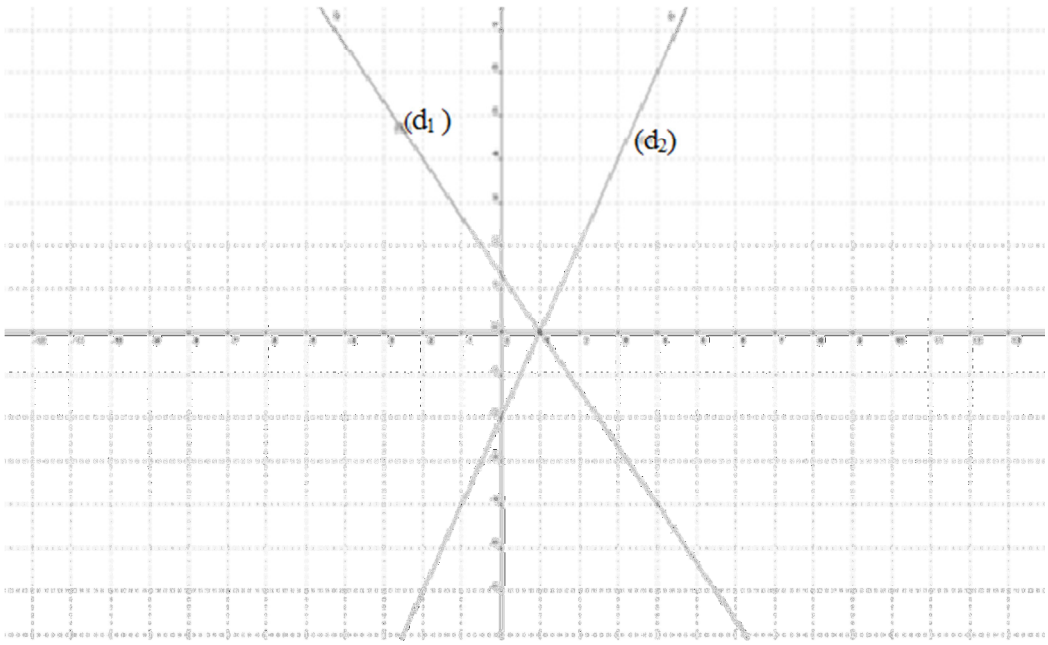
. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, représentons les droites (d_1) et (d_2) dont les équations sont spécifiées ci-dessus.

On a : (d_1): y = 2x − 2

x	0	1
y	-2	0

(d_2): y = $-\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

x	-2	1
y	4	0



Les deux droites se coupent au point de coordonnées (1 ; 0).

- Ce couple de coordonnées est donc la solution du système : $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -4x - 3y = -4 \end{cases}$
- S= {(1 ; 0)}.

▼Remarque

Cette méthode est généralement approximative mais elle peut être utilisée pour contrôler les résultats obtenus par calcul ou alors pour anticiper de l'existence ou non de solution.

Exercice

Résous chaque système par la méthode de calcul de ton choix, puis vérifie les résultats par la méthode graphique.

a) $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = -8 \\ 2y + 3x = 0 \end{cases}$

SEQUENCE 97

Système d'inéquations du 1er degré à deux inconnues

Objectif : Définir et reconnaitre un système d'inéquation du premier degré dans IRXIR

Définition

On appelle système d'inéquations du 1er degré à deux inconnues ou système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la donnée de deux ou plusieurs inéquations du 1er degré à deux inconnues.

Exemples

a) $\begin{cases} -2x + 2y < 0 \\ x + 2y > 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - \frac{1}{3}y \geq 5 \\ -3x + 2y < 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y > 1 \\ -\frac{4}{5}x + \frac{2}{3}y \leq 3 \end{cases}$.

Sont des systèmes de deux inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

SEQUENCE 98

Résolution du système de deux inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Objectif: Résoudre un système de deux inéquations du 1erdegré dans IRXIR

Cette résolution se fait généralement sous forme graphique.

Exemple

Résolvons le système d'inéquations du 1er degré à deux inconnues : $\begin{cases} 2x - y > 2 \\ -4x - 3y \leq -4 \end{cases}$

Résoudre ce système, c'est chercher graphiquement toutes les solutions communes aux deux inéquations.

Pour ce système, on a : $\begin{cases} 2x - y > 2 \\ -4x - 3y \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 2x - 2 \\ y \geq -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases}$.

- Traçons d'abord les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives :

  $(\Delta): y = 2x - 2$ et $(\Delta'): y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$.

- Déterminons par rapport à chaque droite, le demi-plan dont les points ont des coordonnées vérifiant l'inéquation correspondante.

Les couples réels qui sont solutions communes aux deux inéquations sont donc les couples-solutions du système.

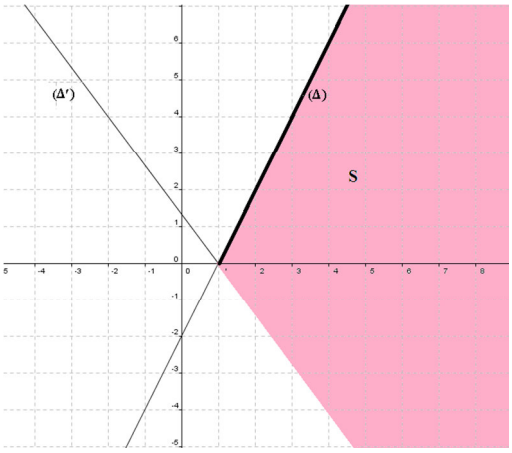
On a donc :

$(\Delta): y = 2x - 2$

x	2	0
y	2	-2

$(\Delta'): y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

x	1	-2
y	0	4



Conclusion

Les couples (x, y) qui vérifient à la fois les deux inéquations sont représentés par la région du plan hachurée en rouge. La demi-droite ayant pour origine le point de coordonnées (1 ; 0) incluse dans (Δ') et bordant la région hachurée en rouge appartient aussi à l'ensemble des solutions du système.

SEQUENCE 99

Problèmes se ramenant à des systèmes d'équations du 1er

Degré à deux inconnues

Objectif : Résoudre des problèmes se ramenant à des systèmes d'équations

Pour résoudre algébriquement des problèmes se ramenant à des systèmes d'équations du 1er degré à deux inconnues, on procède par les 4 étapes suivantes :

1ère étape: Choisir des inconnues x et y;

2ème étape: Mettre en équations le problème donné;

3ème étape: Résoudre le système d'équations obtenu;

4ème étape: Conclure.

Exemple

Résolvons le problème suivant :

Deux nombres ont pour somme 240 et pour différence leurs carrés 10800.Quels sont ces nombres ?

1ère étape: Choix des inconnues ;

Soient x et y: les deux nombres entiers naturels ; donc $x \in \mathbb{N}^{\star}$ et $y \in \mathbb{N}^{\star}$.

2ème étape: Mise en inéquations.

. Si la somme de x et y est 240 alors on traduit cette situation $+ y = 240$

Si la différence de leurs carrés est 10800 alors la traduction de cette situation est: 10800 .

Comme les nombres naturels x et y doivent vérifier à la fois les deux conditions spécifiées par le problème, alors on est en présence d'un système d'équations à résoudre qui est le suivant: $\begin{cases} x + y = 240 \\ x^2 - y^2 = 10800 \end{cases}$

3ème étape: Résolvons le système obtenu. Pour cela, on a:

$$\begin{cases} x + y = 240 \\ x^2 - y^2 = 10800 \end{cases}$$

équivaut à $\begin{cases} x = 240 - y \\ (240 - y)^2 - y = 10800 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = 240 - y \\ 57600 - 480y + y^2 - y^2 = 10800 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = 240 - y \\ 480\, y = 46800 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = 240 - y \\ y = \frac{46800}{480} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = \frac{285}{2} \\ y = \frac{195}{2} \end{cases}$

4ème étape : vérification et conclusion

$Les\ nombres\ x = \frac{285}{2}\ et$
$y = \frac{195}{2}$

Vérifient le système donc $S = \left\{\left(\frac{285}{2} \middle| \frac{195}{2}\right)\right\}$

SEQUENCE 100

Problèmes se ramenant à des systèmes d'inéquations du 1er

Degré à deux inconnues

Objectif : Résoudre des problèmes se ramenant à des systèmes d'inéquations

Pour résoudre algébriquement des problèmes se ramenant à des systèmes d'équations ou d'inéquations du 1er degré à deux inconnues, on procède par les 4 étapes suivantes :

1ère étape: Choisir des inconnues x et y;

2ème étape: Mettre en équations ou en inéquations le problème donné;

3ème étape: Résoudre le système d'inéquations obtenu;

4ème étape: Conclure.

Exemple

Résolvons le problème suivant :

Trouve deux nombres entiers naturels différents de 0 dont la somme est plus petite que 9 et la différence est plus grande que 4. A l'aide d'un graphique, donne toutes les solutions possibles.

Résolution

1ère étape: Choix des inconnues ;

Soient x et y: les deux nombres entiers naturels ; donc $x \in \mathbb{N}^{\star}$ et $y \in \mathbb{N}^{\star}$.

2ème étape: Mise en inéquations.

- Si la somme de x et y est plus petite que 9 alors on traduit cette situation: $x + y < 9$
- Si la différence de x et y est plus grande que 4 alors la traduction de cette situation est: $x - y > 4$

Comme les nombres naturels x et y doivent vérifier à la fois les deux conditions spécifiées par le problème, alors on est en présence d'un système d'inéquations à résoudre qui est le suivant: $\begin{cases} x + y < 9 \\ x - y > 4 \end{cases}$

3ème étape: Représentons graphiquement l'ensemble des couples solutions de ce système. Pour cela, on a:

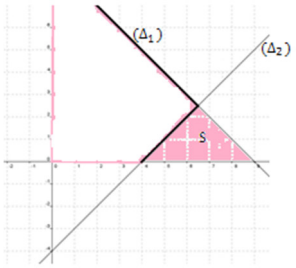
$\begin{cases} x + y < 9 \\ x - y > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -x + 9 \\ y < +x - 4 \end{cases}$.

On commence la résolution par la représentation des droites :

$(\Delta)_1 : y = -x + 9$ et $(\Delta)_2 : y = x - 4$.

Puis on détermine la région du plan dont les points ont des coordonnées vérifiant simultanément les deux inéquations.

On a:



La région coloriée représente l'ensemble des couples-solutions du système d'inéquations.

4ème étape : vérification et conclusion

Dans la région délimitée, déterminons tous les points dont les coordonnées sont des entiers naturels.

L'ensemble de ces points est donc constitué par les couples solutions cherchés.

On a : S = {(6 ;1) ; (7 ; 1)}.

Les points appartenant à (Δ_1) et (Δ_2) ne sont pas des solutions du système

LECONS DES COMPETENCES DE BASE 2 DU DEUXIEME TRIMESTRE

Equations de droites

SEQUENCE 101

Ecriture d'une équation de droite définie par Un point et un vecteur directeur

Objectif : Écrire une équation et/ou une équation réduite de la droite définie par un point et un vecteur directeur

Dans toute la leçon, sauf mention contraire, le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Propriété

- $\vec{u}$ est un vecteur et A, un point du plan.

La droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des

Points M du plan tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k.\vec{u}$.

- Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme y = ax +b.

Le nombre réel a est appelé le coefficient directeur de cette droite ;

le nombre réel b est appelé ordonnée à l'origine de cette droite.

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme x = b où b est un nombre réel quelconque.

Exemple

On donne le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et le point A(- 3 ; 2).

Détermine l'équation de la droite (D) passant par A et admettant $\vec{u}$ pour vecteur directeur.

Solution :

Soit M (x ;y)∈ (D) tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires

$\overrightarrow{AM}$(x+3 ;y-2) et$\binom{2}{-1}$; les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires ⇒ -1x(x+3)-2x(y-2)=0

⇒ -x-3-2y+4=0 ⇒ (D): -x-2y+1 =0 ou (D) : y = $-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

SEQUENCE10 2

Ecriture d'une équation de droite définie par deux points

Objectif : Écrire une équation et/ou une équation réduite de la droite définie par deux points

Propriété

A et B étant deux points du plan, il existe une droite et une seule (D) passant par A et B et admettant $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur directeur.

Cette droite est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires.

Exercice

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) on donne les points A(1 ;2) et B(- 2 ; - 3).

Donne l'équation de la droite (D) passant par A et B.

Solution : soit M(x ; y))∈ (AB) tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{AB}$(-2-1 ;-3-2) ⇒ $\overrightarrow{AB}$(-3 ;-5) et $\overrightarrow{AM}$(x-1 ; y-2)

⇒ -3x(y-2)+5x(x-1) = 0 ⇒-3y+6+5x-5 =0 ⇒5x-3y+1=0

(AB) : 5x-3y+1 =0

SEQUENCE 103

Ecriture d'une équation de droite définie par Un point est le coefficient directeur

Objectif : Écrire une équation et/ou une équation réduite de la droite définie par un point et le coefficient directeur

Propriété

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), on donne le point A(α ;β) et un nombre réel a.

Il existe une droite (D) et une seule passant par A et ayant a comme

Coefficient directeur.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne le point A (2 ; - 1).

Détermine l'équation de la droite (D) passant par A et ayant – 2 comme

Coefficient directeur.

Solution :

soit (D) : $y = ax + b$ l'équation de la droite et -2 son coefficient directeur ;donc

:$y = -2x + b$

Le point A appartient à (D) $\Rightarrow$ $= -2x2 + b \Leftrightarrow b-4 = -1 \Leftrightarrow b = 3$

D'où (D) : $y = -2x + 3$

SEQUENCE 104

Ecriture d'une équation de droite passant par un point et parallèle à une droite donnée

Objectif : Écrire une équation et/ou une équation réduite de la droite passant par un point et parallèle une droite donnée

Propriété

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), on donne le point A et une droite (D) d'équation réduite $y = ax + b$.

Par le point A, il passe une droite et une seule parallèle à la droite (D).

Exercice

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), on donne le point A(- 4 ; 4),B (2 ;7) et C(-3 ; -1) Recherchons

une équation de la droite (D) parallèle à (AB) et passant par C.

Solution : M (x ;y) un point du plan .On sait que : M appartient à (D) équivaut à $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$

Sont colinéaires.

Or : $\overrightarrow{CM}$ (x+3 ;y+1) et $\overrightarrow{AB}$ (6 ;3) d'où M∈(D) équivaut à $3(x+3)-6(y+1) = 0$

Equivaut à $3x+9-6y-6 =0$

$3x-6y+3 = 0$ équivaut à $x-2y+1 = 0$

La droite (D) a pour équation (D) : $x-2y+1=0$

SEQUENCE 105

Ecriture d'une équation de droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée

Objectif : Écrire une équation et/ou une équation réduite de la droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée

Propriété

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), on donne le point A et une droite (D) d'équation réduite $y = ax + b$.

Par le point A, il passe une droite et une seule perpendiculaire à la droite (D).

Exemple

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), on donne les points A(- 1 ; 2), B(-3 ; 6) et C(3 ; - 1).

Détermine une équation de la droite (D) passant par C et perpendiculaire à (AB).

Solution : Soit M(x ;y) un point du plan. On sait que :

M(x ;y) appartient à (D) équivaut à $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Or : $\overrightarrow{CM}$ (x-3 ;y+1) et $\overrightarrow{AB}$(-2 ;4)

D'où : M∈(D) équivaut à -2(x-3)+4(y+1)=0

M∈(D) équivaut à -2x+6+4y+4=0.

M∈(D) équivaut à x-2y-5=0

La droite (D) a pour équation (D) : x-2y-5=0

SEQUENCE 106

Construction d'une droite définie par une équation

Objectif : Construire une droite déterminée par une équation

▼Méthode

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), pour construire la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$, il suffit de déterminer les coordonnées de deux points appartenant à (D) et de tracer la droite (D) qui passe par ces deux points.

