MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA PROMOTION CIVIQUE

EDUNOTE
Portail Intégré de Réussite Scolaire

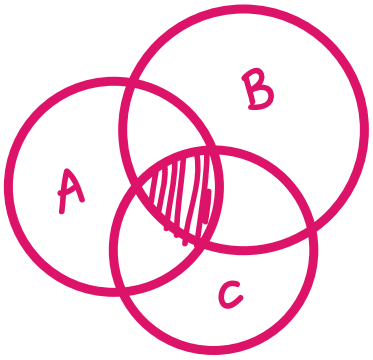
Maths
Terminale L

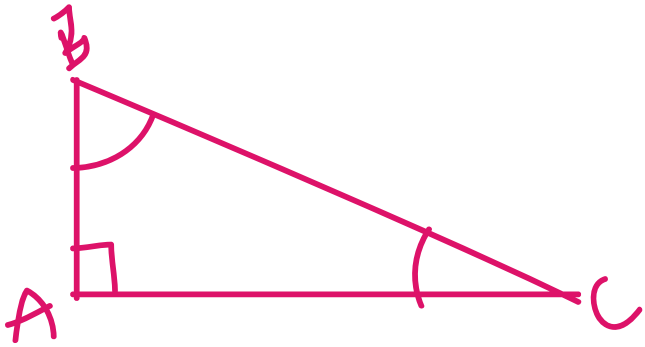
SUPPORT OFFICIEL DE L'ENSEIGNEMENT À DISTANCE AU TCHAD

✓ ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

✓ ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

✓ EXERCICES CORRIGÉS





Inscrivez-vous
www.edunote.org

Appelez le Call center
Pédagogique au
1317

Scannez puis Téléchargez
le Livre en Pdf

unicef pour chaque enfant

EDUCATION CANNOT WAIT
a global fund for education in emergencies

UNFPA

Centre National des Curricula

TECHNIDEV
Institut des Technologies Innovantes pour le Développement

Avant – Propos

Ce support d'enseignement à distance de Mathématiques destiné aux élèves des classes de Terminales A de l'Enseignement Secondaire Général au Tchad a été conçu dans le cadre du programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Toutes propositions tendant à l'amélioration du document seront les bienvenues.

Bonne lecture

Equipe éditoriale

Le support d'enseignement à distance de Mathématiques destiné aux classes de Terminales A (TA) a été réalisé par une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants, en particulier :

- MM.

MM. :

- MANDO FERDINAND, Professeur certifié de Mathématiques ;
- ALIYABA ZOUA, Professeur licencié de Mathématiques ;
- AHMAT HANSAN YERIMA, Professeur licencié de Mathématiques

Sous la supervision de NGARADOUM FABIEN, Professeur certifié de Mathématiques

Saisie et mise en page

NODJIKOUAMBAYE MBAINAIDA, Chef de Division Bibliothèque au CNC

Assistance technique :

MAHAMAT ABBA MAHAMAT, Professeur de Mathématiques

Coordination :

Dr. ABOUBAKAR ALI KORE, Directeur Général du Centre National des Curricula

KHALID FADOUL DOUTOUM, Directeur Général de TECHNIDEV.

PREFACE

Chers élèves, enseignants, parents et parties prenantes de l'école tchadienne,

Conformément au **protocole d'accord de partenariat du 02 septembre 2016** ayant pour objet le renforcement des capacités en technologies de l'information et de la communication dans les établissements secondaires, liant l'Etat Tchadien représenté par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique (MENPC) et l'Institut TECHNIDEV, ce dernier est amené à expérimenter des approches innovantes intégrant le numérique et visant à améliorer l'efficacité interne du système éducatif tchadien. **Le résultat attendu de cette convention (MENPC/ TECHNIDEV) étant l'accès à une éducation et la réussite pour tous.**

C'est dans ce cadre que le programme Soutien Scolaire Intégré est développé et mis en œuvre par TECHNIDEV, avec pour objectif de :

- Prendre en charge tous les élèves en difficultés scolaires dans une discipline inscrite au programme officiel et ce, conformément au niveau de l'élève ;
- Contribuer à améliorer les notes en classe de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à assurer le passage en classe supérieure de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à améliorer le taux de réussite au BAC de tous les candidats bénéficiaires ;
- Contribuer au maintien des filles à l'école.

TECHNIDEV tient à exprimer ses remerciements aux cadres du MENPC, aux partenaires (ECW et UNICEF), les experts, les inspecteurs, les enseignants et les animateurs pédagogiques et à toutes celles et tous ceux qui ont contribué d'élaboration de ce guide.

Le présent guide pédagogique décline les stratégies d'une prise en charge de l'élève soucieux de la qualité de son éducation et de sa réussite, adhérant au projet et respectant les conditions spécifiques de sa mise en œuvre.

L'enseignant, spécialisé en techniques d'évaluation et de remédiation et en éducation par le numérique, dispose d'un outil lui permettant d'agir avec une méthode axée sur les résultats en terme de développement des compétences des élèves.

Pour les parents, c'est un instrument de suivi quotidien des activités d'apprentissage de l'enfant par rapport à la progression dans le programme.

J'invite les élèves, les enseignant (e)s et les parents à une exploitation judicieuse de ce guide pour une contribution efficace dans la mise en œuvre de programmes de Soutien Scolaire Intégré (SSI) et partant, la redynamisation de l'école tchadienne.

KHALID FADOUL DOUTOUM

Directeur Général de TECHNIDEV

INTRODUCTION

Le présent guide a été réalisé dans le cadre de programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants a contribué à son élaboration.

Ce guide, destiné principalement aux enseignants et aux élèves, a pour but de contribuer à l'amélioration et le renforcement des capacités de l'élève et ce, d'abord par l''identification de ses difficultés suivi un accompagnement stratégique basé sur une approche par compétences. Il s'adresse aux élèves du CM à la Terminale et s'appesantit principalement sur les matières fondamentales que sont le Français et les Mathématiques. Chaque Guide traite un trimestre spécifique conformément au programme de l'enseignement proposé par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique du Tchad.

Dans ce contexte, le guide met en évidence les principales compétences jugées incontournables pour la réussite de l'élève et suggère aux enseignants des stratégies et méthodologies appropriées pouvant servir à mettre en place une meilleure prise en charge individuelle de l'élève.

Dans son architecture, le guide présente de la manière suivante :

Partie 1 (destinée en premier lieu à l'enseignant) : La Fiche de programmation trimestrielle, la Fiche de Progression et la Fiche de développement de compétences du trimestre mis en exergue par ledit Guide ainsi qu'un chronogramme de prise en charge individuelle de l'élève par l'enseignant.

Partie 2 (destinée aux élèves) : Elle déroule les différentes compétences que l'élève doit développer, ainsi que des épreuves et applications favorisant l'acquisition de ces compétences. Des tableaux d'évaluation des élèves sont consacrés à la fin de chaque épreuve.

Table des Illustrations

= Important pour l'élève

= Astuces et consignes

= Exercice d'application

= Exercices d'approfondissement

= Relire plusieurs fois

= Compétence acquise

= Compétence en cours d'acquisition

= Compétence non-acquise

Partie destinée à l'enseignant

FICHE DE PROGRAMMATION ANNUELLE		
	CB1 : analyse	**CB2 : algèbre – probabilité – statistique**
Trimestre I	☞ **Chapitre 1 :** Etude des fonctions numériques d'une variable réelle ☞ **Chapitre 2:** Suites numériques	☞ **Chapitre 1** : Les nombres .
Trimestre II	☞ **Chapitre 3 :** Fonctions logarithmes ☞ **Chapitre 4 :** Fonctions exponentielles	☞ **Chapitre 2** : Equations-inéquations-systèmes
Trimestre III		☞ **Chapitre 3**: Probabilités ☞ **Chapitre 4**: Statistiques

OBJECTIF TERMINAL D'INTEGRATION (OTI) TA

Au terme de la classe de Terminale A, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives permettant de développer des capacités d'organisation et de raisonnement dans un langage correct; de mobiliser des connaissances mathématiques essentielles dans des contextes variés et transversaux.

TA: CB1 : Analyse

Au terme de la classe de Terminale A, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir les fonctions et les suites numériques.

TA: CB2 : Algèbre -Statistiques et probabilités

Au terme de la classe de Terminale A, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir les équations et inéquations, les nombres, les séries statistiques et le calcul des probabilités.

Fiche de programmation horaire du 1er trimestre

1er Trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombre d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
1er Octobre au 31 Décembre	CB1	1	Etude des fonctions numériques d'une variable réelle	9H	2H	2H	12H	33H
		2	Suites numériques	8H	2H		11H	
11 semaines	CB2	1	Nombres	6	2H	2H	10H	

FICHE DE PROGRESSION DU 1er TRIMESTRE

Trimestre	Période	Contenus	
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité
1	1er Octobre au 10 Novembre	- Etude des fonctions numériques d'une variable réelle	- Les nombres
	11 Novembre au 31Décembre	- Suites numériques	

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Terminale A

Premier trimestre

Compétence de Base 1

Terminale A–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre l'étude des fonctions numériques d'une variable réelle et les suites numériques.

Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
– Fonctions numériques d'une variable réelle : limite, dérivation et étude. ➢ Limite ➢ Dérivation	– Déterminer la limite d'une fonction en un point et à l'infini. – Interpréter graphiquement la limite infinie d'une fonction en un point (asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées). – Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient et de la composée de fonctions. – Interpréter graphiquement la limite à l'infini d'une fonction (asymptote oblique et parallèle à l'axe des abscisses). – Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point (éventuellement à gauche, à droite). – Déterminer une équation de la tangente en un point.	- Détermination de la limite d'une fonction en un point et à l'infini. - Interprétation graphique de la limite infinie d'une fonction en un point (asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées). - Détermination de la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient et de la composée de fonctions. - Interprétation graphique de la limite à l'infini d'une fonction (asymptote oblique et parallèle à l'axe des abscisses). - Calcul du nombre dérivé d'une fonction en un point (éventuellement à gauche, à droite). - Détermination d'une équation de la tangente en un point.

	➢ Etude des fonctions.	– Etudier les variations d'une fonction. – Rechercher et donner la nature des extrémums d'une fonction. – Calculer la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables – Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction. – Déterminer les éléments de symétrie d'une courbe représentative d'une fonction (axe et centre de symétrie). – Etudier les fonctions polynômes. – Etudier les fonctions rationnelles.	- Etude des variations d'une fonction. - Recherche et détermination de la nature des extrémums d'une fonction. - Calcul de la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables - Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction. - Détermination des éléments de symétrie d'une courbe représentative d'une fonction (axe et centre de symétrie). - Etude des fonctions polynômes. - Etude des fonctions rationnelles.
	- Les suites numériques	- Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer. - Etudier les variations d'une suite numérique (suites récurrentes et suites définies de façon explicite). - Etudier les suites arithmétiques et géométriques. - Etudier la convergence des suites numériques	– Utilisation du raisonnement par récurrence pour démontrer. – Etude des variations d'une suite numérique (suites récurrentes et suites définies de façon explicite). – Etude des suites arithmétiques et géométriques. – Calcul de la somme de n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique. – Etude de la convergence des suites numérique

Compétence de Base 2

Terminale D–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les nombres.		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
– Les nombres ➢ Calculs dans $\mathbb{Q}$	- Rechercher les décimales successives d'un nombre rationnel. - Déterminer un nombre rationnel connaissant son développement décimal illimité et périodique. - Faire des calculs sur des grands nombres en utilisant la calculatrice.	- Recherche des décimales successives d'un nombre rationnel. - Détermination d'un nombre rationnel connaissant son développement décimal illimité et périodique. - Calculs sur des grands nombres en utilisant la calculatrice.
➢ Divisibilité d'un nombre entier et numération	- Déterminer des diviseurs d'un nombre entier en utilisant les critères de divisibilité. - Décomposer en produits de facteurs premiers un nombre entier. - Ecrire un nombre entier naturel dans une base donnée	- Détermination des diviseurs d'un nombre entier en utilisant les critères de divisibilité. - Décomposition en produits de facteurs premiers d'un nombre entier. - Ecriture d'un nombre entier naturel dans une base donnée.

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du premier trimestre

Leçon : Etude des fonctions numériques d'une variable réelle

SEQUENCE 1

Limites de référence à l'infini, en 0 et en a ($a \in \mathbb{R}^*$)

Objectif

Calculer les limites des fonctions de référence à l'infini, en 0 et en a ($a \in \mathbb{R}^*$)

Calcul des limites des fonctions de référence à l'infini

n étant un entier naturel non nul, on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, si\ n\ est\ pair \\ -\infty, si\ n\ est\ impair \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} c = \lim\limits_{x \to +\infty} c = c$, où c est une constante réelle.

Propriété

Lorsqu'une fonction admet une limite en $-\infty$ (ou en $+\infty$), cette limite est unique.

Limites de référence en 0 et en a ($a \in \mathbb{R}^*$)

a étant un nombre réel et n est entier naturel, on a :

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$; $\lim\limits_{x \to a} (x-a)^n = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ $, si\ n\ est\ pair$;

Pour n impair $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \end{cases}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \end{cases}$.

Propriété

Lorsqu'une fonction admet une limite en a, cette limite est unique.

SEQUENCE 2

Limite à gauche – limite à droite en a ($a \in \mathbb{R}$)

Objectif

Calculer la limite à gauche – limite à droite en a ($a \in \mathbb{R}$)

Définitions

Soit a et l des nombres réels, f une fonction d'ensemble de définition Df.

- *On dit que f admet une limite à gauche en a égale à l lorsque la restriction g de f à*

$Df \cap]-\infty; a[$ admet en a une limite égale à l.

On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l.$

On lit : f(x) tend vers l lorsque x tend vers a par valeurs inférieures à a.

- *On dit que f admet une limite à droite en a égale à l lorsque la restriction g de f à $Df \cap]a; +\infty[$ admet en a une limite égale à l.*

  On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l.$

  On lit : f(x) tend vers l lorsque x tend vers a par valeurs supérieures à a.

Exemples

1) On donne la fonction *f* de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} pour\ x < 1, f(x) = 3x - 1 \\ pour\ x \geq 1, f(x) = \frac{x-1}{x+1}. \end{cases}$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 1 de *f*. La fonction *f* admet-elle une limite en 1 ?

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3x - 1 = 2.$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x+1} = 0.$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; donc la fonction n'admet pas de limite en 1. On peut aussi dire que *f* n'est pas continue en 1.

2) On donne la fonction *f* de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$.

Calculons la limite à gauche et la limite à droite en 0 de *f*. *f* admet-elle une limite en 0 ?

On sait que $|x| = x\ si\ x \geq 0\ et\ |x| = -x\ si\ x \leq 0$; donc $\begin{cases} pour\ x \leq 0, f(x) = -x \\ pour\ x \geq 0, f(x) = x. \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0\ et\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0.$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$; donc *f* admet une limite égale à 0 en 0.

SEQUENCE 3

Limites d'une somme de fonctions

Objectif

Calculer les limites d'une somme de fonctions

Limites d'une somme : $f + g$.

f *et* g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

Si f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite en a	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur par $f(x) = x^2 + x$.

On a : $\lim\limits_{x\to-5} x^2 = 25$ et $\lim\limits_{x\to-5} x = -5$ alors $\lim\limits_{x\to-5} x^2 + x = 25 - 5 = 20$ d'où $\lim\limits_{x\to-5} f(x) = 20$.

$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ alors on ne peut pas conclure directement.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - 3 + \frac{1}{x^2}$.

On a : $\lim\limits_{x\to0} (x-3) = 0 - 3 = -3$ *et* $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to0} g(x) = -3 + (+\infty) = +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} (x-3) = -\infty + (-3) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ alors } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty + 0 = -\infty.$$

SEQUENCE 4

Limites d'un produit de fonctions

Objectif

Calculer les limites d'un produit de fonctions

Limites d'un produit $f \times g$

f *et* g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

Si f a pour limite en a	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $f \times g$ a pour limite en a	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée

Exemple

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$. On peut écrire $f(x) = x(x+1)$ et on a :

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty \; alors \; \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

SEQUENCE 5

Limites de l'inverse d'une fonction

Objectif

Calculer les limites de l'inverse d'une fonction

Limites de $\frac{1}{f}$

f est une fonction ; l un nombre réel ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

Si f a pour limite en a	$l \neq 0$	0 (f étant positive)	0 (f étant négative)	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\frac{1}{f}$ a pour limite en a	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Exemples

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

1) On a : $\lim_{x\to-2} (x+2) = 0$ et $\begin{cases} x+2 < 0, si\ x < -2 \\ x+2 > 0, si\ x > -2. \end{cases}$

Donc $\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \; et \; \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty.$

2) On a : $\lim_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty; donc \; \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$

SEQUENCE 6

Limites d'un quotient de fonctions

Objectif

Calculer les limites d'un quotient de fonctions

Limites de $\frac{f}{g}$

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

Si f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et si g a pour limite en a	$l'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	formes indéterminées	

Exemples

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-3}{x^2-1}$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3) = -3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1) = +\infty$; $donc$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x+3}{x-3}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3) = +\infty$; on ne peut donc conclure directement.

On « lève l'indétermination » en écrivant $f(x) = 2 + \frac{9}{x-3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9}{x-3} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$.

SEQUENCE 7

Limite d'une fonction composée : $f(ax+b)$

Objectif

Calculer les limites d'une fonction composée

Propriété

Soit f une fonction, x_0 un nombre réel et $x \longmapsto ax+b$ une fonction affine non constante.

La fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite en ax_0+b.

On a : $\lim_{x\to x_0} f(ax+b) = \lim\limits_{t\to ax_0+b} f(t)$.

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x\to -2}(2x+7)^4$.

Pour calculer cette limite, posons $t=2x+7$ et $f(t)=t^4$.