Exercice

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), construis la droite (D) d'équation $x - 3y + 4 = 0$.

SEQUENCE 107

Construction d'une droite définie par un point et un vecteur directeur

Objectif : Construire une droite déterminée par un point et un vecteur directeur

▼Méthode

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), pour construire la droite (D) passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}(a\,;b)$, on construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = a\,.\,\overrightarrow{OI} + b.\,\overrightarrow{OJ}$.

(D) est donc la droite (AB).

Exemple

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne le point A(- 3 ; 2).

Construis la droite (D) passant par A et admettant le vecteur $\vec{u}(2\,;1)$

Comme vecteur directeur.

SEQUENCE10 8

Un Construction d'une droite définie Par un point et son coefficient Directeur

Objectif : Construire une droite déterminée par un point et son coefficient directeur

▼Méthode

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), pour construire la droite (D) passant par un point donné A et de coefficient directeur le nombre réel a, il suffit de déterminer l'équation réduite de la droite (D). A partir de cette équation réduite, trouver les coordonnées d'un autre point B de (D) puis construire (D).

Exemple

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne le point A(2 ; 1). Trace la droite (D) passant par A admettant le nombre réel 3 pour coefficient directeur.

SEQUENCE10 9

Détermination du vecteur directeur d'une droite donnée par son équation

Objectif : Trouver un vecteur directeur d'une droite définie par son équation

Propriété

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), la droite (D) d'équation

$ax + by + c = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}(-b ; a)$.

Exemple

Détermine un vecteur directeur de la droite (D) d'équation $3x + y + 2 = 0$.

Solution : La droite (D) d'équation $3x+y+2$ admet pour vecteur

directeur $\vec{u}(-1 ; 3)$.

SEQUENC 110

Détermination du point d'intersection de deux droites sécantes

Objectif : Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes

▼Méthode

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), pour déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes (D) et (D') données par leurs

équations réduites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, il suffit de résoudre l'équation

$ax + b = a'x + b'$.

Pour la valeur de x trouvée, déterminer y dans l'une ou l'autre des équations de droites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

▼NB : Lorsque les deux droites sécantes sont minutieusement tracées dans un repère bien construit, on peut graphiquement

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne deux droites (D) et (D') d'équations réduites respectives $y = -x + 2$ et $y = 3x - 4$.

détermine les coordonnées du point I Intersection de (D) et (D').

Solution :

Résolvons l'équation : $-x+2=3x-4$ on a : $-x-3x = -4-2$ équivaut à $-4x = -6$ soit $x=\frac{3}{2}$

Remplaçons x par sa valeur dans (D) on a :$y= -\frac{3}{2}+2$ d'où $y=\frac{1}{2}$ soit $I(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2})$

SEQUENCE 111

Détermination des coordonnées d'un point d'une droite, de son coefficient directeur et de son équation réduite à partir de son tracé

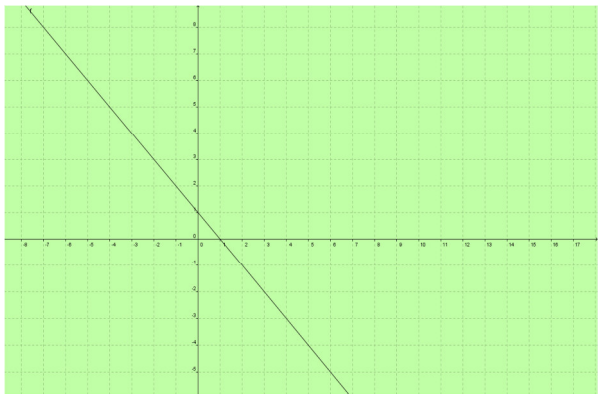
Objectif : Trouver partir du tracé d'une droite dans le plan muni d'un repère son coefficient directeur et son équation réduite

▼Méthode

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on peut à partir du tracé d'une droite déterminer :

- les coordonnées des points de cette droite ;
- le coefficient directeur de cette droite ;
- l'équation réduite de cette droite.

Exemple



Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on trace la droite (D) comme ci-contre indiquée.

a) A partir de ce tracé, trouvons les coordonnées de deux points distincts A et B de la droite (D).

Soit A(-2 ;3) et B(2 ;-1)

b) Déduisons – en le coefficient directeur de la droite (D) en utilisant la relation

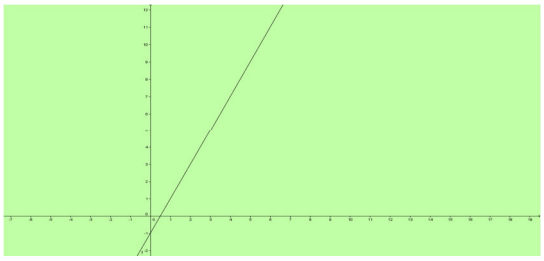
$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ soit $a=\frac{-1-3}{2+2} = \frac{-4}{4}$ a =-1

c) Donnons une équation réduite de la droite (D).

Soit: $y = ax + b$ une équation réduite on $ay = -x + b$. Déterminons la valeur de b

3 = - (-2) +b équivaut à b=1 d'où la droite (D) a pour équation (D) :y= -x+1

Exercice



Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on a tracé la droite (D) ci – dessous :

Détermine, à partir de ce tracé, les coordonnées de deux points distincts de (D) ; le coefficient directeur ainsi qu'une équation réduite de (D).

SEQUENCE 112

Condition de parallélisme et de perpendicularité de droites à partir de leurs pentes

Objectif : Reconnaitre ou justifier à l'aide de leurs pentes que deux droites sont parallèles ou perpendiculaires

Condition de parallélisme de droites à partir de leurs pentes

Propriété

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), deux droites (D) et (D') d'équations réduites respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si $a = a'$.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), (D) est la droite d'équation $y = 3x - 2$.

Trouve une équation de la droite (D') passant par le point A(- 2 ; - 3) et parallèle à (D).

Condition de perpendicularité de droites à partir de leurs pentes

Propriété

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), deux droites (D) et (D') d'équations réduites respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont perpendiculaires si $a \times a' = -1$.

Exercice

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), (D) et (D') sont deux droites d'équations respectives $y - \frac{1}{2}x - 1 = 0$ et $2x - y - 3 = 0$.

On a : $a \times a' = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$ donc (D) et (D') sont deux droites perpendiculaire

Symétrie centrale-symétrie orthogonale

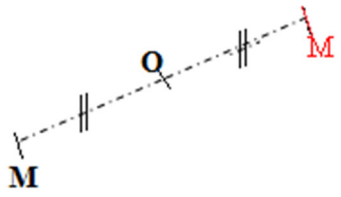
SEQUENCE 113

SYMETRIE-CENTRALE-SYMETRIE-ORTHOGONALE

Objectif : Construire les figures symétriques par la symétrie centrale et orthogonale

Définitions

Symétrie centrale

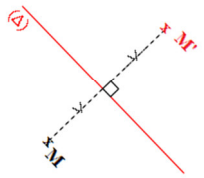


Un point O étant fixé, M' est le symétrique de M par la symétrie de centre O lorsque O est le milieu du segment [MM'].

On note : $S_O(M) = M'$.

On écrit donc : $S_O(M) = M' \Longrightarrow O$ est le milieu du segment [MM'].

Symétrie axiale ou réflexion



Une droite (Δ) étant fixée, M' est le symétrique de M par la réflexion d'axe (Δ) lorsque (Δ) est la médiatrice du segment [MM'].

Si M∈(Δ), M'= M.

M' est le symétrique de M par la réflexion d'axe (Δ) se note : $S_{(\Delta)}(M) = M'$.

Exemple

Soit ABC un triangle du plan.

a) Par C, construis la droite (Δ) parallèle à (AB).
b) Construis le symétrique A'B'C' du triangle ABC par la symétrie de centre C.

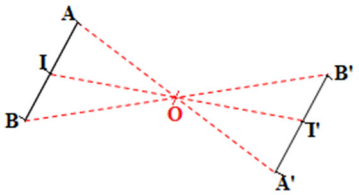
Construis le symétrique $A_1B_1C_1$ du triangle ABC par la réflexion d'axe (Δ).

SEQUENCE 114

Image d'un segment [AB] et de son milieu I

Objectif : Utiliser une symétrie centrale ou une symétrie orthogonale pour construire

Symétrie centrale

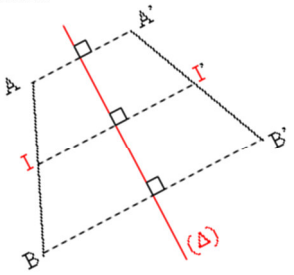


[A'B'] est l'image du segment [AB] par la symétrie de centre O.

On constate que le point I' image du milieu I de [AB] est aussi le milieu du segment [A'B'].

De plus, on constate que ABA'B' est un parallélogramme de centre O.

Symétrie axiale



$S_{(\Delta)}([AB]) = [A'B']$.

I' image du milieu I de [AB] est le milieu du segment [A'B'].

On constate que ABB'A' est un trapèze isocèle.

Exercice

On considère la figure ci-contre.

B est le milieu de [AC] et E est le milieu de [AD].

a) Détermine l'application du plan qui transforme le point E en C et le point B en I.

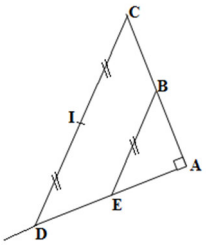
b) On considère la symétrie centrale $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}(B) = D$ et $\mathcal{S}(E) = I$.

   Quel est le centre de cette symétrie ?

c) Détermine l'application du plan telle que D ait pour image C et B ait pour image E.

   Quelle est l'image du point A par cette application ?

   Quelle est l'image de I par cette transformation ?



SEQUENCE 115

Utilisation des symétries pour déterminer l'image des points, d'un segment et du milieu d'un segment

Objectif : utiliser les symétries pour déterminer l'image des points, d'un segment et du milieu d'un segment

Propriétés

Symétrie de centre O

- Les points M tels que S (M) = M(point invariants) ; Le point O est le seul point tel que S_O (O) = O
- L'image d'un segment est un segment de même longueur. ;S_O([AB])= [A'B']. On dit que la symétrie centrale conserve les distances
- L'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image de ce segment. Si I milieu de [AB] et si S_O([AB])= [A'B'] alors S_O(I)=I'est le milieu de[A'B']. On dit que la symétrie centrale conserve les milieux

Symétrie axiale (ou réflexion) d'axe (Δ)

- Tous les points M de la droite (Δ) sont tels que $S_{(\Delta)}$(M)= M
- L'image d'un segment est un segment de même longueur. $S_{(\Delta)}$([AB])= [A'B'] et AB = A'B' .On dit que la symétrie axiale conserve les distances

- L'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image de ce segment. Si I milieu de [AB] et si $S_{(\Delta)}$([AB])= [A'B'] alors $S_{(\Delta)}$(I)=I'est le milieu de [A'B']. On dit que la symétrie axiale conserve les milieux.

SEQUENCE 116

Utilisation des symétries pour démontrer

SYMETRIE CENTRALE

Objectif : utiliser la symétrie centrale pour démontrer l'alignement des points, la perpendicularité des droites, le parallélisme des droites et l'égalité des angles

Propriétés

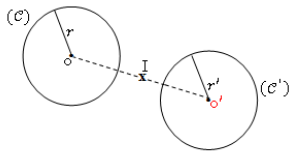
Par une symétrie centrale :

L'image d'une droite est une droite et les deux droites sont parallèles.

S_O(D)= (D')et (D)∥(D').

Si O∈ (D) alors S_O(D)=(D).

- Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles ; On dit que la symétrie centrale conserve le parallélisme
- Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires. On dit que la symétrie centrale conserve le perpendiculaire.
- Des points alignés ont pour images des points alignés. On dit que la symétrie centrale conserve l'alignement
- L'image d'un angle est un angle de même mesure .On dit que la symétrie centrale conserve les mesures d'angles
- L'image d'un cercle est un cercle de même rayon et dont le centre est l'image du centre du cercle antécédent.



SEQUENCE 117

Utilisation des symétries pour démontrer

SYMETRIE ORTHOGONALE

Objectif : utiliser la symétrie orthogonale pour démontrer l'alignement des points, la perpendicularité des droites, le parallélisme des droites et l'égalité des angles

Propriétés

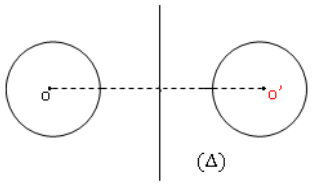
Par une symétrie orthogonale ou axiale :

- L'image d'une droite est une droite.

$S_{(\Delta)}(D)=(D')$

Si $(D)\perp(\Delta)$ alors $S_{(\Delta)}(D)=(D)$.

- Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles. On dit que la symétrie axiale conserve le parallélisme
- Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires. On dit que la symétrie axiale conserve la perpendicularité
- Des points alignés ont pour images des points alignés. On dit que la symétrie axiale conserve l'alignement
- L'image d'un angle est un angle de même mesure On dit que la symétrie axiale conserve les mesures d'angles.
- L'image d'un cercle est un cercle de même rayon et dont le centre est l'image du centre du cercle antécédent.



Exercice

ABC est un triangle. Le point B' est le symétrique de B par rapport à (AC) et le point C' est le symétrique de C par rapport à (AB).

Démontre que : BC' = B'C.

SEQUENCE 118

Symétries successives

Symétries centrales successives

Objectif : Composer deux symétries centrales

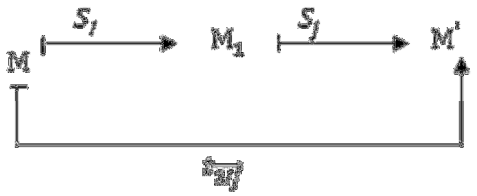
a) Détermine l'application du plan qui transforme le point M en le point M'.

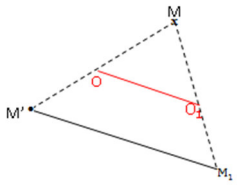
Composée de deux symétries centrales

Propriété

L'action successive sur une figure (ou un point), de la symétrie de centre I suivie de la symétrie de centre J est identique à l'action de la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$.

On a :





L'action S_I suivie de l'action S_J se note : $S_J O S_I$.

On a donc : $S_J O S_I = t_{2\overrightarrow{IJ}}$.

SEQUENCE 119

Symétries orthogonales successives

Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

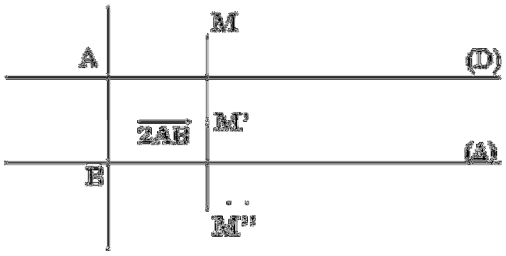
Objectif : Composer deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Propriété

Soient (D) et (Δ) deux droites parallèles distinctes et soit A appartenant à (D) et B appartenant à (Δ) tels que (AB) perpendiculaire à (D).

Appliquer la symétrie axiale d'axe (D) suivie de la symétrie axiale d'axe (Δ) revient à appliquer la translation de

vecteur $\overrightarrow{2AB}$.



$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{2AB}$

SEQUENCE 120

Symétries orthogonales successives

Composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires

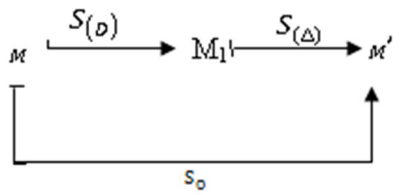
Objectif : Composer deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires

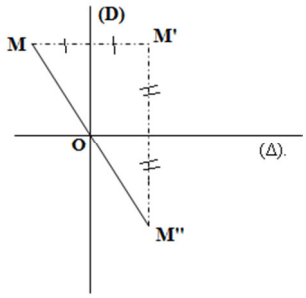
Propriété

Soient (D) et (Δ) deux droites perpendiculaires, sécantes en O.