On a : $\lim\limits_{x\to -2}(2x+7)=-4+7=3; donc\ \lim\limits_{x\to -2}(2x+7)^4=\lim\limits_{t\to 3}t^4=3^4=81$.

SEQUENCE 8

Limite en l'infini d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

Objectif

Calculer les limites d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

Propriétés

- *A l'infini, un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.*
- *A l'infini, une fraction rationnelle a même limite que le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.*

Exemples

$\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+4x-5)=\lim\limits_{x\to -\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+4x-5)=\lim\limits_{x\to +\infty}x^2=+\infty$. $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^3+x^2+2x-2)=\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^3)=-(-\infty)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3+x^2+2x-2)=\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3)=-(+\infty)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-4x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}x=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-4x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x-1}{2x+5}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x}{2x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x-1}{2x+5}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x}{2x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

SEQUENCE 9

Continuité en a ($a\ \epsilon\ \mathbb{R}$): critère de continuité

Objectif

Etudier la continuité d'une fonction en un point a

Propriété

f étant une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, f est continue en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Remarque

Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires est continue en tout élément de son ensemble de définition.

Exemple

SEQUENCE 10

Dérivation : Dérivabilité en un point x_0

Objectif

Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point x_0.

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0.

Lorsque le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie l en x_0 alors on dit que la fonction f est dérivable en x_0.

Le nombre réel l est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

On écrit :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l = f'(x_0)$$

Interprétation géométrique

Si la fonction f est dérivable en x_0, alors la représentation graphique (C) de f admet une tangente au point $M_0(x_0 ; f(x_0))$ dont une équation est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exemple

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 1$.

Déterminons le nombre dérivé de f en 1 :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(3x^2+1)-4}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(3x^2-3)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} 3(x+1) = 6.$$

f est bien dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est $f'(1) = 6$.

Trouvons une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1.

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 6(x-1) + 4 = 6x - 2.$$

Une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1 est donc $y = 6x - 2$.

SEQUENCE 11

Dérivation : Règles de dérivation

Objectif

Utiliser les règles de dérivation

Règles de dérivation

Une fonction polynôme ou rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Dérivée des fonctions élémentaires

Fonction f	Ensemble de dérivabilité de f	Fonction dérivée f'
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$ ou n est un entier naturel	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Dérivées et opération sur les fonctions

Fonction	Fonction dérivée
Somme : $u + v$	$u' + v'$
Produit : $u \times v$	$u'v + uv'$
Produit par un réel k : $k.u$	$k.u'$
Inverse : $\frac{1}{v}$ $(v \neq 0)$	$\frac{-v'}{v^2}$
Quotient : $\frac{u}{v}$ $(v \neq 0)$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Remarque

Formule de calcul de la dérivée d'une fonction homographique ; $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-d}{c}\right\}$, $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

SEQUENCE 12

Dérivation : Exemples

Objectif

A partir de quelques exemples, appliquer les règles de dérivation

Exemples

1) Pour $f(x) = \frac{2x-3}{4x+7}$, on a : $f'(x) = \frac{2\times7-(-3)\times4}{(4x+7)^2} = \frac{26}{(4x+7)^2}$

2) $f(x) = \frac{x^3-5x+2}{4} = \frac{1}{4}(x^3 - 5x + 2)$; f est donc de la forme $k.u$ où $u(x) = x^3 - 5x + 2$.

Donc $f'(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 5)$.

3) $g(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2-4}$. g est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x^2 - x - 1$ et $v(x) = x^2 - 4$; donc $u'(x) = 4x - 1$ et $v'(x) = 2x$; d'où $g'(x) = \frac{(4x-1)(x^2-4)-(2x^2-x-1)(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-14x+4}{(x^2-4)^2}$.

Exercice

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa dérivée.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ b) $f(x) = x^3 + 3x2 + 1$ c) $f(x) = 3x(x^2 - 1)$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ e) $f(x) = x^2 + \frac{x+1}{x}$ f) $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-2}$.

SEQUENCE 13

Dérivée de la fonction composée $x \longmapsto f(ax+b)$

Objectif

Calculer la dérivée d'une fonction composée

Propriété

La fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ est dérivable et sa fonction dérivée est la fonction $x \longmapsto af'(ax+b)$

Exemple

Déterminons sur $\mathbb{R}$, la dérivée de la fonction g définie par : $g(x) = (-2x+1)^3$.

On pose $f(x) = x^3, a = -2$ *et* $b = 1$; on a $g(x) = f(ax+b)$ *et* $f'(x) = 3x^2$.

Donc $g'(x) = -6(-2x+1)^2$.

SEQUENCE 14

Applications de la dérivation : Dérivée et sens de variation des fonctions

Objectif

Utiliser la dérivée d'une fonction pour donner ses variations

Propriété

f est fonction dérivable sur un intervalle I.

- *Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.*
- *Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.*
- *Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.*

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Etudions le sens de variation de f.

f étant une fonction polynôme, elle est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$:

D_f,=$\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

$f'(x) = 0 <=> x = 1 \; ou \; x = -1$.

Pour tout $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$; donc f est croissante sur

$]-\infty; -1] \; et \; sur \; [1; +\infty[$.

Pour tout $x \in [-1; 1]$, $f'(x) \leq 0$; donc f est décroissante sur $[-1; 1]$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \; et \; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$f(-1) = 4 \; et \; f(1)\,) = 0$.

Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

SEQUENCE 15

Applications de la dérivation : Dérivées et extrémums d'une fonction

Objectif

Utiliser la dérivée d'une fonction pour déterminer les extrémums d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a; b[$ *et* x_0 *un élément de* $]a; b[$.

Si f s'annule et change de signes en x_0, *alors f admet un extrémum relatif en* x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

f admet un minimum relatif m en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	m	$\searrow$	

f admet un maximum relatif M en x_0.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent : 4 est un maximum relatif de f en -1 et 0 est un minimum relatif de f en 1.

SEQUENCE 16

Quelques généralités sur les fonctions : Parité

Objectif

Etudier la parité d'une fonction

Parité

Soit f une fonction, D_f son ensemble de définition et (C_f) sa représentation graphique.

Définitions

f est une fonction paire si D_f est centré en zéro et pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$.

Dans un repère orthogonal, l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de (C_f).

Exemple

La fonction $x \longmapsto x^2$ est paire.

f est une fonction impaire si D_f est centré en zéro et pour tout x de D_f, $f(-x) =- f(x)$.

Dans un repère orthogonal, l'origine du repère est un centre de symétrie de (C_f).

Exemple

La fonction $x \longmapsto x^3$ est impaire.

SEQUENCE 17

Quelques généralités sur les fonctions : Centre de symétrie

Objectif

Déterminer le centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction

NB : Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Centre de symétrie

Propriété

Soit f la fonction et (C_f) sa représentation graphique.

Le point A (a ; b) est un centre de symétrie de (C_f) si pour tout nombre réel r tel que (a + r) $\in D_f$, on a (a – r) $\in D_f$ et ***f(a – r) + f(a + r) = 2b.***

Exemple

Démontrons que le point A (2 ; 3) est un centre symétrie de la représentation graphique (C_f) de la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x-2}$.

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

Soit x un nombre réel, $2 + x \in Df$, $2 - x \in Df$ et

$f(2-x) + f(2+x) = \frac{(2-x)^2-(2-x)-1}{(2-x)-2} + \frac{(2+x)^2-(2+x)-1}{(2+x)-2}$

$= \frac{x^2-3x+1}{-x} + \frac{x^2+3x+1}{x} = 6 = 2\times3$; donc le point A (2 ; 3) est un centre de symétrie de (C_f)

SEQUENCE 18

Quelques généralités sur les fonctions : Axe de symétrie

Objectif

Déterminer l'axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction

Axe de symétrie

Propriété

Soit f la fonction et (Cf) sa représentation graphique.

La droite d'équation x = a est un axe de symétrie de (Cf) si pour tout nombre réel r tel que

$(a + r) \in Df$, on a $(a - r) \in Df$ et ***$f(a - r) = f(a + r)$****.*

Exemple

On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 7$.

Démontrons que la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (Cf).

$Df = \mathbb{R}$.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $2 + x \in \mathbb{R}$, $2 - x \in \mathbb{R}$ et on a : $f(2+x) = (2 - x)^2 - 4(2-x) + 7 = x^2 + 4$ *et* $f(2+x) = (2+x)^2 - 4(2+x) + 7 = x^2 + 4$ donc $f(2-x) = f(2+x)$, d'où la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (Cf).

SEQUENCE 19

Quelques généralités sur les fonctions : Asymptotes verticales

Objectif

Déterminer les asymptotes verticales à la courbe représentative d'une fonction

NB : Le plan est muni d'un repère (O, I, J), (Cf) est la représentation graphique d'une fonction f.

Asymptote verticale

La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à (Cf) si, et seulement si,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

$Df = \mathbb{R} - \{-1\}$

La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale car $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

($\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$).

SEQUENCE 20

Quelques généralités sur les fonctions : Asymptotes horizontales

Objectif

Déterminer les asymptotes horizontales à la courbe représentative d'une fonction

Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à (Cf) en $-\infty$ (respectivement en $+\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ *(respectivement* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$).

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, la droite d'équation y = 2 est asymptote horizontale à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

SEQUENCE 21

Quelques généralités sur les fonctions : Asymptotes obliques

Objectif

Déterminer les asymptotes obliques à la courbe représentative d'une fonction

Asymptote oblique

la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$ (respectivement en $+\infty$) si, et seulement si,

$\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$ *(respectivement* $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$).

Exemple : Démontrons que la représentation graphique (Cf) de la fonction rationnelle f : $x \longmapsto \frac{x^2-4x+5}{x-3}$ d'ensemble de définition $\mathbb{R} - \{3\}$, admet pour asymptote oblique la droite (D) d'équation $y = x - 1$.

En effet : $f(x) - (x-1) = \frac{x^2-4x+5}{x-3} - (x-1) = \frac{2}{x-3}$

Or $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-3} = 0$; donc la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est bien une asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$.

Remarque

Toute fonction f définie par $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ si, et seulement si, $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$ ou $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

SEQUENCE 22

Plan d'étude d'une fonction

Objectif

Faire un plan d'étude de fonctions

Plan d'étude de fonctions

A titre indicatif, nous proposons le plan suivant d'étude d'une fonction f :

1- ensemble de définition Df ;
2- limites aux bornes de Df ;
3- dérivée $f'(x)$;
4- signes de $f'(x)$ et sens de variation de f;
5- tableau de variation de f ;
6- droites et points remarquables (asymptotes, tangentes, points d'intersection de (Cf) avec les axes de coordonnées) ;
7- construction de (Cf) dans un repère (de préférence orthogonal).

SEQUENCE 23

Exemples d'études de fonctions polynômes

Objectif

Etudier les fonctions polynômes

Exemple

f est une fonction polynôme définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$.

Etudions la fonction f et construisons sa courbe dans un plan muni d'un repère orthogonal

(O, I, J)

– Ensemble de définition de f.

Etant une fonction polynôme, f est définie sur $\mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$.

– Limites aux bornes de D_f.

$D_f =]-\infty;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

– Dérivée de f

f est dérivable sur son ensemble de définition comme toute fonction polynôme.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

– Signes de f' et sens de variation de f

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1\ ou\ x = -1$.

Pour tout $x \in]-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty[$, $f'(x) \geq 0$; donc f est croissante sur $]-\infty;\ -1]\ et\ sur\ [1;\ +\infty[$.

Pour tout $x \in [-1; 1]$, $f'(x) \leq 0$; donc f est décroissante sur $[-1; 1]$.

– Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

– Droites et points remarquables

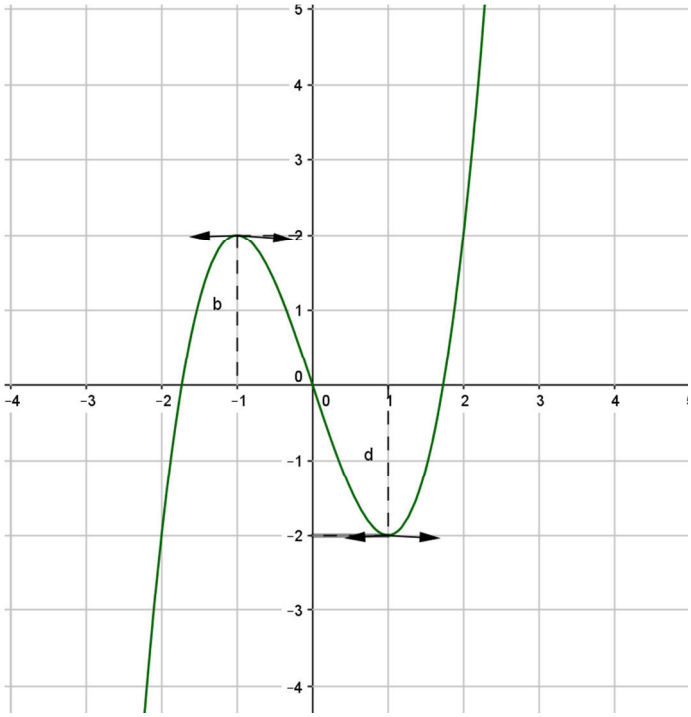
2 est un maximum relatif de f en -1 et -2 est un minimum relatif de f en 1, donc (C_f) a deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 1.

Intersection de (C_f) avec axe des abscisses : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\sqrt{3}\ ou\ x = \sqrt{3}$.

Donc $(C_f) \cap (\mathrm{OI}) = \{O(0;0), A(-\sqrt{3};0), B(\sqrt{3};0)\}$.

Intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 0$; donc $(C_f) \cap (\mathrm{OJ}) = \{O(0;0)\}$

– Construction de (C_f).



SEQUENCE 24

Exemples d'études de fonctions rationnelles

Objectif

Etudier les fonctions rationnelles

Exemple

f est une fonction polynôme définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

Etudions la fonction f et construisons sa courbe (C_f) dans un plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

– Ensemble de définition de f.

$f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$; $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

– Limites aux bornes de D_f.

$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2;$ *de même* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2.$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{5}{0^-} = -\infty;$ *de même* $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty.$

– Dérivée f' de f.

f étant une fonction rationnelle, est dérivable sur son ensemble de définition D_f.

Pour tout x de D_f, $f'(x) = \frac{(2)(x-1)-(2x+3)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$.

– Signe de $f'(x)$ et sens de variation de f.

$f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2}$.

Pour tout x de Df, $f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante

sur $]-\infty; 1[$ *et sur* $]1; +\infty[$.

– Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2

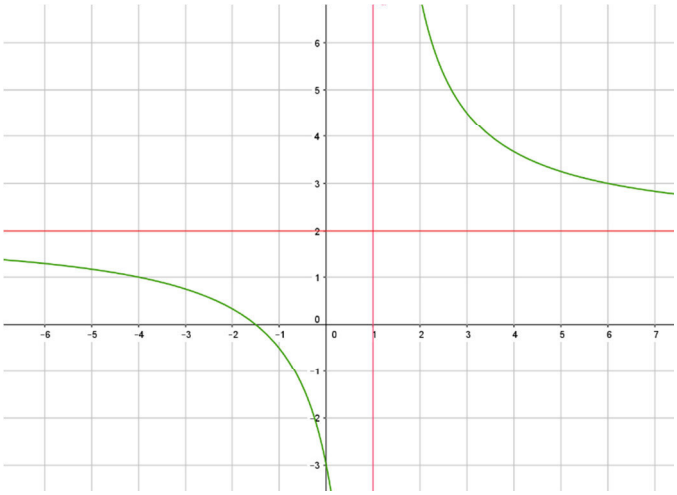
– Droites et points remarquables.

La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C_f) et celle d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

$f(0) = -3$; donc le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées est A(0 ;-3).

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$; donc le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses est B $(\frac{-3}{2}; 0)$.

Construction de (C_f) :



Leçon : Suites numériques

SEQUENCE 25

Définition d'une suite numérique

Objectif

Définir une suite numérique.

Définition

On appelle suite numérique, toute fonction $\begin{array}{l} u: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad n \longmapsto u(n) \end{array}$

On la note généralement(u_n), $n \in \mathbb{N}$. $u(n)$ sera noté u_n et est appelé terme général de la suite (u_n).

Lorsque n varie, les nombres réels u_0; u_1 ; u_2; … ;u_n sont appelés termes de cette suite.

- Une suite peut être définie par une ***formule explicite*** de type fonctionnel qui permet de calculer les termes de la suite u_n en fonction de n telle que :

  $\begin{array}{l} u: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad n \longrightarrow u_n = 3n + 2 \end{array}$

- Une suite peut-être définie par son ***premier terme*** et une ***formule de récurrence*** telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Cette formule permet de calculer un terme en fonction du précèdent.

SEQUENCE 26

Sens de variation d'une suite numérique

Objectif

Etudier le sens de variation d'une suite numérique.

Propriétés

Soit$(u_n), n \in \mathbb{N}$, une suite numérique. $si\ \forall n \in N$:

- $u_n \leq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est croissante ;
- $u_n \geq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est décroissante ;
- $u_n = u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est constante.

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique, l'une de méthodes suivantes est admise.

- Comparer $\boldsymbol{u_n}$ **et** $\boldsymbol{u_{n+1}}$, ceci revient à étudier le signe de : $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$
- Comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ $\boldsymbol{et\ 1}$ pour une suite à terme positif.

Exemples

1) On donne la suite (u_n) définie par : $u_n = 2n - 3$

Etudions le sens de variation de (u_n).

On a : $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n} = [2(n+1) - 3\,] - (2n - 3\,)$

$= 2n + 2 - 3 - 2n + 3$

$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n} = 2 > 0$

$\boldsymbol{u_{n+1} > u_n}$, donc (u_n)

est une suite croissante car, pour tout n, on a : $u_n \geq u_{n+1}$.