Appliquer la symétrie axiale d'axe (D) suivie de la symétrie axiale d'axe (Δ) revient à appliquer la symétrie centrale de centre O.

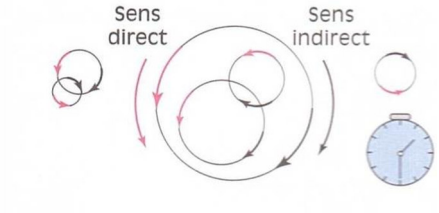
Donc on a :





Rotation

SEQUENCE 121



Rotation

Objectif : Indiquer un sens direct et indirect;

Sens direct, sens indirect

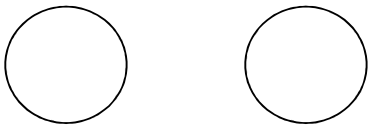
Définition

Dans le plan, on distingue deux sens de parcours sur un cercle :

- L'un est le sens des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens indirect.
- L'autre sens, contraire à celui des aiguilles d'une montre, est appelé sens direct.

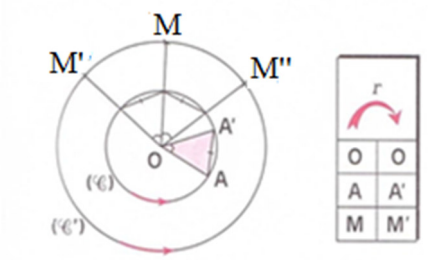
Exemple

Sur les cercles suivants, indique par une flèche un sens de parcours et précise si le sens indiqué est direct ou indirect :



SEQUENCE 122

Présentation et définition d'une rotation



Objectif : Définir une rotation

Définition

OAA' est un triangle isocèle en O.

(C) est le cercle de centre O et de rayon OA.

On considère un point M distinct de O et on désigne par (C') le cercle de centre O et de rayon OM.

On sait qu'il existe deux points M′ et M′′ de (C') tels que

mes $\widehat{MOM'}$ = mes $\widehat{M'OM''}$ = mes $\widehat{AOA'}$.

On désigne par M′ le point de (C') pour lequel le sens de parcours sur (C') de M vers M′est le même que celui du parcours sur (C) de A vers A'(sens direct).

Ainsi, à chaque point M du plan distinct de O, on fait correspondre un unique point M′.

Au point O, on associe O lui-même.

On définit ainsi une application du plan dans le plan déterminée par le triangle isocèle OAA'.

Cette application est appelée la rotation notée r de centre O qui transforme A en A′.

M′est l'image de M par cette rotation.

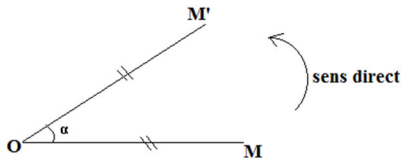
SEQUENCE 123

Image d'un point par une rotation

Objectif : Construire l'image d'un point par une rotation.

Définition

Un point fixe O et un angle α étant donnés, à tout point M distinct de O, on peut faire correspondre par la rotation r de centre O et d'angle α l'unique point M' tel que :



- mes $\widehat{MOM'}$ = α
- OM' = OM

Pour une rotation, en l'absence d'indication, le sens choisi est le sens direct.

Méthode de construction :

Pour construire l'image d'un point M par une rotation r de centre O qui transforme A enA′, OAA′ étant un triangle isocèle en O, on peut procéder comme suit :

- Tracer le cercle (C) de centre O qui passe par A et A' ;
- Tracer le cercle (C') de centre O qui passe par M ;
- Noter sur (C) et (C') le sens de parcours de A vers A′ ;
- Placer sur (C') le point M' tel que :
  - mes $\widehat{MOM'}$ = mes $\widehat{AOA'}$
  - le sens de déplacement de M vers M' sur (C') est le même que celui de A vers A' sur (C).

Exercice

ABC est un triangle équilatéral.

On désigne par r la rotation de centre A qui transforme B en C ;

Construis le point D image de C par r et le point E image du point D par r.

SEQUENCE 124

Image d'une figure par une rotation

Objectif : Construire l'image d'une figure simple par une rotation

Propriétés

Par une rotation r donnée,

1. l'image d'un segment est un segment de même longueur ;
2. l'image d'une droite est une droite ;
3. l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ;
4. les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ;
5. les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

NB : Toute rotation conserve l'alignement ; les distances ; les angles et les aires.

Exercice

OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

On désigne par r la rotation de centre O qui transforme A en B. Construis successivement le point C image de B par r et le point D image de C par r. Quelle est l'image de D par r ? Que peux-tu dire du quadrilatère ABCD ?

Homothétie

SEQUENCE 125

Définition d'une homothétie

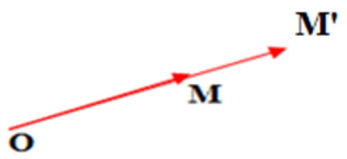
Objectif : Définir une homothétie

Définition

Soit un point O fixe et k un réel non nul. On appelle homothétie de centre O et de rapport k l'application du plan qui, a tout point M, associe le point M' tel que: $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

On a donc M' , image de M ,par l'homothétie de centre O et de rapport k

Et on note $h_{(O;k)}(M) = M'$.



$$\boxed{h_{(O;k)}(M) = M' \text{ équivaut à } \overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}}$$

SEQUENCE 126

Image d'un point par une homothétie

Objectif : construire l'image d'un point par une homothétie ;

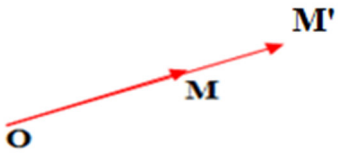
Si $h_{(O;k)}(M) = M'$ alors les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et les points O, M et M' sont alignés.

Si M est en O alors M est sa propre image.

On sait que si M et M' sont des points du plan tels que $S_O(M) = M'$.

Alors on peut écrire $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

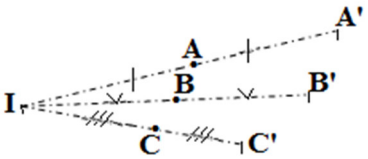
Or, si $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ alors M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k = -1.



Donc la symétrie centrale de centre O est l'homothétie de centre O et de rapport $k = -1$.

<u>Exercices :</u>

1) On considère la figure suivante :



a) Traduis les relations vectorielles que tu peux dégager de cette figure.
b) A partir de ces relations vectorielles, quelle est l'homothétie qui transforme les points A, B et C en A', B' et C' respectivement?
c) Détermine l'homothétie qui transforme les points A', B' et C'en A, B et C respectivement?

SEQUENCE 127

Image d'un segment et de son milieu par une homothétie :

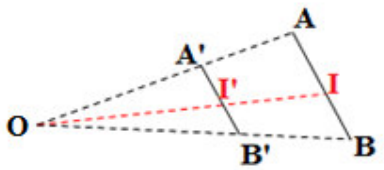
Objectif : construire l'image d'une figure simple par une homothétie ;

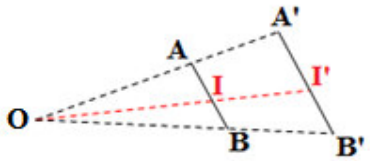
Propriétés

1. Par une homothétie de centre O et de rapport k non nul, l'image d'un segment [AB] est un segment[A'B'] de support parallèle à (AB) et tel que : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

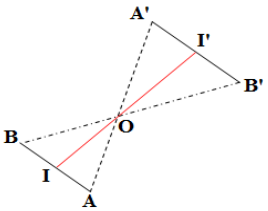
Si $k > 1$

si $0 < k < 1$

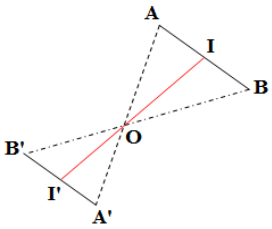




si $k < -1$



si $-1 < k < 0$

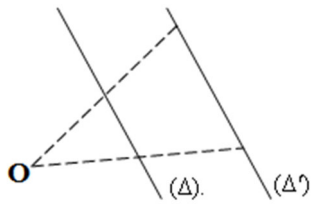


2. Soit h une homothétie de centre O et de rapport k non nul.

Pour tous points A et B d'images respectives A' et B' par cette homothétie, on a $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

3. L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à la première. (Δ′) est l'image de la droite (Δ) par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

On remarque que (Δ′) ∥ (Δ).



4. Par une homothétie, le centre, un point et son image sont alignés.

5. Une homothétie de rapport k non nul et différent de 1 et de -1, ne conserve pas les distances : A' B' = |k| . AB.

6. Des points alignés ont pour images des points alignés par une homothétie : on dit que l'homothétie conserve l'alignement des points.

SEQUENCE 128

Triangles homothétiques

Objectif : reconnaître deux triangles homothétiques et utiliser une homothétie pour calculer les distances.

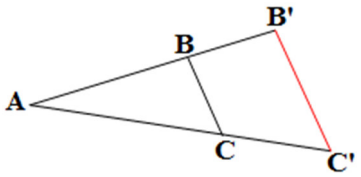
Propriété

ABC et AB'C' sont des triangles homothétiques si on a :

$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

Exemple

Considérons la figure suivante :



On a $\overrightarrow{AB'} = k\,.\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = k\,.\,\overrightarrow{AC}$(k> 0).

Déterminons $\overrightarrow{B'C'}$. On a : $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'}$

$= k\,\overrightarrow{BA} + k\,\overrightarrow{AC}$

$= k\,.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = k\,\overrightarrow{BC}$

Donc on a : $\overrightarrow{B'C'} = k \,.\, \overrightarrow{BC}$.

D'autre part, on a : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. (propriété de Thalès)

Les triangles ABC et AB'C' sont appelés des triangles homothétiques ou encore des triangles semblables

EXERCICES D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 1 DU DEUXIEME TRIMESTRE

1. Parmi les fonctions suivantes, indique celles qui sont des applications affines en précisant les valeurs de a et b.

$f(x) = \frac{x}{7} + 2$; $g(x) = -x$; $h(x) = x + \frac{2}{3}$; $k(x) = 7(3 - 2x)$; $l(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} - 3$;

$m(x) = x^2 - 11$; $n(x) = \frac{7}{x} + 2$; $o(x) = \frac{1+2x}{3}$; $q(x) = -8$; $r(x) = x\sqrt{3} + 2$.

2. On donne l'application affine f définie pour tout x réel par:

$f(x) = -2x + 5$.

a) Calcule f(5) ; f(-3) ; $f(-\frac{1}{2})$; $f(\frac{3}{4})$.

b) Calcule les nombres a, b et c tels que f(a) = 5 ; f(b) = - 5 ; $f(c) = -\frac{3}{4}$.

3. f est l'application affine telle que f(-1) = 3 et f(2) = - 2.

a) Calcule le coefficient et le terme constant de cette application affine.

b) Recopie et complète le tableau suivant :

x	-3	0	$\frac{1}{2}$			
f(x)			$\frac{5}{4}$	0	-1	

4. Donne le sens de variation de chacune des applications affines suivantes :

$f(x) = 2x + 3$; $g(x) = -5x$; $h(x) = (3 - 2\sqrt{2})x - 2$; $i(x) = 7$;

$k(x) = -\frac{1}{3}x + 2$.

5. a et b étant des nombres réels, f est l'application affine définie pour tout x réel par : $f(x) = ax + b$.

Dans chaque cas, détermine :

a) b sachant que $a = -\sqrt{3}$ et f(5) = 7.

b) a sachant $b = 1 + \sqrt{2}$ et $f(3) = -\sqrt{2}$.

c) a et b sachant que $f(3) = 1$ et $f(-\sqrt{5}) = 3$.

6. f est l'application affine définie pour tout x réel par :

$$f(x) = (2\sqrt{2} - 1)x + 1.$$

a) f est-elle croissante ou décroissante ?

b) Range par ordre croissant, sans les calculer les nombres $f(\sqrt{2} - 1)$; $f(\frac{2}{3})$; $f(\frac{3}{5})$; $f(\frac{2}{\sqrt{5}})$.

7. Trouve, dans chaque cas, l'ensemble de définition de la fonction rationnelle *f*.

a) $f(x) = \frac{-3x}{x^2-x+1}$; b) $f(x) = 4x + \frac{x-1}{9-x^2}$.

8. Soit la fonction rationnelle suivante: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$.

a) Détermine le domaine de définition de *f*.

b) Simplifie $f(x)$ sur son domaine de définition.

c) Résous dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 1$ et $(x) > 1$.

9. Soit $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3-x^2}$.

a) Détermine le domaine de définition de *f*.

b) Simplifie $f(x)$ sur son domaine de définition.

c) Calcule : $f(-4)$; $f(1)$; $f(0)$; $f(3)$; $f\left(-2\sqrt{2}\right)$.

10. On considère les polynômes suivants :

$A(x) = 9 - 4x^2$ et $B(x) = (2x + 3)(x - 1) + 2x(2x + 3)$.

a) Factorise $A(x)$ et $B(x)$.

b) Soit $f(x)$ la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

- Détermine le domaine de définition de *f*.
- Simplifie $f(x)$ sur son domaine de définition.

c) Calcule $f\left(\frac{1}{3}\right)$; *f(- 2)*; $f(0)$.

d) Calcule $f\left(\sqrt{2}\right)$ puis encadre $f\left(\sqrt{2}\right)$par des décimaux d'ordre 2 sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

e) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $f(x) = 0$; $f(x) = 1$.

f) Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $f(x) < 0$; $f(x) \leq 1$.

11. On considère les fonctions rationnelles suivantes :

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{5}{4x+3}$ et $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{8x+6}{2x+1}$

a) Détermine D_f et D_g.

b) Effectue : $f(x) + g(x)$ et $f(x).g(x)$.

c) Résous dans $\mathbb{R}$ $f(x) = -3$ et $g(x) = 0$.

d) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$.

e) 12. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

f) a) $4(x-2) = 5(2+x)$;

g) b) $\frac{1-x}{5} + \frac{x+1}{4} = \frac{3x}{20} + 1$;

h) c) $(4x-1) - 2\left(1 + \frac{3}{2}x\right) = 3x - 5(2-x) + 1$;

i) d) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = \frac{5}{6}$;

j) e) $(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{3} = x\sqrt{2}$;

k) f) $x\sqrt{8} - \sqrt{18} = -x\sqrt{2}$;

l) g) $x\sqrt{2} + 2\sqrt{5} = 2 + \sqrt{20}$.

m)

n) 13. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes après avoir développé et réduit:

o) a) $(x-1)^2 = x(x+2)$

p) b) $3(x-2) + x^2 = (x+3)^2$

q) c) $(3x-1)(x+1) = 3x^2 + 4$

r) d) $(x-2)(x+2) = x(x-1)$.

s)

t)

u) 14. Résous les équations proposées après les avoir transformées en équations-produits.

v) a) $(x-5)(x+2) + (x-5)(2x+1) = 0$.

w) b) $(x+2)^2 = x(x+2)$.

x) c) $8x - 4 + (x-3)(2x-1) = 0$.

y) d) $x^2 - 9(x-1)^2 = 0$.

z) e) $(3x+6)(x+5) - (x+2)(2x+1) = 0$.

aa) f) $(2x-3)(5x^2-5)=0$.

g) $(x-1)(2x+1)(3-2x)=0$.