2) On donne la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{2n}$

Etudions le sens de variation de (u_n).

(u_n) est une suite à terme positif, donc comparons $\frac{\boldsymbol{u_{n+1}}}{\boldsymbol{u_n}}$ $\boldsymbol{et\ 1}$:

On a : $\frac{\boldsymbol{u_{n+1}}}{\boldsymbol{u_n}} = \frac{\frac{1}{2(n+1)}}{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2n+2} \times 2n = \frac{2n+2-2}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} < 1$

$\frac{\boldsymbol{u_{n+1}}}{\boldsymbol{u_n}} < \boldsymbol{1}$**, c'est-à-dire** $\boldsymbol{u_{n+1} < u_n}$donc (u_n) est une suite décroissante.

3) On donne la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \end{cases}$.

Etudions le sens de variation de (v_n).

On a : $\boldsymbol{v_{n+1} - v_n} = (v_n - 5) - \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{-5 < 0}$

$\boldsymbol{v_{n+1} < v_n}$, donc (v_n) est une suite décroissante.

Remarque

- Une suite (u_n) est dite **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante ;
- Une suite (u_n) est dite **stationnaire**, si elle est constante à un certain rang.

SEQUENCE 27

Suites arithmétiques

Objectif

Définir et étudier une suite arithmétique.

Définition

Une suite (u_n) est dite ***arithmétique*** lorsqu'il existe un nombre réel $\boldsymbol{r}$ appelé ***raison*** tel que pour tout entier naturel n ; on a : $\boxed{\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}}$ (Formule de récurrence)

D'une façon générale, pour tous entiers naturels n *et* p, on a :

$\boxed{\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}}$ (Formule explicite)

Si $p = 0$, alors $u_n = u_0 + nr$

Si $p = 1$, alors $u_n = u_1 + (n-1)r$

Si $p = 2$, alors $u_n = u_2 + (n-2)r$

Remarque :

Si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite tels que $b = \frac{a+c}{2}$, alors b est la moyenne arithmétique de a et c.

NB : Pour démontrer qu'une suite est ***arithmétique***, il suffit de prouver que la différence entre deux termes consécutifs est constante, i.e. : $u_{n+1} - u_n = r, n \in \mathbb{N}$.

Exemples

1) Considérons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$.

On sait que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = \frac{1}{2}$ donc on peut exprimer le terme général u_n de la suite en fonction de n.

On obtient : $u_n = u_0 + nr = 1 + \frac{1}{2}n$.

2) Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = 2$ et telle que $u_5 = 9$.

Déterminons la formule explicite de (v_n).

On sait que $\forall p \leq n,\ u_n = u_p + (n-p)r$.

Ici on a $p = 5$ et $u_5 = 9$ et $r = 2$ donc :

$$\begin{aligned} u_n &= u_p + (n-p)r \\ &= u_5 + (n-5) \times 2 \\ &= 9 + (n-5) \times 2 \\ u_n &= 2n - 1. \end{aligned}$$

SEQUENCE 28

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Objectif

Déterminer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

$$\boxed{Somme\ S\ des\ termes\ consécutifs = nombre\ de\ termes \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2}}$$

Autrement dit, $(u_n)_n$, est une suite arithmétique, on a :

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\boxed{S_n = \boldsymbol{u_0 + u_1 + u_2\ \ldots + u_{n-1} = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}}}$

(2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\boxed{S_n = \boldsymbol{u_0 + u_1 + u_2\ \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}}}$

(3) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{S_n = \boldsymbol{u_1 + u_2 + \ \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}}}$

En particulier : $\boldsymbol{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(1+n)}{2}}$.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 1$.

Calculons la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

On sait que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

La suite u_n est arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 1$ donc de façon explicite, $u_n = 1 + n$.

$u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = 3,\ u_3 = 4,\ \dots, u_{n-1} = n$ et $u_n = n + 1$.

Donc $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n + 1)$.

$S_n = (n + 1) \times \frac{u_0+u_n}{2}$ car S_n a $(n + 1)$ termes, or $u_0 = 1$ et $u_n = n + 1$

donc $\boxed{S_n = (n + 1) \times \frac{1+(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2).}{2}}$

SEQUENCE 29

Suites géométriques

Objectif

Définir et d'étudier une suite géométrique.

Définition

Une suite (u_n) est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel$\boldsymbol{q}$ appelé raison tel que pour tout nombre entier naturel n; On a : $\boxed{\boldsymbol{u_{n+1} = qu_n}}$ (I) Formule de récurrence

D'une façon générale, pour tous entiers naturels n *et* p, on a : $\boxed{\boldsymbol{u_n = u_p q^{n-p}}}$ **(II)** Formule explicite

Si $p = 0$, alors : $u_n = u_0 q^n$

Si $p = 1$, alors : $u_n = u_1 q^{n-1}$

Si $p = 2$, alors : $u_n = u_2 q^{n-2}$

Remarque

Si a et b sont deux termes consécutifs d'une suite géométrique, alors b= aq, où q est la raison de cette suite.

NB : Pour démontrer qu'une suite est ***géométrique***, il suffit de prouver que le quotient de deux termes consécutifs est constant, i.e. : $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n} = q}$, $(\boldsymbol{q} \in \mathbb{N})$

Exemple

Soit (u_n) une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_{n.} \end{cases}$

Comme $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$, on a donc $q = 2$ puisque $u_{n+1} = qu_{n.}$

(u_n) est donc une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q = 2$.

SEQUENCE 30

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Objectif

Déterminer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

$(u_n)_n$, est une suite géométrique de raison q.

(1) Si $q \neq 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{\boldsymbol{u_0 + u_1 + u_2 \ \ldots + u_{n-1} = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}}}$

(2) Si $q \neq 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{\boldsymbol{u_0 + u_1 + u_2 + \ \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}}$

(3) Si $q \neq 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\boxed{\boldsymbol{u_1 + u_2 + \ \ldots + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}}}$

Exemples

1) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n.} \end{cases}$.

Déterminons la formule explicite de (u_n).

(u_n) est définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n.}$ et par la donnée $u_0 = 1$ donc d'après la définition, (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{2}{3}$.

Donc on peut exprimer (u_n) de façon explicite par : $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2) On donne une suite (v_n) géométrique de raison $q = 3$ et telle que $v_4 = 81$.

Exprimons le terme général v_n par une formule explicite.

v_n est déterminée par sa raison $q = 3$ et un terme de rang 4.

On applique donc la formule (II).

On a : $v_n = v_p \times q^{n-p}$ pour tout $p \leq n$.

Ainsi : $v_n = v_4 \times q^{n-4}$

$= 81 \times 3^{n-4}$

$= 81 \times 3^n . 3^{-4}$

$= \frac{81}{3^4} \times 3^n$

Donc $v_n = 3^n$.

Exercice

On considère les suites suivantes :

a) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 0{,}5u_n \end{cases}$. b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$.

c) $u_n = -\frac{2}{3}n + 5$ d) $u_n = -3^n$.

1) Pour chacune de ces suites, déterminer la nature de la suite et préciser ses éléments caractéristiques.

2) Etudier le sens de variation de chacune de ces suites.

SEQUENCE 31

Limite d'une suite numérique

Objectif

Déterminer la limite d'une suite numérique.

Exemples de calcul de limites

Déterminons la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

a) $u_n = \frac{n+2}{n}$.

On a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n}\right) = 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) converge vers 1.

b) $v_n = \frac{n^2+2n+3}{n-2}$.

On a : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2n+3}{n-2}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Il s'ensuit que (v_n) est une suite divergente.

Remarque

- Une suite (u_n) est dite ***convergente*** lorsqu'elle admet une limite **finie** $(\boldsymbol{l})$ lorsque $n \to +\infty$
- Une suite (u_n) est dite ***divergente*** lorsqu'elle admet une limite **infinie** (∞) lorsque $n \to +\infty$ ou lorsqu'elle n'admet pas une limite.

SEQUENCE 32

Nombres rationnels

Objectif

Définir un nombre rationnel

Définition

Un nombre est dit rationnel s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ *d'un quotient d'entiers.*

L'ensembles des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$ *est un ensemble infini.*

L'écriture $\frac{a}{b}$, *où* a *est un entier et* b *un entier non nul, est appelée écriture fractionnaire du nombre rationnel et elle n'est pas unique.*

Exemple

$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \cdots$

Les nombres entiers sont aussi des nombres rationnels car, $\forall n \in \mathbb{Z}, n = \frac{n}{1}$.

Les nombres décimaux sont aussi des nombres rationnels car ce sont les quotients d'un nombre entier par un nombre entier.

Exemple

$7{,}28 = \frac{728}{100}$.

Cependant, il est important de savoir que tous les rationnels ne sont pas décimaux.

Exemple

$\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{7}$ sont des rationnels qui ne sont pas des décimaux.

On note donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Pour tout nombre rationnel, il existe une fraction plus simple que toutes les autres écrite avec les entiers les plus proches de zéro, on l'appelle la fraction irréductible.

Exemple

Considérons les fractions suivantes : $\frac{8}{12}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{40}{60}$; $\frac{4}{6}$.

Parmi ces différentes fractions, la fraction $\frac{2}{3}$ est une fraction irréductible.

Pour obtenir une fraction irréductible, on procède par une opération appelée simplification.

Exemple

$\frac{8}{12} = \frac{8\times4}{3\times4} = \frac{2}{3}$ ou $\frac{40}{60} = \frac{2\times20}{3\times20} = \frac{2}{3}$.

On dit alors qu'on a simplifié la fraction $\frac{8}{12}$ par 4 et $\frac{40}{60}$ par 20.

SEQUENCE 33

Développement décimal propre d'un nombre rationnel

Objectif

Déterminer le développement décimal propre d'un nombre rationnel

Définition

Soit x un nombre rationnel.

On appelle développement décimal propre de x, l'écriture décimale du rationnel x tel que :

$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \,.\, 10^k$ *où les a_k sont des nombres entiers compris entre 0 et 9.*

Cette écriture se traduit sous forme décimale par la notation : $x = a_0, a_1a_2a_3a_4 \ldots$

Exemple

Considérons le nombre rationnel $x = \frac{37}{8}$.

Déterminons le développement décimal propre de x.

On sait que $\frac{37}{8} = 4{,}625$ donc $x = 4 + 6.10^{-1} + 2.10^{-2} + 5.10^{-3}$ qu'on peut écrire sous la forme : $x = 4 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$

Le développement décimal propre de x est donc :

$x = 4 + 6.10^{-1} + 2.10^{-2} + 5.10^{-3} = 4{,}625$.

Remarque : Lorsque l'écriture décimale de x est infinie, on dit que le développement décimal propre de x est illimité.

Exemple : Le nombre rationnel $\frac{1}{7}$ a un développement décimal propre illimité puisque l'écriture décimale de $\frac{1}{7}$ est infinie. Dans ce cas, on écrit le nombre avec des points de suspension : $\frac{1}{7} = 142857142857 \ldots$

SEQUENCE 34

Développement décimal périodique d'un nombre rationnel

Objectif

Déterminer le développement décimal périodique d'un nombre rationnel

Définition

Soit d *un nombre rationnel donné.*

Si l'écriture décimale de d *est infinie et que* $d = c_0, c_1c_2 \dots c_k c_1 c_2 \dots c_k \dots$ *alors* d *a un développement décimal illimité périodique de période* $c_1 \dots c_k$.

Dans ce cas, on écrit simplement : $d = c_0, c_1c_2 \dots c_k$

Exemple

Le nombre rationnel $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857 \dots$ est l'expression d'un développement décimal illimité périodique et la période est 142857 qui est se repète indéfiniment.

Dans ce cas, on écrit : $\frac{1}{7} = 0{,}\underline{142857}\dots$

Théorème

Les nombres rationnels sont des nombres dont l'écriture décimale peut être indéfinie, mais dont les décimales, à partir d'un certain rang, ont une période.

En d'autres termes :

Lorsque le développement décimal d'un nombre est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) alors ce nombre est rationnel.

Cette propriété permet de reconnaître un nombre rationnel à partir de son développement décimal.

Exercice

On considère les nombres suivants :

A= $\frac{19}{13}$; B= $\frac{542}{39}$; C= $\frac{4256}{12}$.

a) Trouver le développement décimal propre de chacun de ces nombres.

b) Les quels de ces nombres sont des rationnels non décimaux ?

SEQUENCE 35

Ecritures décimales et fractions

Objectif

Déterminer l'écriture fractionnaire d'un nombre rationnel ayant une écriture décimale illimitée périodique

Propriété

Tout nombre rationnel ayant une écriture décimale illimitée périodique peut s'écrire sous forme de fraction à termes entiers.

Voici quelques exemples pour expliquer la procédure à appliquer pour déterminer une fraction à partir de son développement décimal illimité périodique.

Exemple 1

Cas du développement périodique d'un nombre plus petit que 1.

Soit $x = 0{,}175175175175\ldots$

Ce nombre x a un développement illimité périodique, donc on peut l'écrire plus simplement : $x = 0,\underline{175}\ldots$

Exemple 2

Cas où le développement décimal périodique admet une partie entière non nulle.

Soit $x = 5,\underline{423.}$

Pour un tel cas, on pose : $x = 5,\underline{423}\ldots = 5 + 0,\underline{423}\ldots$

- On traduit le second terme de la somme par une fraction en utilisant la procédure détaillée au cas de l'exemple 1.

  On a donc : $y = 5,\underline{423}\ldots \Leftrightarrow 1000y = 5423,\underline{423}\ldots$

  $$\Leftrightarrow 1000y - 423 = y$$

  $$\Leftrightarrow y = \frac{423}{999} = \frac{141}{333}.$$

- On obtient donc :

  $x = 5,\underline{423}\ldots = 5 + y$

  $$= 5 + \frac{141}{333} = \frac{1665+141}{333} = \frac{1706}{333}$$

  Donc : $x = 5,\underline{423}\ldots = \frac{5118}{999} = \frac{1706}{333}$.

Exemple 3

Le développement décimal illimité périodique est tel que la période ne commence pas immédiatement après le virgule.

Soit : $x = 0,12\underline{53}\ldots$

On pose : $x = 0,12 + 0,00\underline{53}... = 0,12 + \frac{0,53...}{100}$ or si on pose

$y = 0,\underline{53}...$, on a: $100y = 53,\underline{53}...$d'où $y = \frac{53}{99}$

donc $x = 0,12 + \frac{y}{100} = 0,12 + \frac{\frac{53}{99}}{100} = \frac{12}{100} + \frac{53}{9900}$

donc $x = \frac{1188+53}{9900} = \frac{1241}{9900}$.

SEQUENCE 36

Divisibilité des nombres entiers et critère de divisibilité par 2 ou par 5

Objectif

Définir deux nombres divisibles et identifier des nombres divisibles par 2 ou par 5

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs.

On dit que a divise b (ou que b est divisible par a ou que b est un multiple de a) s'il existe un entier k tel que $b = ak$.

On note $a|b$.

Exemples

1) $2|6$ car $6 = 3 \times 2$.
2) $1|n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ car $n = 1 \times n$.
3) $n|0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ car $0 = 0 \times n$.

Divisibilité par 2 ou par 5

Propriétés

1) *Un nombre entier est divisible par 2 si et seulement si le chiffre de son unité est 0, 2, 4, 6 ou 8.*
2) *Un nombre entier est divisible par 5 si et seulement si le chiffre de son unité est 0 ou 5.*

Exemples

1) Les nombres 3248 et 270 sont divisibles par 2 car ils ont respectivement pour unité 8 et 0.
2) Les nombres 270 et 935 sont divisibles par 5 les chiffres des unités sont respectivement 0 et 5.

SEQUENCE 37

Critère de divisibilité par 3, par 9, par 4 ou par 11

Objectif

Identifier des nombres divisibles par 3, par 9, par 4 ou par 11

Divisibilité par 3 ou 9

Propriété

Un nombre entier est divisible par 3 ou par 9 si et seulement si la somme des chiffres constituant le nombre entier en question est divisible par 3 ou par 9.

Exemple

1746 est divisible par 3 car 1+7+4+6 =18 et 18 est divisible par 3.

Il est aussi divisible par 9 car 18 est divisible par 9.

Divisibilité par 4

Propriété

Un nombre entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par le chiffre des dizaines et celui des unités est lui-même divisible par 4.

Exemple

1724 est divisible par 4 car le nombre 24 est divisible par 4. En effet, $1724 = 4 \times 431$.

Divisibilité par 11

Propriété

Un nombre entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée des chiffres est divisible par 11.

Exemple

Soit A le nombre : A= 2579676.

Calculons la somme alternée de ses chiffres. On a :$2 - 5 + 7 - 9 + 6 - 7 + 6 = 21 - 21 = 0$. Or 0 est divisible par 11 puisque $0 = 0 \times 11$ donc le nombre A= 2579676 est divisible par 11.

En effet, on remarque que :$2579676 = 11 \times 234516$.

SEQUENCE 37

Diviseurs d'un nombre entier

Objectif

Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

Propriété 1

1) *Tout diviseur positif d d'un nombre naturel non nul n vérifie :* $1 \leq d \leq n$.
2) *Tout naturel non nul a un nombre fini de diviseurs.*

Propriété 2

1) *1 divise a pour tout entier relatif a.*
2) *a divise a pour tout entier relatif a.*
3) *Si a divise b et si b divise c alors a divise c.*
4) *Si a divise b et si m est un entier, alors a divise mb.*

Exemples

1) Considérons le nombre 48.

Déterminons tous les diviseurs positifs de 48 que nous notérons $\mathcal{D}(48)$.