15 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représente leur ensemble de solutions sur une droite graduée :

bb) a) $2x-(4\times x)\geq 3x$; b) $-2(13-x)>8$; c)- $\frac{x}{3}\leq 4$;

cc) d) $13\leq 9-3x$; e) $(6x+2)-(4x-8)\leq(5x-1)+(3x-5)$;

dd) f) $(4x+3)-(x-1)>x-2+12(1-x)$.

ee) 16. Un capitaine a le triple de l'âge de son fils. Dans onze ans, l'âge du capitaine sera le double de celui de son fils. Quels sont les âges respectifs du père et du fils ?

ff)

gg) 17. Un terrain rectangulaire a un périmètre de 3 km. La largeur mesure 150 m de moins que la longueur. Détermine les dimensions de ce terrain.

hh)

ii) 18. Trouve deux entiers naturels consécutifs tels que leur produit soit égal à leur somme augmenté de un.

jj) 1°. Résous chacune des inéquations suivantes :

kk) a) $\frac{5x-1}{8}<\frac{1}{8}$; b) $\frac{x-1}{5}-\frac{1}{2}\leq\frac{3+2x}{4}$; c) $x(x-2)>0$

ll) d) $-2(2-x)<-2(3-2x)$; e) $(2x+1)(x-1)+4(2x+1)\geq 0$;

mm) f) $x^2-49\leq 0$.

20. Considérons l'équation à deux inconnues : $3x-4y=2$.

a) Parmi ces couples, quels sont ceux qui sont solutions de cette équation ?

$\left(3;\frac{7}{4}\right)$; (2 ; 0) ; $\left(7;\frac{19}{4}\right)$; (3 ; -1).

b) Recopie puis complète les couples de façon à obtenir des solutions de l'équation :

(0 ; ----) ; (1 ; ----) ; (---- ; -1) ; (---- ; $\frac{1}{2}$).

c) Exprime y en fonction de x.

d) Représente graphiquement les solutions de cette équation dans un repère orthogonal.

21. L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x - y + 1 \leq 0$ est représenté par un demi-plan P.

a) Quelle est l'équation de la droite (d), frontière de ce demi-plan ?
Trace cette droite.

b) Le couple (0 ; 0) est-il solution de l'inéquation ?
L'origine du repère est-elle dans le demi-plan P?

c) Colorie le demi-plan P.

22. Résous les systèmes d'équations suivants :

$a) \begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

$b) \begin{cases} -2x + 5y = 3 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

$c) \begin{cases} 6x + 7y = -4 \\ -3x + 2y = 5 \end{cases}$

$d) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 3y \end{cases}$

$e) \begin{cases} \sqrt{3}x - y\sqrt{2} = 1 \\ x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0 \end{cases}$

$f) \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = -4 \end{cases}$

23. Résous chaque système par la méthode de calcul de ton choix.

$a) \begin{cases} 4(x - 2y) + 3(x + y) = 2 \\ 4(x + y) - 3(x + y) = 14 \end{cases}$

$b) \begin{cases} b)\ 2x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x\sqrt{2} + 2y\sqrt{3} = 8 \end{cases}$

$c) \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{6} \\ 5x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$

$d) \begin{cases} x - y\sqrt{5} + 4 = 0 \\ x\sqrt{5} + 2y - 3\sqrt{5} = 0 \end{cases}$

$e) \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 3x + 5y = \frac{7}{2} \end{cases}$

$f) \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 3x - 2(y + 5) = 0 \end{cases}$

24. Retrouve les deux nombres cachés de telle sorte que le système admette comme solution unique le couple (-1 ; 2) :

$$\begin{cases} 2x - y = \square \\ \square x + y = -1 \end{cases}$$

25 On considère l'inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $-2x + 3y - 6 \leq 0$.

a) Trouve 10 couples solutions de l'inéquation $-2x + 3y - 6 \leq 0$ ayant pour première composante $x = -2$

b) Trouve 10 couples solutions de la même inéquation ayant pour seconde composante $y = 2$.

c) Résous graphiquement l'inéquation $-2x + 3y - 6 \leq 0$.

26 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants

$a)\begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ x + y + 4 > 0 \end{cases}$ $\quad c)\begin{cases} x + 3y = -6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ $\quad e)\begin{cases} 6x + 15 \geq 3x \\ y + 6 \geq -3x \\ y \geq 0 \end{cases}$

$b)\begin{cases} y < x + 1 \\ 2y > -x + 2 \end{cases}$ $\quad d)\begin{cases} y > x - 5 \\ y + x < 3 + x \\ x > 0 \end{cases}$

27. Deux dépôts de sucre, A et B sont situés à 150 km l'un de l'autre. Au dépôt A, le quintal de sucre en poudre coûte 12KF. Au dépôt B, la même quantité de sucre en poudre coûte 11, 2 KF. Le transport par camion revient à 7KF par tonne et par kilomètre.

Exprime par une formule le prix y du quintal de ce sucre, quand il est transporté sur

x km, suivant qu'il provient de A ou de B.

Représente graphiquement les résultats obtenus.

Tires-en une conclusion d'ordre pratique.

(Vérifier les résultats par le calcul. On suppose que 1KF = 1000F.)

28. Détermine tous les nombres entiers de deux chiffres qui diminuent de 45 quand on intervertit les deux chiffres.

EXECICES D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 2 DU DEUXIEME TRIMESTRE

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne le point A($\frac{5}{2}$; 1) et le vecteur $\vec{u}\binom{-1}{2}$.

a) Ecris une équation de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b) Trace (D).

2. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points M($\frac{3}{2}$; - 2) ;

N (2 ; 1) et P (- 4 ; - 1).

a) Ecris une équation de la droite (MN).

b) Construis la droite passant par P et de vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$. Trouve une équation de cette droite.

3. Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), parmi les droites (D_1) ; (D_2) ; (D_3) ; (D_4) ; (D_5) et (D_6) d'équations respectives :

(D_1) : $y = -3x + \frac{3}{2}$

(D_2) : $-3x + y - 3 = 0$

(D_3) : $y - \frac{1}{3}x - 2 = 0$

(D_4) : $y = -\frac{1}{3}x - 4$

(D_5) : $x + 3y + 3 = 0$

(D_6) : $y + 3 = 0$.

Nomme celles qui sont parallèles et celles qui sont perpendiculaires.

4. Le plan étant muni d'un repère (O, I, J),

a) Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (D) passant par A et parallèle à (BC) :

- A(3 ; 2) ; B(4 ; - 3) et C(- 3 ; 2)
- A(5 ; - 3) ; B(- 1 ; 2) et C(3 ; 2)
- A(3 ; - 1) ; B(1 ; 0) et C(1 ; 4)

b) Dans chacun des cas suivants, trouve une équation de la droite (L) passant par A et perpendiculaire à la droite (BC).

- A(0 ; - 2) ; B(4 ; -3) et C(1 ; - 2)
- A(1 ; - 1) ; B(- 1 ; 2) et C(3 ; - 2)
- A(2 ; - 1) ; B(1 ; 3) et C(1 ; - 3)

5. Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), (D) est la droite d'équation $3x - 7y + 21 = 0$.

a) Trouve les coordonnées du point A intersection de (D) et (OI) puis les coordonnées du point B intersection de (D) et (OJ).

b) Détermine sans calcul les coordonnées du point C, symétrique de O par rapport au milieu M de [AB].

6. Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), (D) est la droite d'équation

$y = px + 2$, p étant un réel.

Dans chacun des cas suivants, détermine p pour que :

a) (D) passe par le point $A(\frac{3}{2}\ ;\ 1)$

b) (D) soit parallèle à la droite (D') d'équation $3x - 2y + 7 = 0$

c) (D) soit perpendiculaire à la droite (D'') d'équation $-2x - 5y - 4 = 0$.

7. Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne A(0 ; - 3) ; B(- 3 ; 6) et C(5 ; 2). La droite perpendiculaire à (BC) et passant par A coupe (BC) en A' et la droite perpendiculaire à (AC) passant par B coupe (AC) en B'.

a) Détermine une équation de chacune des droites (AA') et (BB')

b) Montre que (AA') et (BB') sont sécantes en un point H et calcule les coordonnées de ce point H.

c) Justifie sans calcul que (AB) $\perp$ (HC) puis vérifie-le par le calcul.

8. Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(2 ; 5) ; B(- 4 ; 3). Trouve une équation de la droite (A'B'), image de la droite (AB) par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{2}{-7}$.

9. Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(- 2 ; 4) ; B(4 ; 1) et C(1 ; - 5).

a) Fais la figure que tu complèteras au fur et à mesure.

b) Vérifie que les points A et B appartiennent à la droite (D_1) d'équation

10. On considère un triangle ABC, isocèle en A. On désigne par D le symétrique de A par rapport à (BC). Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

11. ABC est un triangle.

On désigne par : M le milieu de [BC] ;H le pied de la hauteur issue de A ;E le symétrique de A par rapport à M ;D le symétrique de A par rapport à (BC) ;

Montre que :

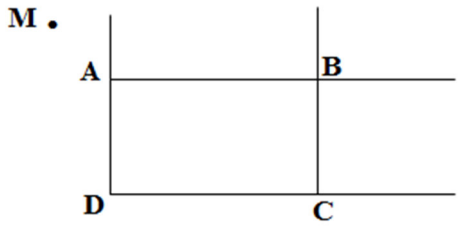
a) les droites (BC) et (DE) sont parallèles ;

b) la médiatrice (Δ) de [DE] est aussi la médiatrice de [BC] ;

c) les droites (Δ), (BE) et (CD) sont concourantes.

12. EFGH est un parallélogramme de centre O. Le cercle de diamètre [EG] coupe (EF) en M et (HG) en N. Quelle est la nature du quadrilatère EMGN ? (considère la symétrie de centre O).

13. Soit un rectangle ABCD et un point M du plan.



Soit M_1 le symétrique de M par rapport à (AD) ;
M_2 le symétrique de M_1 par rapport à (BC) ;
M_3 le symétrique de M_2 par rapport à (AB) ;
M_4 le symétrique de M_3 par rapport à (DC).
Démontre que M_4 est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$.

14. Construis un triangle ABC tel que :
AB = 3,5cm ; AC = 4,5cm ; BC = 2cm.
Soient les milieux I et J des côtés [AB] et [AC]. La hauteur (AH) issue de A coupe la droite (IJ) en O. Construis l'image A'B'C' du triangle ABC obtenue en appliquant la symétrie par rapport à (AH) puis la symétrie par rapport à (IJ).
Quelle est l'image du triangle ABC par la symétrie de centre O. Justifie.

15. On considère les droites (Δ) et (D) d'équations :

(Δ) : $y = 3x - 4$; (D) : $y = -\frac{1}{3}x + 6$.

On note $\mathcal{S}_{(\Delta)}$ et $\mathcal{S}_{(D)}$ les symétries axiales par rapport à (Δ) et (D).

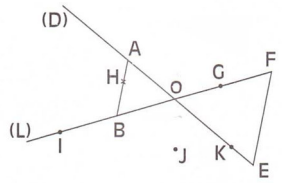
a) Quelles sont les coordonnées du point M'obtenu en appliquant $\mathcal{S}_{(\Delta)}$ puis $\mathcal{S}_{(D)}$ au point M (4 ; 2) ?
b) Quelles sont les coordonnées du point M'' obtenu en appliquant $\mathcal{S}_{(D)}$ puis $\mathcal{S}_{(\Delta)}$ au point M ?

16. Trace un triangle ABC, puis marque les milieux respectifs I et J des côtés [AB] et [AC].

a) Construire directement l'image du triangle AIJ par l'action successive de la symétrie d'axe (IJ), suivie de la symétrie d'axe (BC).

b) Même consigne en commençant par la symétrie d'axe (BC) suivie de la symétrie d'axe (IJ).

17. Les droites (D) et (D') se coupent en un point O. Les points A et E de (D) et les points B et F de (D') sont tels que les triangles AOB et EOF sont isocèles en O.

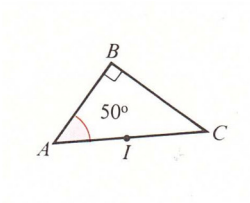


Construis les images des différents points de la figure par :

- La rotation r de centre O qui transforme A en B.
- La rotation r' de centre O qui transforme F en E.

18. OAA' est un triangle isocèle en O, ABC est un triangle rectangle en A et r la rotation de centre O qui transforme A en A'. On désigne par B' et C' les images respectives des points B et C par r. Démontre que A'B'C' est un tringle rectangle en A.

19. Sachant que I est le milieu de [AC], précise quel est le transformé de C par la rotation de centre I et d'angle 100°.



20 ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (C) de centre O. On désigne par r la rotation de centre O qui transforme A en B.

a) Quelles sont les images par r de chacun des points O, B et C ?
b) Quelles sont les images respectives de chacun des triangles ABC et OBC par r ?

21. ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (C) de centre O. La droite (D) est la médiatrice de [AB]. (D) coupe (C) au point E.

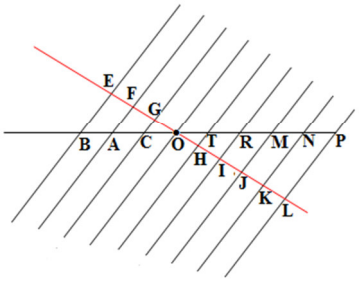
a) Construis l'image EFG du triangle ABC par la rotation de centre O qui transforme A en E. Quelle est la nature du triangle EFG ?
b) Quelle est la nature du polygone AEBFCG ?

22. Trace un cercle (C) de centre O et de rayon 4cm.

a) Construis le transformé M' d'un point M par la rotation r de centre O et d'angle 50°.
b) Soit I le milieu de [MN]. Montre que la longueur OI est constante pour tout point M choisi sur le cercle (C).

c) Sur quelle courbe varie le point I quand le point M varie sur le cercle (C) ?

23. On considère la figure suivante



a) Trouve le rapport des homothéties de centre O.

$\alpha)$ $h_{(O;..)}$: A $\longmapsto$ M ; $\beta)$ $h_{(O;...)}$: T $\longmapsto$ N ;

$\gamma)$ $h_{(O;...)}$: G $\longmapsto$ H ; δ $h_{(O;...)}$: B $\longmapsto$ R ; μ $h_{(O;....)}$: H $\longmapsto$ K.

b) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{NJ}$ et $\overrightarrow{PL}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{TH}$.

c) Détermine l'image de R par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Détermine l'image de F par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{5}{2}$

d) Complète et écris la relation vectorielle correspondant à chaque égalité :

$h_{\left(O;\frac{3}{4}\right)}(K) = \cdots$; $h_{\left(O;-\frac{2}{3}\right)}(M) = \cdots$

24. Traduis chaque égalité vectorielle par une homothétie :

a) $\overrightarrow{IA} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{IC}$; b) $\overrightarrow{PR} = 3\overrightarrow{PM}$;

c) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$; d) $\overrightarrow{\Omega M} = -2\overrightarrow{\Omega U}$.

25. ABC est un triangle. Les points A' et B' sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].Les droites (AA') et (BB') se coupent au point G.

a) Trouve l'image de A' par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$ et l'image de G par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

b) En utilisant seulement la règle, construis le point C' image de C par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

26. ABC est un triangle équilatéral de côté 3cm. On désigne par H, l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{4}{3}$ et par AB'C', l'image de ABC par H.

a) Démontre que le triangle AB'C' est équilatéral.

b) Calcule l'aire du triangle AB'C'.

EVALUATION

EXERCICE 1

Exercice 2

On donne la fonction f définie de /R dans /R par :

$f(x) = x + |2x - 4|$

1) Exprime f(x) pour x élément de] ← ; 2] puis pour x élément de [2 ; →[.
2) Représente graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J).
3) Utilise le graphique précédent pour résoudre dans /R l'équation f(x) = 5 ; f(x) = 1.

EXERCICE 2

On donne l'application f définie de /R dans /R par : $f(x) = (3x - 6)^2 - 4(x - 1)^2$.