- 48 est divisible par 2 car le chiffre des unités 8 est divisible par 2.
- 48 est divisible par 3 car 4+8 = 12 et 12 est divisible par 3.
- 48 est divisible par 6 car il est divisible par 2 et par 3.
- 48 est divisible par 4 car 48 = 4× 12.
- 48 est divisible par 8 car il est divisible par 2 et par 4.
- 48 est divisible par 12 (voir divisible par 4).
- 48 est divisible par 16 car il est divisible par 8 et par 2.
- 48 est divisible par 24 car il est divisible par 8 et 3.
- 48 est divisible par 48.
- 48 est divisible par 1.

Donc $\mathcal{D}(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$.

2) Soit le nombre A= $\frac{594}{528}$.

Simplifions A en utilisant les critères de divisibilité.

- Le numérateur 594 est divisible par 2 (car le chiffre des unités est 4) , par 3 et par 9(car 5 +9 + 4=18 et 18 est divisible par 3 et 9), par 11(car $5 - 9 + 4 = 0$ et 0 divisble par 11), etc.

– Le dénominateur 528 est divisible par 11(car $5 - 2 + 8 = 11$ et 11 est divisible par 11) et par 48 car 528= 48×11.

On a donc A= $\frac{594}{528} = \frac{54\times11}{48\times11} = \frac{54}{48} = \frac{6\times9}{6\times8} = \frac{9}{8}$.

Donc A= $\frac{9}{8}$.

SEQUENCE 38

Décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs

Objectif

Définir un nombre premier et décomposer un nombre entier naturel en un produit de facteurs premiers

Nombres premiers

Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples

1) 49 n'est pas un nombre premier car, outre 1 et lui-même, il a d'autres diviseurs comme 7.
2) 29 est un nombre premier car ses seule diviseurs sont 1 et 29.
3) 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers

Théorème

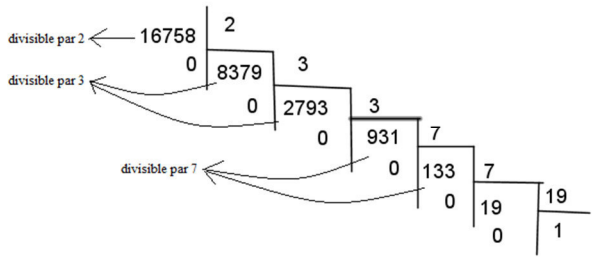
Tout nombre entier $n \geq 2$ *peut se décomposer de façon unique en produit de facteurs premiers.*

$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n}$ où p_i est premier et $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Exemple

Décomposons 16758 en produit de facteurs premiers.

Pour ce faire, le procédé consiste à déterminer les diviseurs de ce nombre qui sont premiers en effectuant des divisions successives, tout en appliquant les critères de divisibilité vus plus haut.



On a donc : $16758 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 19$ donc $16758 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 19$.

SEQUENCE 39

Système de numération

Objectif

Représenter un nombre dans un système de numération

Représentation d'un nombre

Les nombres que nous utilisons dans la vie courante sont écrits dans le système décimal constitué de 10 chiffres dont la position indique le nombre d'unités de la puissance de 10 correspondantes.

Exemple

$3404 = 3.10^3 + 4.10^2 + 0.10^1 + 4.10^0$.

De même, $29275 = 2.10^4 + 9.10^3 + 2.10^2 + 7.10^1 + 5.10^0$.

De manière générale, un système de numération comprend un alphabet et des règles d'écriture des nombres permettant de les représenter.

Dans le système décimal que nous employons régulièrement, l'alphabet est constitué des chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ,9. On dit que la base du système est 10.

Définition

Dans un système de position en base b, *on note un nombre N par* $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^b$.

Ce nombre s'écrit dans le système décimal de position par :

$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^b = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} \dots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$

où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ *des chiffres strictement inférieurs à* b.

Lorsqu'on écrit un nombre en base b, *ce nombre ne peut comporter que* b *chiffres.*

Exemple

Dans la base 2, il n'y a que 2 chiffres: 0 et 1.

Ainsi: $\overline{110111}^2 = 55$.

Dans la base 5, l'alphabet comprend 5 chiffres qui sont: 0, 1, 2, 3 et 4.

$\overline{231}^5 = 2 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 1 \times 5^0.$

$= 50 + 15 + 1 = 66\,.$

Donc : $\overline{231}^5 = 66.$

Les systèmes de numération les plus utilisés sont: le système décimal (à base 10), le système binaire (à base 2), le système octal (à base 8), le système hexadécimal (à base 16).

Dans le système octal, l'alphabet comprend 8 chiffres ou symboles qui sont: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Dans le système hexadécimal, il y a 16 symboles qui comprennent les 10 chiffres de 0 à 9 puis les lettres {A, B, C, D, E, F}.

Exemple

$\overline{D62C}^{16} = 13 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 2 \times 16^1 + 12 \times 16^0.$

$= 54828\,.$

Le système hexadécimal est très utilisé dans les systèmes ordinaires des micro-ordinateurs et dans le domaine de transmission des données.

SEQUENCE 40

Conversion de la base 10 vers la base *b*

Objectif

Convertir un nombre écrit en base 10 en une autre base b

Propriété

Pour déterminer l'écriture d'un nombre dans le système décimal dans un système à base b, on effectue des divisions successives de ce nombre par b. On obtient le nombre en base b, en prenant le dernier quotient et en remontant tous les reste de ces divisions.

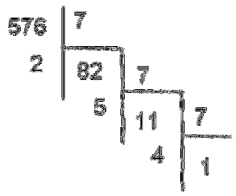
Exemples

1) Donnons l'écriture de 576 en base 7.

La base 7 comprend 7 symboles qu'on peut utiliser : 0, 1, 2, 3, 4,5 ,6.

Divisons successivement 576 par 7.

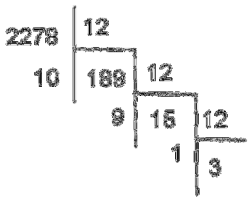
On a :



On obtient donc : 576= $\overline{1452}^{7}$.

2) Donnons l'écriture du nombre 2278 en base 12 puis en base 16.

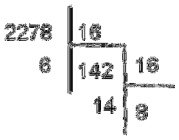
2278 en base 12



On obtient donc : 2278= $\overline{139A}^{12}$puisque l'alphabet de symboles utilisables en base 12 est : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ,9, A, B}.

2278 en base 16

Effectuons les divisions successives :



On a donc : 2278= $\overline{8D6}^{16}$

Exercices d'entrainement de la compétence de base 1 du premier trimestre

Exercice 1

Après avoir déterminé le domaine de définition des fonctions suivantes, calculer leurs limites aux bornes de Df :

a) $f(x)=3x^4-2x^3+x+5$; b)$f(x)=|2x^2-1|-2x-1$; c) $(x)=\frac{2x-5}{x+3}$; d) $f(x)=\frac{5x-6}{x^2+3x-1}$

Exercice 2

Calculer les limites des fonctions suivantes :

a) $lim_{x\to\pm\infty}(-2x^3+3x^2+x-7)$;b) $lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2+2x+1}{x+5}$;c)$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+x+1}{x^2+x-6}$

Exercice 3

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+1}$

1) étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f(x) en -1 et 2

2) étudier puis construire la courbe C_f.

Exercice 4

On considère la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

1) calculer la limites aux bornes de $\mathbb{D}_f$

2) la fonction f(x) est-elle continue en 1 ?

Exercice 5

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leurs domaines des définitions et déterminer leurs dérivées

a) $f(x) = x^2|x|$;b) $f(x) = (x-2)\sqrt{2-x}$; c) $f(x) = \sqrt{2x+5}$

Exercice 6

Déterminer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)}$; b) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)^3}$; c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; d) $f(x) = (2x^3 - 3x + 1)^4$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2-5x+15}{x-2}$

1) Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x)$?

2) Calculer les limites aux bornes de D_f

3) Vérifier que pour tout x de D_f ,$f(x) = x - 3 + \frac{9}{x-2}$

4) En déduire que la droite (D) d'équation : $y = x - 3$ est une asymptote oblique à C_f

5) Démontrer que la courbe C_f admet le point $A(2; -1)$ comme centre de symétrie

6) a-Vérifier que pour tout x deD_f ,$f'(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$

b- En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation

c- Construire la courbe C_f et la droite (D).

Exercice 8

Soit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x - 3 - \frac{2}{x-2}.$$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Etudier la variation de f. calculer $f(1)$ et $f(4)$.
3) Quelle est la limite de $f(x) - (x-3)$ quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers $+\infty$?

En déduire que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x - 3$ pour asymptote.

4) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes de coordonnées ?

Déterminer une équation de la tangente à (C_f) en chacun de ces points.

5) Construire(C_f) dans un plan rapporté à un repère (O, I, J).