1) Factorise f(x).
2) Résous l'équation f(x) = 0.
3) Développe, réduis puis ordonne f(x).
4) Soit la fonction rationnelle $h(x) = \frac{(x^2+x)+(x+1)(4x-8)}{(5x-3)(x-4)}$
   a) Donne l'ensemble de définition D_h de la fonction h puis simplifie l'écriture de h(x).
   b) Résous dans /R les équations : h(x) = 0 ; $h(x) = -\frac{13}{12}$; h(x) = 1.
5) Calcule $h(\sqrt{5})$puis encadre $h(\sqrt{5})$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 sachant que $3{,}8729 < \sqrt{5} < 3{,}8730$.

EXERCICE 2

On munit le plan d'un repère orthonormé (O ; I ; J) et on donne les points A(7 ; 0), B(- 5 ; 5) et C(0 ; 17).

Consigne :

1) Place les points A ; B et C dans le repère précédent et calcule les distances AB ; AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Calcule les coordonnées du point K milieu du segment [AC].
3) (C) est le cercle de diamètre [AC]. Démontre que ce cercle passe par les points B et O.
4) D est le symétrique de B par rapport à K. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
5) (D) est la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point B. Cette droite coupe le cercle (C) en un point E. Montre que les droites (DE) et (BE) sont perpendiculaires.

PARTIE DESTINEE A L'ENSEIGNANT
Troisième trimestre

Programmation horaire du 3e trimestre

3ème trimestre	Compétences	Leçons	Titre des leçons	Durée d'exécution			Durée des leçons	Nombre d'heures du Trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
1er Avril au 10 Juin 9 semaines	CB1	9	Dénombrement	8H	4H	2H 2H	12H	45H
		10	Statistique	8H	4H		12H	
	CB2	11	Pyramides	6H	2H		8H	
		12	Cônes.	6H			8H	

FICHE DE PROGRESSION DU TRIMESTRE III

Trimestre	Période	Contenus	
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité
3	1er Avril au 10 Mai	**Leçon 9 :** Dénombrement **Leçon 10 :** Statistique	**Leçon 11 :** Pyramides
	11 Mai au 10 Juin	**Leçon 10 :** Statistique (Suite et fin)	**Leçon 12 :** Cônes

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Troisième

Troisième trimestre

Compétence de Base 1

Troisième–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre le dénombrement et les statistiques.			
	Ressources		
	Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
	- Dénombrement.	- Dénombrer un ensemble fini en utilisant des méthodes élémentaires.	- Dénombrement d'un ensemble fini en utilisant des méthodes élémentaires.
	- Statistique.	- Regrouper une population en classes d'égales amplitudes ; - à partir d'une série statistique : ➢ calculer l'effectif et la fréquence d'une classe donnée, ➢ présenter les résultats dans un tableau, ➢ tracer les diagrammes circulaires, à bandes ou cumulatifs ; - lire et exploiter des données statistiques : ➢ présentées sous forme de tableaux, ➢ présentées sous forme de diagrammes d'effectifs.	- Regroupement d'une population en classes d'égales amplitudes ; - calcul de l'effectif et de la fréquence d'une classe donnée à partir d'une série statistique ; - présentation des résultats d'étude d'une série statistique dans un tableau ; - représentation d'une série statistique en diagrammes circulaires, à bandes ou cumulatifs ; - lecture et exploitation des données statistiques présentées sous forme de tableaux ; - lecture et exploitation des données statistiques présentées sous forme de diagrammes d'effectifs.

Compétence de Base 2

Troisième–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les pyramides et les cônes.			
	Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
	Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
	- Pyramides.	- Reconnaître une pyramide et la décrire en utilisant le vocabulaire adéquat ; - représenter (en perspective cavalière) une pyramide régulière à base carrée ; - calculer le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide dans des cas simples ; - utiliser la propriété « la section d'une pyramide par un plan parallèle à celui de la base est une réduction de la base » pour calculer les aires ou les volumes concernant les troncs des pyramides.	- Reconnaissance d'une pyramide et sa description en utilisant le vocabulaire adéquat ; - représentation (en perspective cavalière) d'une pyramide régulière à base carrée ; - calcul du volume, de l'aire latérale et de l'aire totale d'une pyramide dans des cas simples ; - utilisation de la propriété « la section d'une pyramide par un plan parallèle à celui de la base est une réduction de la base » pour le calcul d'aires ou de volumes concernant les troncs des pyramides.
	- Cônes.	- Reconnaître un cône et le décrire en utilisant le vocabulaire adéquat ; - calculer le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'un cône ; - utiliser la propriété « la section d'un cône par un plan parallèle à celui de la base est une réduction de la base » pour calculer les aires ou les volumes concernant les troncs des cônes.	- Reconnaissance d'un cône et sa description en utilisant le vocabulaire adéquat ; - calcul du volume, de l'aire latérale et de l'aire totale d'un cône ; - utilisation de la propriété « la section d'une pyramide par un plan parallèle à celui de la base est une réduction de la base » pour le calcul d'aires ou de volumes concernant les troncs des cône.

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE
FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du troisième trimestre

Dénombrement

SEQUENCE 129

Ensembles

Objectif : Reconnaitre un ensemble et ses sous-parties

Définitions

A est un ensemble donné.

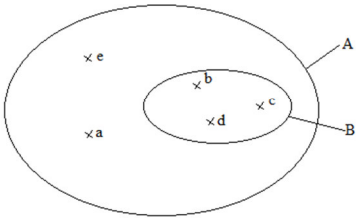
- Un sous-ensemble de A est une partie de A.

Exemple

On donne A= {a ; b; c ;d ;e} et B ={ b; c ;d }.

B ⊂ A ou A ⊃ B **et on lit : « B inclus dans A ou A contient B ».**

Dans un diagramme de Venn on a :



- Si B est une partie de A, on écrit : B ⊂ A ou A ⊃ B.
- L'ensemble vide est la partie de A qui ne contient aucun élément. On le note : { }ou ∅
- Un singleton est une partie de A qui ne contient qu'un seul élément.
- Une paire est une partie de A qui ne contient que deux éléments.
- L'ensemble des parties de A noté P (A) est constitué de toutes les parties (vide ou non) de A.

SEQUENCE 130

Propriétés

Objectif : Utiliser les propriétés d'un ensemble

E est un ensemble, A et B deux parties quelconques de E.

- L'union de A ou B notée A∪B est l'ensemble constitué des éléments appartenant à A ou à B.

<u>Exemple</u>

A ={1 ; 2 ; 3 ; 4} et B={1 ; 2 ; a ;b ;c}.

$A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; a ; b ; c\}$.

- L'intersection de A et B notée $A \cap B$ est l'ensemble constitué des éléments appartenant à la fois à A et à B.

  <u>Exemple :</u> $A=\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ et $B=\{1 ; 2 ; a ; b ; c\}$.

  $A \cap B=\{1 ; 2\}$
- Les parties A et B de l'ensemble E sont complémentaires si $A \cup B = E$. On note : $C_E^A = B$ et on lit : « complémentaire de A dans E égal à B ».

  <u>Exemple :</u> $E=\{a ; b; c ; d ; e\}$.

  $A= \{a ; b; c\}$.

  $C_E^A = \{d;e\}$.
- Les parties A et B de l'ensemble E font une partition de E si :

– $A \cap B = \emptyset$

– $A \cup B = E$.

Exemple

$E = \{a ; b; c ; d ; e\}$.

$A = \{a ; b; c\}$.

$B = \{d; e\}$.

A et B constituent une partition de E car :

$A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$.

<u>Exercice :</u>

On donne les ensembles suivants :

$E =\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$; $A = \{1 ; 3 ; 5\}$; $B = \{1 ; 2 ; 4\}$ et $C = \{1 ; 3\}$.

1) Ecris les ensembles $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$; $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$; C_E^A ; C_E^B ; C_E^C.
2) Les ensembles A et B font-ils une partition de E ?

SEQUENCE 131

Dénombrement

Objectif : Dénombrer un ensemble fini en utilisant des méthodes élémentaires

Définition

Dénombrer un ensemble E, c'est déterminer le nombre total des éléments de E. Si en comptant les éléments de E, on trouve le nombre entier naturel n, on dit que le cardinal de E est égal à n et on note : cardE = n.

Le cardinal de l'ensemble vide est égal à zéro. On note : card∅ = 0.

Le cardinal d'un singleton est égal à 1.

Le cardinal d'une paire est égal à 2.

Remarque

Lorsqu'on ne peut pas déterminer le nombre des éléments d'un ensemble A, on dit que cet ensemble A est infini.

Exemple

Les ensembles $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ sont infinis.

SEQUENCE 132

Quelques exemples de dénombrements

Objectif : Résoudre en utilisant des diagrammes

Exemples

Utilisation des diagrammes

Cent personnes ont répondu à un questionnaire sur leur alimentation du samedi dernier.

Les résultats ont donné :

- 45 d'entre elles ont mangé du poisson ;
- 49 ont mangé de la viande ;
- 27 ont mangé du poisson et de la viande.

1) Combien de personnes n'ont mangé que de la viande ?
2) Combien de personnes n'ont mangé ni de viande ni poisson ?

Solution

Désignons par E l'ensemble des 100 personnes interrogées. CardE = 100

Soit P, la partie de E constituée des personnes ayant mangé du poisson.

Card P = 45.

Soit V, la partie de E constituée des personnes ayant mangé de la viande.

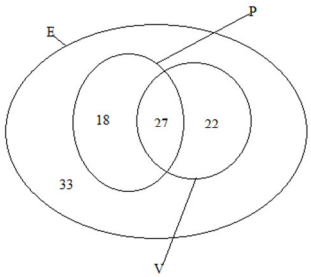
Card V = 49.

Avoir mangé du poisson et de la viande, c'est appartenir à P∩V.

Et nous savons que 27 personnes ont mangé du poisson et de la viande.

Card P∩V = 27

A l'aide de diagrammes, illustrons la situation :



1) Les personnes n'ayant mangé que de la viande sont au nombre de :

49 – 27 = 22 .

De même, les personnes n'ayant mangé que du poisson sont au nombre de :

45 – 27 = 18.

2) Ainsi, les personnes ayant mangé du poisson seulement, de la viande seulement ou du poisson et de la viande sont au nombre de :

   18 + 22 + 27 = 67.

   Celles n'ayant mangé ni du poisson ni de la viande sont au nombre de :

   100 – 67 = 33.

SEQUENCE 133

Quelques exemples de dénombrements

Objectif : Résoudre en utilisant de tableau

Exemple

Utilisation de tableau

Pour débuter une partie de ludo, tu lances deux fois de suite un dé à six faces. Après chacun des deux lancers, tu notes le numéro de la face supérieure du dé, obtenant ainsi un couple de nombres entiers. Combien de couples différents de nombres entiers est-il possible d'obtenir par ce procédé ?

Solution

Nous savons qu'un dé de ludo possède six faces notées {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. Après deux lancers du dé, un couple de nombres entiers appartenant à l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}est obtenu. Par exemple : au premier lancer, nous obtenons la face notée 6 et au second, la face notée 2. Le couple obtenu est: (6 ; 2).

Le tableau suivant nous donne les différents couples possibles obtenus :

1er lancer / 2ème lancer	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(2 ; 1)	(3 ; 1)	(4 ; 1)	(5 ; 1)	(6 ;1)
2	(1 ; 2)	(2 ; 2)	(3 ; 1)	(4 ; 2)	(5 ; 2)	(6 ; 2)
3	(1 ; 3)	(2 ; 3)	(3 ; 3)	(4 ; 3)	(5 ; 3)	(6 ; 3)
4	(1 ; 4)	(2 ; 4)	(3 ; 4)	(4 ; 4)	(5 ; 4)	(6 ; 4)
5	(1 ; 5)	(2 ; 5)	(3 ; 5)	(4 ; 5)	(5 ; 5)	(6 ; 5)
6	(1 ; 6)	(2 ; 6)	(3 ; 6)	(4 ; 6)	(5 ; 6)	(6 ; 6)

Au total, il y-a $6\times6 = 36$ différents couples possibles

SEQUENCE 134

Quelques exemples de dénombrements

Objectif : Résoudre en utilisant d'arbre de choix

Exemple

Utilisation d'arbre de choix

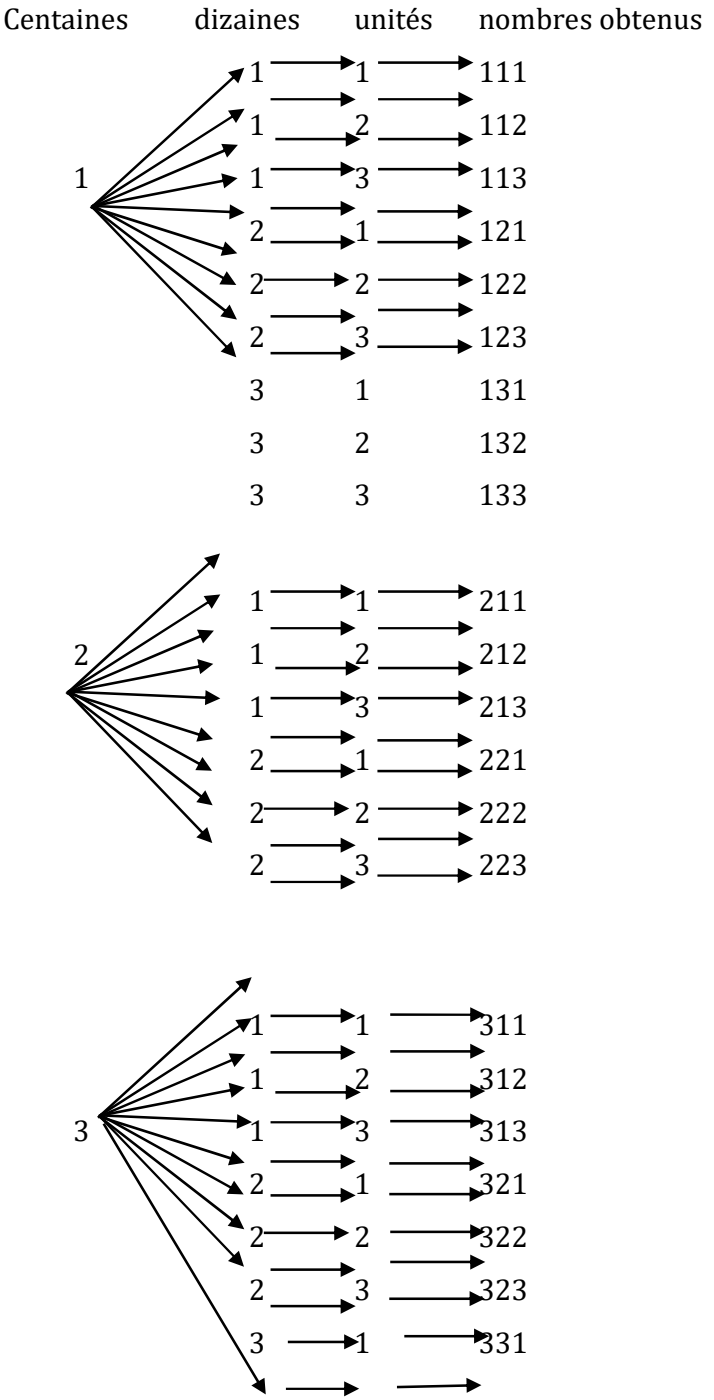
Combien de nombres de trois chiffres peux-tu former avec les chiffres 1 ; 2 et 3 ?

Solution

Un nombre de trois chiffres formé par les chiffres 1 ; 2 et 3 est un nombre ayant à l'unité l'un des chiffres 1 ; 2 ou 3, à la dizaine l'un des chiffres 1 ; 2 ou 3 et à la centaine, l'un des chiffres 1 ; 2 ou 3.

Par exemple le nombre 312.

L'arbre de choix suivant donne tous les nombres à trois chiffres formés avec les chiffres 1 ; 2 et 3.



Il y a au total $3^3 = 27$ nombres de trois chiffres que je peux former avec les chiffres 1 ; 2 et 3.

STATISTIQUE
SEQUENCE 135

Organisation des données statistiques

Variables quantitatives discrètes

Objectif : Regrouper une population en classes d'égales amplitudes

Définition

Variables quantitatives discrètes : variables ayant des modalités prenant des valeurs numériques.

Exemple :

Une enquête effectuée auprès des ménages du quartier Atrone à N'Djaména portant sur le nombre d'enfants par famille a donné les résultats suivants :

0 ; 4 ; 1 ; 5 ; 3 ; 8 ; 2 ; 0 ; 1 ; 4 ; 3 ; 5 ; 2 ; 6 ; 1 ; 6 ; 4 ; 1 ; 2 ; 7 ; 9 ; 3 ; 1 ; 4 ; 6 ; 3 ; 1 ; 8 ; 9 ; 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 4 ; 2 ; 0 ; 3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 2 ; 4 ; 3 ; 1 ; 0 ; 1 ; 5 ; 4 ; 6 ; 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Nous obtenons le tableau suivant:

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de ménages	4	11	8	8	9	5	4	2	2	2

Le tableau que nous venons d'obtenir s'appelle **un tableau des effectifs**. Ce sont les réponses fournies par les ménages du quartier Atrone qui ont permis de réaliser le tableau des effectifs. Ces réponses constituent **une série statistique**.

Dans le tableau, les nombres **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9** qui représentent le nombre d'enfants par ménage sont **des modalités** et le nombre de ménages pour chaque modalité constitue **l'effectif de cette modalité**.

Les modalités 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont appelés des **variables quantitatives discrètes.**

Variables quantitatives continues

Définition

Variables quantitatives continues : variables ayant des modalités constituées en classes d'amplitude donnée.

Exemple : On a relevé les précipitations (pluie) du mois de juin, dans un certain nombre de ville. Les résultats, exprimés en cm, sont organisés dans le tableau suivant :

Précipitations en (cm)	[0; 10[	[10; 20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[
Nombre de villes	13	24	17	11	5

La classe modale est : [10; 20[; l'amplitude de ses classes est 10

Variables qualitatives

Définition

Variables qualitatives : variables ni discrètes, ni continues

Exemple

Une entreprise a mené une enquête auprès de la population, portant sur la couleur préférée des répondants, afin d'orienter la fabrication de ses produits. Cette enquête dans un quartier de Sarh a donné les résultats suivants :

rouge ; blanc ; noir ; bleu ; bleu ; jaune ; noir ; bleu ; noir ; blanc ; jaune ; blanc ; bleu ; jaune ; marron ; ; blanc ; bleu ; marron ; noir ; bleu ; blanc ; jaune ; noir ; bleu ; bleu ;marron ; noir ;noir ; bleu .

Couleurs	Blanc	Bleu	Jaune	marron	Noir
Nombre	5	9	4	3	7

Les modalités de cette série statistique sont appelées **des variables qualitatives.**

Une variable dont on ne peut pas mesurer les modalités est appelée variable qualitative.

SEQUENCE 136

Effectifs cumulés – Fréquences cumulées (variables quantitatives)

Objectif : Calculer l'effectif et la fréquence d'une modalité donnée

Fréquence d'une modalité

La fréquence d'une modalité est le rapport de l'effectif de cette modalité par l'effectif total

Exemple : calculons la fréquence de chaque modalité dans le tableau suivant

Modalités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	4	11	8	8	9	5	4	2	2	2

Effectif total= 4+11+8+8+9+5+4+2+2+2 = 55

- pour la modalité 0 on a :$\frac{4}{55}$X100 =0,072X100 =7%
- pour la modalité 4 on a : :$\frac{9}{55}$X100=0,163X100 16 % ……

Effectifs cumulés

Définition :On appelle effectif cumulé de la modalité n, la somme des effectifs de chaque modalité inférieur ou égale à n.

Reprenons le tableau de l'exemple ci-dessus

Modalités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	4	11	8	8	9	5	4	2	2	2
Effectifs cumulés	4	15	23	31	40	45	49	51	53	55

Fréquence cumulées

Définition : On appelle fréquence cumulées de la modalité n, le quotient de l'effectif cumulé de la modalité n par l'effectif total.

Exemple : calculons la fréquence cumulée du tableau ci-dessus pour les modalités suivantes :1 et 6.On a donc :

- pour la modalité 1 : l'effectif cumulé est 15 et l'effectif cumulé total est 366

  Fréquence cumulée = $\frac{15}{366}$ =0,04= 4%
- pour la modalité 6 : l'effectif cumulé est 49

Fréquence cumulé = $\frac{49}{366}$ =0,13 = 13%

SEQUENCE 137

Traitement des données

Objectif : Traiter les données et présenter les résultats dans un tableau

Le mode

Définition

On appelle mode d'une série statistique toute modalité dont l'effectif est maximal.

Exemple

Modalités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	4	11	8	8	9	5	4	2	2	2

4 est le mode de cette série statistique, car c'est la modalité qui a l'effectif le plus grand

Remarque

Une série peut avoir deux modes ou plus.

La moyenne

Définition

- La moyenne d'une série quantitative est le quotient de la somme des produits (modalité × effectif correspondant) par l'effectif total.
- Si le caractère de la série statistique se présente sous forme de classes, on admet que tous les effectifs d'une même classe se regroupent au « centre » de la classe. Dans ce cas, la moyenne de la série est le quotient de la somme des produits « centre de classe ×effectif correspondant » par l'effectif total.

  Exemple :

Modalités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 Totaux	
Effectifs	4	11	8	8	9	5	4	2	2	2	55
Produit des modalités par les effectifs	0	11	16	24	36	25	24	14	16	18	184

La moyenne est $\frac{184}{55} = 3{,}345$ l'arrondi d'ordre 2 de la moyenne est : 3,35

La Médiane

Définition : La médiane est la valeur d'une série statistique ordonnée qui la sépare en deux moitiés de même effectif

Exemple - Monsieur wilson a relévé les notes de sept élèves de la classe de sixième et a obtenu la série suivante :09-13-15-18-11-08-12 .

Déterminons la note médiane de cette série :

En ordonnant ces notes on obtient :08 ;09 ;11 ;**12** ;13 ;15 ;*18*

Le nombre de notes ici impliquées(7) étant un nombre impair, la médiane est la 4e note ,soit

la 4e valeur du caractère ;12 est une médiane de cette série

- Dans le cas de six notes ainsi ordonnées : 04-07-13-14-16-19 .Tout nombre strictement compris entre 13et 14 est une médiane de cette série : soit m $=\frac{13+14}{2} = 13{,}5$

On considère le tableau suivant traduisant la répartition des familles d'une petite ville selon le nombre d'enfants mineurs.

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de familles	41	37	35	44	22	30	25	20

a) Combien de familles ont un nombre d'enfants inférieur ou égal à 4 ?

b) Détermine le mode de cette série ?

c)Calcule la moyenne de cette série.

SEQUENCE 138

Représentation par des diagrammes

Objectif : Tracer les diagrammes circulaires, à bandes ou cumulatif

Diagramme circulaire

Règle

Pour dessiner un diagramme circulaire correspondant à une distribution statistique, on peut représenter les fréquences (ou les effectifs) de chaque modalité par des secteurs circulaires dont la mesure est proportionnelle à la fréquence (ou les effectifs) de la modalité qu'ils représentent.

Diagramme en bâton

Règle

Pour représenter une série statistique organisée en un tableau par un diagramme en bâton, on représente chaque modalité par un trait appelé bâton de longueur proportionnelle à son effectif. Les valeurs prises par le caractère sont portées en abscisse et les effectifs en ordonnée.

Diagramme à bandes ou histogrammes

Règle

Pour dessiner un diagramme à bandes correspondant au tableau des effectifs (ou fréquences) d'une série statistique, on trace, dans un repère orthogonal, des bandes juxtaposées de même largeur et de hauteurs proportionnelles aux effectifs correspondants.

Pour cela, les valeurs prises par les caractères sont portées en abscisse et les effectifs en ordonnée.

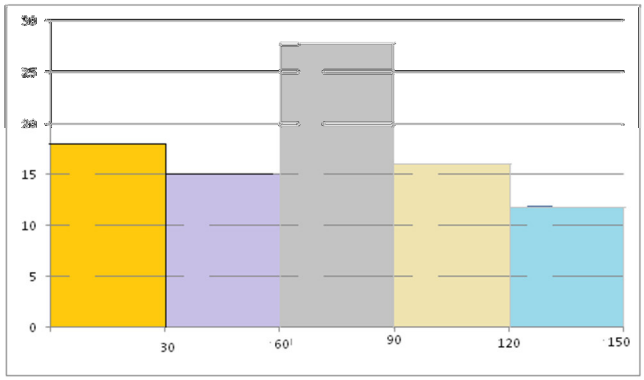
Exemple

Soit le tableau établi à partir des résultats du sondage effectué par la Télé-Tchad :

Classes de temps (mn)	[0 ; 30[	[30 ; 60[	[60 ; 90[	[90 ; 120[	[120 ; 150[
Effectifs	18	15	28	16	12

Pour réaliser le diagramme en bandes, les classes seront portées en abscisses et les effectifs seront portés en ordonnées.

Effectifs



Temps

Le mode de cette série se situe au niveau de la classe [60 ; 90[.

SEQUENCE 139

Diagramme cumulatif

Objectif : Tracer le diagramme cumulatif

Exemple

Reprenons le tableau établi en activité 1 et ajoutons-y les effectifs cumulés.

Modalités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	4	11	8	8	9	5	4	2	2	2
Effectifs cumulés	4	15	23	31	40	45	49	51	53	55

Ce tableau des effectifs cumulés nous permet de définir une application $f$que nous présentons ci-dessous.

Pour $x \in]\leftarrow; 0[; f(x) = 0$; Pour $x \in [3\,;4[, f(x) = 31$ Pour $x \in [7\,;8[, f(x) = 51$

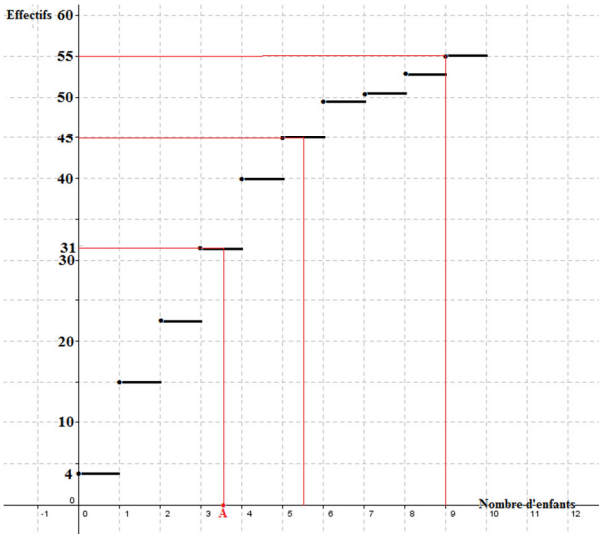
Pour $x \in [0\,;1[, f(x) = 4$ Pour $x \in [\,4;5[, f(x) = 40$ Pour $x \in [8\,;9[, f(x) = 53$

Pour $x \in [1\,;2[, f(x) = 15$ Pour $x \in [5\,;6[, f(x) = 45$ Pour $x \in [9\,; \rightarrow [, f(x) = 55$.

Pour $x \in [2\,;3[, f(x) = 23$ Pour $x \in [6\,;7[, f(x) = 49$

Faisons la représentation graphique de cette application f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

On a :



Pour ce graphique, on peut, par lecture directe, déterminer l'effectif total des familles selon le nombre d'enfants obtenus.

Ainsi, le point A sur l'abscisse renvoie au nombre 31 sur l'axe des ordonnées. On dit que 31 familles ont un nombre d'enfants strictement inférieur à 4.

De même 45 familles ont un nombre d'enfants strictement inférieur à 6 alors que 55 familles ont un nombre d'enfants inférieur ou égal à 9.

La représentation effectuée est appelée un diagramme cumulatif des effectifs.

Pyramides et cones

SEQUENCE 140

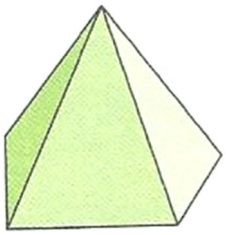
Définition et description d'une pyramide

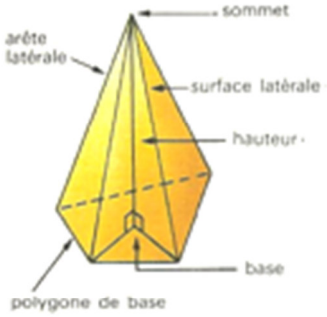
Objectif : Reconnaître une pyramide et la décrire en utilisant le vocabulaire adéquat ;

Définition

Une pyramide est un solide de l'espace ayant :

- un sommet ;
- une hauteur
- une base polygonale ;
- des faces latérales triangulaires ;
- des arêtes latérales et des arêtes de base

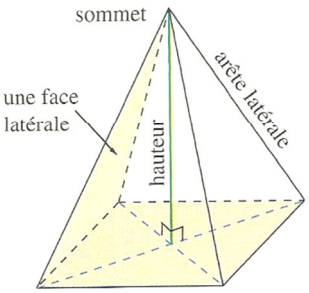




▼Remarque

Une pyramide est dite régulière lorsque :

- sa base est un polygone régulier ;
- ses faces latérales sont des triangles isocèles.



Exercices

Avec du papier carton,

1) réalise un patron d'une pyramide régulière à base triangulaire. Comment appelles – tu une telle pyramide ? Que remarques- tu ?
2) réalise un patron d'une pyramide à base carrée.

SEQUENCE 141

Hauteur d'une pyramide

Objectif : représenter (en perspective cavalière) une pyramide régulière à base carrée ;

Définition

On appelle hauteur d'une pyramide la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base.

Propriété

Lorsqu'une pyramide est régulière, sa hauteur passe par le centre du cercle circonscrit à sa base.

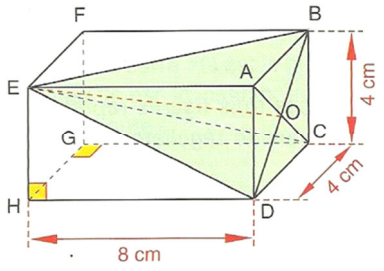
Remarque

La hauteur d'une pyramide de sommet S perce le plan de la base au point H.

Le mot hauteur peut désigner, selon les contextes, la droite (SH) ; le segment [SH] ou la distance SH.

Exemple

Dans le dessin en perspective cavalière du pavé droit suivant, apparait une pyramide EABCD.



La hauteur de la pyramide EABCD est : (EA)

Exercice

SABC est une pyramide régulière de sommet S et ayant pour base le triangle équilatéral ABC. G est le centre de gravité du triangle ABC. On donne AB = 6cm et SA = 7cm.

a) Justifie que [SG] est une hauteur de la pyramide.
b) Dessine en dimensions réelles la base ABC et la figure du plan AGS.
c) Calcule AG et SG.

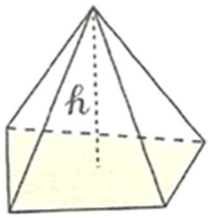
SEQUENCE 142

Volume d'une pyramide

Objectif : calculer le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide dans des cas simples ;

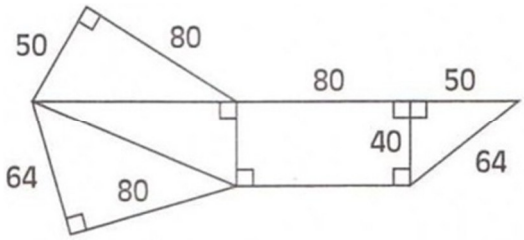
Formule du volume d'une pyramide

Le volume V d'une pyramide d'aire de base β et de hauteur h est donnée par la formule $V = \frac{1}{3}\beta \times h$.



Exercice

Calcule l'aire latérale, l'aire totale et le volume de la pyramide à base rectangulaire dont voici l'esquisse d'un patron.



Cette pyramide à base rectangulaire a pour hauteur 30. On sait que $V = \frac{1}{3}\beta \times h$ *équivaut à* $V = \frac{1}{3} x\ (80X40) \times 30$

$V = 32000$

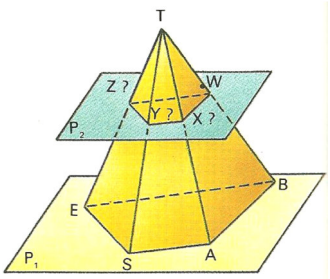
SEQUENCE 143

Section d'une pyramide régulière par un plan

Objectif : utiliser la propriété « la section d'une pyramide par un plan parallèle à celui de la base est une réduction de la base » pour calculer les aires ou les volumes concernant les troncs des pyramides

Propriété1

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que cette base ; les côtés de ces polygones sont deux à deux parallèles.



Propriété 2 :(propriété de réduction)

Lorsqu'on coupe une pyramide par un plan parallèle au plan de la base, on obtient une réduction de cette pyramide.

Si l'échelle de réduction est égale au nombre k ($0 < k < 1$) alors :

$$\frac{\text{aire de la pyramide réduite}}{\text{aire homologue de la pyramide}} = k^2;$$

$$\frac{\text{volume de la pyramide réduite}}{\text{volume de la pyramide}} = k^3.$$

CONES

SEQUENCE 144

CONES

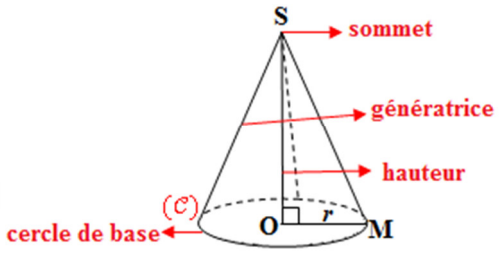
Définition et vocabulaire

Objectif : Reconnaître un cône et le décrire en utilisant le vocabulaire adéquat

($\mathcal{C}$) est un cercle de centre O et de rayon r.

S est un point de la perpendiculaire en O au plan qui contient le cercle ($\mathcal{C}$).

On appelle cône de révolution de sommet S et de base ($\mathcal{C}$) le solide obtenu en joignant S à tous les points du cercle.



Le segment [SM] est une génératrice.

Dans un cône de révolution, toutes les génératrices ont la même longueur.

SEQUENCE 6

Calcul du rayon de la surface latérale et l'ouverture de l'angle du secteur

Objectif : calculer le rayon et l'ouverture de l'angle du secteur

Calcul du rayon de la surface latérale

La figure SOM est un triangle rectangle en O donc, d'après Pythagore, on a :

$SM^2 = SO^2 + OM^2$. Or SO = 4cm et OM = 3cm donc $SM^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ d'où SM = 5.

Le rayon de la surface latérale qui est aussi la longueur de la génératrice du cône est 5cm.

Calcul de l'ouverture de l'angle du secteur

La longueur de l'arc du secteur circulaire est égale au périmètre du disque de base.

Or, le périmètre du disque de base est :$d\pi$ cm = 6π cm.

D'autre part, le périmètre du grand disque dont le rayon est 5cm est égal à 10π cm.

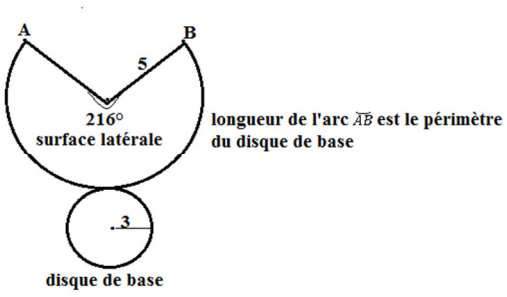
D'après le tableau de proportionnalité suivant, on a :

	Cercle complet	Arc correspondant au bord du patron
Longueur(en cm)	10π	6π
Ouverture de l'angle(en degré)	360°	x

On détermine l'ouverture en posant :

$x = \frac{360° \times 6\pi}{10\pi} = 6 \times 36 = 216°$.

L'ouverture du secteur circulaire est donc de 216°.

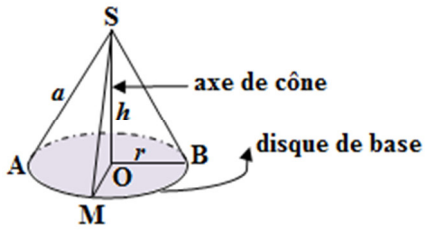


SEQUENCE 145

Calcul du volume et de l'aire du cône

Objectif : Calculer le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'un cône .

La base d'un cône de révolution est un disque ; son axe est la hauteur du cône.



Formule de volume d'un cône

Formule

Soit un cône de révolution.

Si le disque de base a pour aire $\mathcal{B}$ et si le cône a pour hauteur h, on admet :

$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,\mathcal{B} \times \mathrm{h}.}$

On peut l'exprimer en fonction du rayon r du disque de base et la hauteur h du cône.

Sachant que $\mathcal{B} = \pi \mathrm{r}^2$, alors $\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{r}^2\ \mathrm{h}.}$

Formule de l'aire latérale du cône

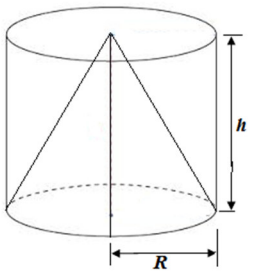
Formule de l'aire latérale

Soit un cône de sommet S.

r est le rayon du disque de base de ce cône et a la distance du sommet S à un point du cercle de base (longueur de la génératrice).

L'aire latérale du cône est : $\boxed{\mathcal{A} = \pi \times \mathrm{a} \times \mathrm{r}}$

Exercice



On considère un cône inscrit dans un cylindre de rayon $\mathcal{R}$ et de hauteur h, comme le montre la figure ci-contre.

a) calcule le volume du cône et celui du cylindre.

b) Si l'on prend $\mathcal{R} = 1{,}5\text{m}$ et $h = 2{,}5\text{m}$, calcule les deux volumes du cône et du cylindre.

c) Calcule l'aire latérale du cône et l'aire latérale du cylindre.

SEQUENCE 146

Section d'un cône de révolution par un plan

Objectif : Utiliser la propriété « la section d'un cône par un plan parallèle à celui de la base est une réduction de la base » pour calculer les aires ou les volumes concernant les troncs des cônes.

Propriété 1

La section d'un cône de révolution et d'un plan parallèle à sa base est un cercle.

La section d'un cône par un plan parallèle au plan de la base met en évidence :

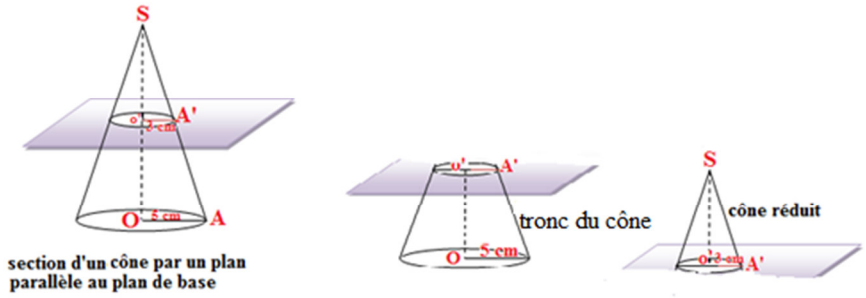
- un tronc de cône ;
- un deuxième cône qui a pour sommet le même sommet que le cône initial et pour base le disque de centre O' et de rayon [O'A'].

Propriété 2

Lorsqu'on coupe un cône de révolution par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de ce cône.

Si l'échelle de la réduction est égale au nombre k, alors on a : $\frac{SO}{SO'} = k$ puis

$\frac{\text{aire du cône réduit}}{\text{aire homologue du cône}} = k^2$ et $\frac{\text{volume du cône réduit}}{\text{volume du cône}} = k^3$.



EXERCICES D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 1 DU TROISIEME TRIMESTRE

1. Trouve le nombre des diviseurs de 75 625

2. Trouve le nombre d'intervalles fermés [a ; b] où a et b sont des nombres entiers naturels distincts appartenant à l'intervalle [2 ; 7].

3. Après avoir quitté un parking du centre-ville, un élève rencontre successivement plusieurs carrefours où trois possibilités s'offrent chaque fois à lui : aller tout droit, tourner à droite, tourner à gauche. Après avoir dépassé le troisième carrefour, il s'arrête. Combien de trajets différents aurait-il pu suivre?

4. 95 personnes ont répondu à un questionnaire concernant leur alimentation du dimanche dernier. Il apparait que :

- 42 d'entre elles ont mangé de la viande ;
- 51 ont mangé du poisson ;
- 25 ont mangé du poisson et de la viande.

Combien de personnes n'ont mangé que du poisson ?

Combien de personnes ont n'mangé ni viande ni poisson ?

5. Combien de nombres de deux chiffres peux-tu former avec les chiffres 1 ; 2 ; 3 et 4 ?

6. ABCDEFGH est un cube.

Découpe ce cube en des petits cubes de même volume.

a) Combien de petits cubes dont l'arête est la moitié de l'arête du cube ABCDEFGH pourrais-tu obtenir ?
b) Combien de petits cubes dont l'arête est le tiers de l'arête du cube ABCDEFGH pourrais-tu obtenir ?
c) Combien de petits cubes dont l'arête est le quart de l'arête du cube ABCDEFGH pourrais-tu obtenir ?

7. On a relevé les âges au 1er | 01 | 2014, des élèves d'une classe de Troisième :

14 ; 14 ; 13 ; 15 ; 15 ; 14 ; 14 ; 16 ; 15 ; 14 ; 15 ; 14 ; 14 ; 14 ; 13 ; 15 ; 14 ; 16 ; 15 ; 15 ; 15 ; 16 ; 15 ; 15 ; 14 ; 16 ; 13 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 16 ; 15 ; 13 ; 15 ; 14 ; 16 ; 15 ; 15 ; 14 ; 14 ; 13 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15.

a) Construis le tableau des effectifs et de fréquences.

b) Trace un diagramme circulaire des effectifs puis un diagramme en bâtons des effectifs.

c) Quel est l'âge moyen d'un élève de cette classe ? Quel est l'âge médian ?

8. Un vendeur de montres – bracelets les a classées selon leur prix : 25 coûtent 2 000F ; 38 coûtent 3 500F ; 25 coûtent 4 500F ; 25 coûtent 5 000F ; 50 coûtent 7 000F et 29 coûtent 9 000F.

a) Trace le tableau des effectifs, des fréquences et des fréquences cumulées.

b) Quel est le prix moyen d'une montre ? Quel est le mode ? Quel est le pourcentage de montres dont le prix est inférieur à 7 000F ? Quel est le pourcentage de montres dont le prix est supérieur ou égal à 4 500F ?

c) Trace le diagramme circulaire des effectifs de cette série.

9. Un chauffeur de taxi a noté dans la semaine le nombre et la distance de ses courses.

Distance en km	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10; 12[
Effectifs	17	28	47	23	5	3
Fréquences						

a) Complète le tableau ci – dessus.

b) Trace un diagramme à bandes et un diagramme cumulatif des effectifs.

c) Quelle est la classe modale de cette série ?

d) Calcule la moyenne de cette série et détermine la classe médiane de cette série.

10. Masra a obtenu aux contrôles de mathématiques les notes suivantes :

10 ; 15 ; 8 ; 0 ; 14,5.

a) Calcule sa moyenne.

b) Quelle note doit – il obtenir au 6ième contrôle pour que sa moyenne augmente d'un point ?

11. Une usine teste des ampoules électriques en étudiant leur durée de vie (en heures) sur un échantillon de 2 000 ampoules.

Durée de vie (d) en heures	Nombre d'ampoules
$300 \leq d < 500$	270
$500 \leq d < 700$	640
$700 \leq d < 900$	750
$900 \leq d < 1100$	340

a) Représente le tableau par un histogramme. On prendra 1cm pour 100 heures et 1cm pour 100 ampoules.
b) Calcule la moyenne des durées de vie des ampoules (en heures). On prendra pour valeur de d le milieu de chaque classe.

12. On a relevé pour 100 véhicules la distance parcourue en un an. Un premier classement a donné le tableau suivant :

Distances parcourues en milliers de km	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Effectifs	10	18	40	20	12

a) Construis l'histogramme correspondant.
b) Donne les effectifs cumulés.
c) Dans quelle classe se trouve la médiane ?
d) Détermine la distance moyenne parcourue par un véhicule pendant un an.

13. Voici les notes obtenues chronologiquement par trois collégiens : Hamza ; Pahimi et Néloum en mathématiques.

Hamza : 12 ; 8 ; 10 ; 16 ; 12 ; 10 ; 11 ; 8 ; 9 ; 15 ; 9 ; 12

Néloum : 18 ; 12 ; 20 ; 12 ; 19 ; 11 ; 8 ; 9 ; 10 ; 3 ; 6 ; 4.

Pahimi : 4 ; 6 ; 3 ; 10 ; 9 ; 8 ; 11 ; 19 ; 12 ; 20 ; 12 ; 18.

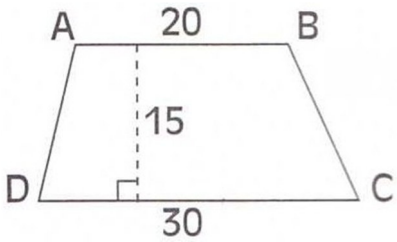
a) On entend dire que ces trois élèves ont la même moyenne. Est – ce exact ?

b) Pour chaque série de notes, détermine la note médiane.

c) Le commentaire du professeur de mathématiques sur le livret scolaire de ces trois élèves n'est pas le même. Pourquoi ? Imagine ces commentaires.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 2 DU TROISIEME TRIMESTRE

1. SABCD est une pyramide de hauteur 4,5cm. Sa base ABCD est le trapèze suivant :

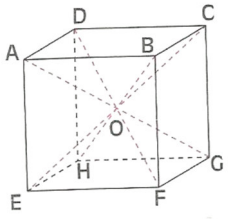


Calcule le volume de cette pyramide.

2. SABCD est une pyramide de hauteur 4,5 cm et de volume 9,375cm³.

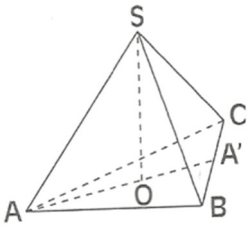
Sa base est un carré ABCD. Calcule le côté de ce carré.

3. ABCDEFGH est un cube. Les diagonales [AG], [BH], [CE] et [DF] du cube se coupent au point O centre de ce cube.



Nomme toutes les pyramides à base carrée tracées sur le dessin.

4. SABC est une pyramide régulière de base ABC telle que : AB = 40mm et SA = 60mm. [SO] est la hauteur de cette pyramide. A' est le point d'intersection de (AO) et (BC).

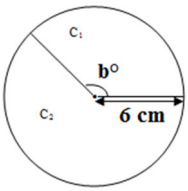


a) Dessine en dimensions réelles les figures de chacun des plans (ABC) ; (SAC) ; (SOA).
b) Calcule AA' ; SO ; SA'.
c) Calcule l'aire de la base, l'aire latérale et le volume de cette pyramide.

5. La hauteur d'une pyramide régulière à base carrée est 8cm. Le périmètre de sa base est 16cm. Calcule son volume, son aire latérale et la longueur d'une arête joignant le sommet et la base.

.6 Construis le patron d'un cône de révolution de 6cm de rayon de base et de 15cm de hauteur.

7. La figure ci-dessous représente les patrons des surfaces latérales de deux cônes de révolution découpés dans un disque de rayon 6cm.



Calcule le rayon de la base, la hauteur et le volume de chaque cône obtenu sachant que b° = 120° ; ($\pi = 3{,}14$).

8. Un cône de révolution a pour hauteur 3,5cm. La longueur d'une génératrice est 5cm.
a) Fais un dessin.
b) Calcule le rayon du cercle de base.

9. Un cône de révolution de sommet S a pour base un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et M est un point de $(\mathcal{C})$ tel que SM = 8,4cm. De plus, mes$\widehat{OSM} = 60°$.

Fais un dessin et calcule la valeur exacte de la hauteur du cône puis le rayon de $(\mathcal{C})$.

10. Un cône de révolution de sommet S a pour base un cercle de centre O et de diamètre [AB]. De plus, mes $\widehat{ASO} = 40°$ et on a : AB = 20cm.
a) Fais une figure.

b) Calcule une valeur approchée de la hauteur du cône. Calcule le volume de ce cône.

11. Une grande case a la forme d'un cylindre de 12m de rayon et 3m de hauteur, surmonté d'un toit en forme de cône de révolution dont le sommet est situé à 12m du sol. Quelle est, en litres, la quantité d'air contenu dans cette case ? ($\pi = 3{,}14$)

12. Un verre conique a une contenance de 25cl.

Quelle est la hauteur du liquide dans le verre lorsqu'il est rempli sachant que le diamètre de l'ouverture est 8cm ? ($\pi = 3{,}14$)

EVALUATION

Exercice 1

On a relevé les tailles de 250 personnes.

Tailles	Effectifs
[155 ; 165[	42
[165 ; 175[	109
[175 ; 185[	…
[185 ; 195[	23

a) Complète l'effectif qui manque dans la série.

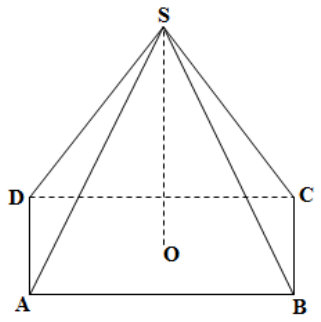
b) Fais une représentation à l'aide d'un histogramme.

c) Quelle est la taille moyenne ?

Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.

SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un rectangle de centre O et dont la hauteur est le segment [SO].



On donne AB = 32 ; BC = 22 ; SO = 36.

1) Calcule en cm^3 le volume de cette pyramide.
2) On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base. Ce plan coupe la hauteur [SO] en H tel que SH = $\frac{SO}{4}$.

Exercice 3

95 personnes ont répondu à un questionnaire concernant leur alimentation du dimanche dernier. Il apparait que :

- 42 d'entre elles ont mangé de la viande ;
- 51 ont mangé du poisson ;
- 25 ont mangé du poisson et de la viande.

Combien de personnes n'ont mangé que du poisson ?

Combien de personnes ont n'mangé ni viande ni poisson ?

SUJETS TYPES D'EXAMEN

Sujet 1

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(1 ; 3), B(7 ; 6) et la droite (D) d'équation $4x + 2y - 25 = 0$.

1) Place les points A et B puis construis la droite (D).
2) Montre que la droite (D) est la médiatrice du segment [AB].

Exercice 2

f est la fonction définie dans /R par :

$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 - |x - 1|$

1) Montre que f est une fonction affine par intervalle.
2) Résous dans /R l'équation

$f(x) = 2x - 4$

3) Représente graphiquement dans un repère (O, I, J) la fonction f.
4) Utilise le graphique pour donner l'ensemble de solution de l'inéquation $f(x) > 3$.

Problème

OAB est un triangle rectangle en O tel que OA = 4, OB = 5.

1) Construis le cercle de diamètre [AB] et la tangente (T) à ce cercle en A qui coupe (OB) au point K.
2) Calcule les distances AB, OK et KA.
3) Désigne par I le centre de ce cercle et par I' le symétrique de I par rapport à A. L est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{KI}$. Montre que KI'LI est un parallélogramme. Déduis – en que L est un point de la droite (T) et que KI'LI est un losange.
4) Montre que BK = KL.
5) La droite (BL) recoupe le cercle (C) au point H. Montre que O et L sont symétriques par rapport à la droite (AB). Déduis – en que la droite (OH) est parallèle à la tangente (T).

Sujet 2

Exercice 1

1) On donne $A = \frac{\frac{3}{4} - 3}{\frac{1}{2} + 2}$

   Calcule A et donne le résultat sous forme de fraction irréductible.
2) On donne $B = \frac{1{,}5 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{2}}$.
   a) Donne l'écriture décimale de B.
   b) Exprime B en écriture scientifique.
3) a) On donne $C = \sqrt{180} \times 2\sqrt{80}$.

   Exprime C sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers, b étant le plus petit possible.

   b) soit $D = \frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$. Montre que D est un nombre entier.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Place les points A(- 2 ; 3) et B(5 ; 3).

2) Trace le cercle (C) de centre A et de rayon 5 puis le cercle (C') de centre B et de rayon 5.
3) Calcule les coordonnées des deux points d'intersection des cercles (C) et (C').

Problème

On donne l'expression littérale A(x) = $(3x+5)^2 + (3x+5)(2x+7)$

1) Développe et réduis A(x)
2) Factorise A(x)
3) Calcule A(x) pour x = 2 ; pour x= 0
4) Résous l'équation A(x) = 0.

Sujet 3

Exercice 1

ABC est un triangle équilatéral de côté 3cm. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport - $\frac{4}{3}$ et par AB'C' l'image de ABC par h.

1) Démontre que AB'C' est un triangle équilatéral.
2) Calcule l'aire du triangle AB'C'.

Exercice 2

Dans la cour du lycée Félix Eboué, deux amis Haroun et Alladoum discutent. Haroun dit : « Dans ma classe, il y a 30élèves. Si je multiplie le nombre a de garçons par 3, puis le nombre b de filles par 2 et si j'ajoute ces deux résultats, je trouve 85. »

Alladoum lui dit alors : « Dans la mienne il y a 35 élèves. Si je multiplie le nombre x de garçons par 2, puis le nombre y de filles par 5 et si j'ajoute ces deux résultats, je trouve 55. »

Mais un professeur de mathématiques, assis à côté, les écoute et affirme que ce dit Haroun est vrai et que ce que dit Alladoum est faux.

1) Trouve le nombre de garçons et de filles de la classe de Haroun.
2) Pourquoi ce que dit Alladoum est faux ?

Problème

On donne l'application f définie de /R dans /R par : f(x) = $(3x-6)^2 - 4(x-1)^2$.

6) Factorise f(x).
7) Résous l'équation f(x) = 0.
8) Développe, réduis puis ordonne f(x).

9) Soit la fonction rationnelle h(x) = $\frac{(x^2+x)+\ (x+1)(4x-8)}{(5x-3)(x-4)}$

   c) Donne l'ensemble de définition D_h de la fonction h puis simplifie l'écriture de h(x).

   d) Résous dans /R les équations : h(x) = 0 ; h(x) = - $\frac{13}{12}$; h(x) = 1.

10) Calcule h($\sqrt{5}$)puis encadre h($\sqrt{5}$) par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 sachant que 3,8729 < $\sqrt{5}$ < 3,8730.

Sujet 4

Exercice 1

a et b sont deux nombres réels non nuls. On pose :

A = $(ab)^2\left(\frac{1}{b}\right)^4$ et B = $a^2\left(\frac{b}{a}\right)^3\left(\frac{1}{b^2}\right)$

1) Simplifie A et B.

2) Calcule la valeur numérique de A×B et $\frac{A}{B}$ pour :

   a = 4. 10^{-3} et b = 2. 10^{-2}

Exercice 2

Représente graphiquement dans un repère orthonormé (O, I, J) l'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} x-2y\ >4 \\ x+2y\ <\ -2 \end{cases}$

Problème

Choisis le centimètre comme unité de mesure dans le plan.

1) Trace un segment [CD] tel que CD = 5.

   Place sur le segment [CD] un point M. Construis un rectangle CMKS tel que : MK=2,5. Construis de l'autre côté de la droite (CD) le triangle équilatéral MDE.

2) La position du point M varie sur le segment [CD] : on pose CM = x.

   a) Quelles sont les valeurs possibles de x ?

   b) Exprime en fonction de x, le périmètre P_1(x) du rectangle CMKS et le périmètre P_2(x) du triangle MDE.

   c) Dans le plan d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement les applications affines P_1 et P_2.

3) Comment peux – tu déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle le périmètre du rectangle CMSK est égal au périmètre du triangle MDE ? Retrouve cette valeur par le calcul.

Sujet 5

Exercice 1

Calcule les réels a, b et c sachant que :

$\frac{3}{a} = \frac{1+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}}$; $b = \sqrt{\left(\sqrt{2} - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2}$; $c = 14a - 12b$.

Exercice 2

On donne la fonction f définie de /R dans /R par :

$f(x) = x + |2x - 4|$

4) Exprime f(x) pour x élément de] ← ; 2] puis pour x élément de [2 ; →[.
5) Représente graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J).
   Utilise le graphique précédent pour résoudre dans /R l'équation f(x) = 5 ;
   f(x) = 1.

Problème

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), place les points A(1 ; 7) et B(4 ;3). Détermine les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OB}$.
2) Montre que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. En déduire que le triangle OAC est isocèle.
3) Montre que OB = AB. En déduire que le triangle OAC est rectangle en A.
4) Trace le cercle (C) de centre B et de rayon OB. Ce cercle coupe l'axe des abscisses en O et E et l'axe des ordonnées en O et F. Quelle est la nature du quadrilatère OECF ? Justifie. En déduire les coordonnées des points E et F.
5) Trace la tangent (Δ) en O au cercle (C). Trouve une équation de cette tangente dans le repère (O, I, J).
6) On donne l'application f qui, à tout point M(x ; y) du plan, associe le point M'(x' ; y') du même plan tel que : $\begin{cases} x' = -y + 7 \\ y' = x - 1 \end{cases}$

   Quelles sont les images O' ; A' et B' des points O, A et B.
7) Compare les distances AB et A'B' puis les distances OA et O'A'.

f est – elle une isométrie.

Sujet 6

Exercice 1

I ; J ; A et C sont quatre points distincts du plan tels que : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. B est le point d'intersection de (AI) et (CJ).

1) Construis une figure.
2) Complète chacune des égalités suivantes :
   a) $\overrightarrow{BI} = \ldots\overrightarrow{AB}$
   b) $\overrightarrow{BC} = \ldots\overrightarrow{JC}$

Exercice 2

Au premier trimestre de l'année scolaire 2013 – 2014, le professeur de mathématiques de la classe de 3ème a décidé de calculer la moyenne en attribuant le coefficient des notes en fonction de la durée du devoir. Il organise deux devoirs dont le premier a duré 1h et le second 2h (coef 1 au premier devoir et coef 2 au second).

1) Gracia a eu 15 au premier devoir et 9 au second. Calcule sa moyenne.
2) Phidelie a eu 8 au premier devoir et sa moyenne est 12. Combien a – t – elle eu au second devoir ?
3) Carine a eu 12 de moyenne, mais en permutant ses deux notes, elle aurait eu 13 de moyenne. Quelles sont ses deux notes ?

Problème

On donne les polynômes suivants :

$f(x) = 49x^2 - 25$ et $g(x) = (7x - 5)(3 - 2x) - 14x + 10 - 5(5 - 7x)$

1) Développe, réduis et ordonne g(x) suivant les puissances croissantes de x.
2) Factorise f(x) et g(x).
3) On pose $h(x) = \frac{f((x)}{g(x)}$
   a) Détermine l'ensemble de définition D_h de h.
   b) Simplifie h(x) sur D_h.
4) a) Parmi les réels suivants : 0 ; $\sqrt{3}$ et $\frac{5}{7}$, quels sont ceux qui ont une image par h ? Justifie.
   c) Calcule l'image par h lorsqu'elle existe de chacun des réels : 0 ; $\sqrt{3}$ et $\frac{5}{7}$.

5) Donne un encadrement d'ordre 2 de h($\sqrt{3}$) sachant que 1,732 $< \sqrt{3} <$ 1,733.

Sujet 7

Exercice 1

1) Résous dans /R ×/R le système : $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$
2) On désigne par x la longueur d'un rectangle et par y sa largeur exprimées en centimètre. Le périmètre de ce rectangle est 16 cm. Si on ajoute 3cm à la longueur et si on double la largeur, le périmètre devient 28cm. Ecris les deux équations correspondant à ces données.
3) Détermine la longueur et la largeur de ce rectangle.

Exercice 2

Trois vaches mangent 120kg de tourteau en 20 jours. Quelle quantité de tourteau mangent 8 vaches en 15 jours.

Problème

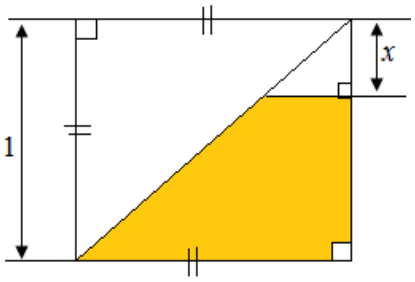
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Trace la droite (D) d'équation y = 4x – 3.
2) On désigne par f la fonction dont la représentation graphique dans ce même repère est parallèle à la droite (D) et passe par le point A(- 3 ; 2).
   a) Détermine cette fonction affine f.
   b) Trace la représentation graphique de f dans le même repère.

Sujet 8

Exercice 1

Détermine x pour que l'aire coloriée soit égale au quart de l'aire du carré.



Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.

ABC est un triangle rectangle en B tel que mes $\hat{A} = 60°$ et AC = 2.

Calcule BC et AB.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité de longueur est le centimètre.

On donne les points A(7 ; 1) ; B(8 ; 4) et C(- 1 ; 7).

1) a) Fais une figure que tu complèteras au fur et à mesure de ta progression dans l'énoncé.
   c) Calcule les distances AB ; BC et CA.
   d) Démontre que le triangle ABC est rectangle.
2) M est le milieu du segment [AC] et D le symétrique de B par rapport à M.
   a) Détermine les coordonnées du point M.
   b) Démontre que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
3) P est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Détermine les coordonnées du point P.
4) (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Précise le centre et le rayon du cercle (C).
   b) Justifie que les points D et O appartiennent au cercle (C).

Sujet 9

Exercice 1

a) Calcule : $A = \frac{5}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{25}{6}$
b) Calcule : $B = \frac{10^{-3} \times 12 \times 10^{7}}{3 \times 10^{3} \times 10^{-4} \times 8}$. Donne le résultat sous forme décimale.
c) Ecris C sous forme $b\sqrt{3}$, b étant un entier : $C = 3\sqrt{75} - 7\sqrt{27} + 4\sqrt{48}$.

Exercice 2

a) Développe et écris le plus simplement possible : $A = \left(4 + 5\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2} - 3\right)\left(3\sqrt{2} + 7\right)$.
b) Factorise :
   $E = (2x + 3)^2 - (x - 5)(2x + 3)$
   $F = (5x + 8)^2 - 8$.

Problème

L'unité de longueur est le centimètre.

ABC est un triangle rectangle en C tel que AC = 5,4 et AB = 9.

O est le milieu du segment [AB] ; D est le milieu du segment [BC] et I est le milieu du segment [AD] . Les droites (CI) et (AB) se coupent au point P.

E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$.

1) Fais la figure.
2) Calcule BC.
3) a) Quelle est la nature du quadrilatère AEDC ? Justifie.
   b) Démontre que les points C, I, P et E sont alignés.
   c) quelle est la nature du quadrilatère AEBD ? Justifie. Déduis – en que O est le milieu du segment [ED].

4) que représente P pour le triangle AED ? Justifie.

Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

……

Conseils et orientation de l'enseignant

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

Evaluation de la compétence

Table des matières

TECHNIDEV
Institut des Technologies Innovantes pour le Développement