Exercice 9

Compléter :

1) Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison r = -8 est :……..
2) Le terme général d'une suite géométrique de premier terme $V_1 = 4$ et de raison q = -3 est :……..
3) La suite (U_n) définit par $U_n = 7n - 5$ est une suite ……de premier terme …et de raison ……..
4) La suite (V_n) définit par $V_n = -3^n$ est une suite ……de premier terme ……..et de raison ……..
5) 1+2+3+ ……..+ n =……
6) 1+4+8+……..+2^n =……

Exercice 10

Q.C.M

1) Le dix-septième terme de la suite (U_n) commençant parU_0 est noté :

a) U_{16} ; b) U_{17} ; c) U_{18}

2) La suite de terme général $U_n = n^2 + n - 1$ est une suite :

a) géométrique ; b) arithmétique ; c) ni géométrique ni arithmétique

3) La suite (U_n) est arithmétique. de plus, $U_1=7$; $U_4=19$ et U_n est égal à :

a) 7+4n ; b) 19+3n ; c) 4n+3

Exercice 11

La suite (U_n) est définie par : U_0= -3 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + \frac{3}{2}$

1) Calculer ses cinq premiers termes
2) Exprimer (U_n) en fonction de n
3) Représenter graphiquement la suite (U_n)
4) En déduire la variation de cette suite
5) Déterminer la convergence de la suite (U_n)
6) Calculer la somme $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$

Exercice 12

On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ avec $n \geq 1$.

a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 13

(u_n) est la suite géométrique de terme initial -2 et de raison $\frac{2}{3}$.

1) Exprimer u_n en fonction de n
2) Déterminer la limite de u_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$
3) On considère la somme : $S_n = u_0 + \cdots + u_n$.
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de S_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exercices d'entrainement de la compétence de base 2 du premier trimestre

Exercice 1

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants :

a) 658 ;

b) 420 ;

c) 8820 ;

d) 10200.

Exercice 2

Déterminer l'écriture en base 5 de : 221 et 1000.

Déterminer ensuite leur écriture en base 16.

Exercice 3

Représenter le nombre 21416 dans le système de numération Egyptienne

Exercice 4

Dans le système binaire, un nombre x s'écrit$\overline{101101}$. Ecrire le nombre x dans le système décimal

Exercice 5

a) Compléter l'égalité : 3 h 45 min 15 s =……s

b) Compléter l'égalité : 19820 s = ……..h…..min……s

Exercice 6

On considère la fraction suivante : $\frac{5148}{1386}$

a) Déterminer le PGCD des nombres 5148 et 1386

b) Rendre irréductible la fraction : $\frac{5148}{1386}$

Exercice 7

Dans le système décimal, un nombre entier naturel N s'écrit x43y.

Déterminer les couples (x ; y) tels que N soit divisible par 2 et par 9.

Exercice 8

Démontrer par récurrence que : pour tout entier naturel n :

a) $1 + 2 + 3 + \cdots . + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $9\ divise\ 10^n - 1$

Exercice 9

Mandelta a constaté que, pour tout nombre à trois chiffres qui s'écrit abc en base 10, si $b = a + c$ alors le nombre est divisible par 11. A-t-elle raison ? Justifier sa réponse.

Si abc est divisible par 11, a-t-on $b = a + c$?

EVALUATION

Exercice 1

Un nombre N a pour écriture décimale 72a83b.

a) N est divisible par 6 et 45. Quel est le chiffre b?

b) Déterminer N.

Exercice 2

La suite (V_n) est définie par : $\begin{cases} V_0 = -4 \\ V_{n+1} = \frac{3}{2}V_n \end{cases} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Calculer ses cinq premiers termes
2) Exprimer (V_n) en fonction de n
3) Etudier la variation de cette suite
4) Calculer la limite de V_n
5) Calculer la somme $S_n = \sum_{i=0}^{10} V_i$
6) Construire cette suite

Exercice 3

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+2}$ et (C_f) sa représentation graphique.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2) a) Etudier les variations de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a)Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C_f) .

b) Etudier la position relative de (C_f) et (D).

c) Indiquer une équation de l'asymptote verticale (Δ).

4) a) Démontrer que le point Ω $(-2\,;-1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

b) Construire (C_f) .

Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice :

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

Conseils et orientation de l'enseignant :

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

Evaluation de la compétence :

DEUXIEME TRIMESTRE

Programmation horaire du 2e trimestre

2e Trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombres d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
Du 02 Janvier au 31 Mars 13 semaines	CB1	3	Fonctions logarithmes	6H	2H	2H	10H	39H
		4	Fonctions exponentielles	6H	2H	2H	10H	
	CB2	2	Equations – Inéquations - Systèmes	6H	2H	2H	10H	
		3	Dénombrement	6H	2H	1H	9H	

FICHE DE PROGRESSION

Trimestre	Période	Contenus	
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité
2	2 Janvier au 28 Février	- Fonction logarithme - Fonction exponentielle	- Equations – Inéquations – Systèmes
	1er Mars au 31Mars		- Equations – Inéquations – Systèmes(Suite et fin) - Dénombrements

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Terminale A

Deuxième trimestre

Compétence de Base 1

Terminale D–CB1 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les fonctions logarithme et exponentielle.		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
– Fonction logarithme	– Définir la fonction logarithme. – Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme. – Utiliser les limites de référence. – Construire le tableau de variation de la fonction logarithme. – Représenter graphiquement la fonction logarithme avec les tangentes aux points d'abscisses 1 et e. – Calculer la dérivée des fonctions du type lnou. – Etudier, sur des exemples simples, les fonctions faisant intervenir la fonction logarithme et les représenter graphiquement. – Définir une fonction exponentielle. – Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.	– Définition de la fonction logarithme. – Utilisation des propriétés algébriques de la fonction logarithme. – Utilisation des limites de référence. – Construction du tableau de variation de la fonction logarithme. – Représentation graphique de la fonction logarithme avec les tangentes aux points d'abscisses 1 et e. – Calcul de la dérivée des fonctions du type lnou. – Etude, sur des exemples simples, des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme et construction de leurs courbes représentatives. – Définition d'une fonction exponentielle. – Utilisation des propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

	– Fonction exponentielle	– Utiliser les limites de référence. – Construire le tableau de variation de la fonction exponentielle. – Représenter graphiquement la fonction exponentielle avec les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. – Calculer la dérivée des fonctions du type expou. – Etudier, sur des exemples simples, les fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle et les représenter graphiquement.	– Utilisation des limites de référence. – Construction du tableau de variation de la fonction exponentielle. – Représentation graphique de la fonction exponentielle en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. – Calcul de la dérivée des fonctions du type expou. – Etude, sur des exemples simples, des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle et construction de leurs courbes représentatives.

Terminale D –CB2 :L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les équations – inéquations – systèmes et le dénombrement.			
	Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
	Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
	- Equations – Inéquations et Systèmes ➢ Equations	- Résoudre les équations du second degré. - Résoudre des équations de degré supérieur ou égal à 3, lorsqu'on connaît des solutions évidentes. - Résoudre des équations comportant logarithme ou exponentielle.	- Résolution des équations du second degré. - Résolution des équations de degré supérieur ou égal à 3, lorsqu'on connaît des solutions évidentes. - Résolution des équations comportant logarithme ou exponentielle.

	➢ Inéquations ➢ Systèmes ➢ dénombrement	- Résoudre des inéquations de degré supérieur ou égal à 3 lorsqu'on connaît certaines racines évidentes du polynôme associé. - Résoudre les inéquations comportant logarithme et exponentielle. - Résoudre des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ - Résoudre des problèmes conduisant aux équations ou aux systèmes. - Dénombrer un ensemble fini. - Utiliser la formule du binôme de Newton	- Résolution des inéquations de degré supérieur ou égal à 3 lorsqu'on connaît certaines racines évidentes du polynôme associé. - Résolution des inéquations comportant logarithme et exponentielle. - Résolution des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. - Résolution des problèmes conduisant aux équations ou aux systèmes. - Dénombrement d'un ensemble fini. - Utilisation de la formule du binôme de Newton.

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du deuxième trimestre

Leçon : Fonction logarithme

SEQUENCE 1

Définition et propriété

Objectif

Définir la fonction logarithme népérien et utiliser ses propriétés caractéristiques;

Définition

On appelle fonction logarithme népérien, la primitive de la fonction $(\frac{1}{x})$*, définie continue et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*, et qui s'annule pour* $x = 1$.

On la note $\log x$ *(ou* $\ln x$*).*

Donc $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ *sur* $]0, +\infty[$.

Propriétés caractéristiques

- L'ensemble de définition de la fonction $\ln(x)$ est : $D_{ln} =]0, +\infty[$.
- $ln1 = 0; \ln'(x) = \frac{1}{x}$
- Soit $U(n)$ une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

– $\ln[U(x)]$ est définie $\Leftrightarrow U(x) > 0$;

– $\ln|U(x)|$ est définie $\Leftrightarrow U(x) \neq 0$.

Exemples

1) $f(x) = \ln(-2x + 5)$.

f est définie $\Leftrightarrow -2x + 5 > 0 \Leftrightarrow 5 > 2x \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}, x \in]-\infty; \frac{5}{2}[$

$D_f =]-\infty; \frac{5}{2}[$.

2) $f(x) = \ln|-2x + 5|$

f est définie $\Leftrightarrow -2x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 5 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{2}$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{5}{2}\}$, soit $D_f =]-\infty; \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$

SEQUENCE 2

Propriétés algébriques de ln

Objectifs

Enoncer et utiliser les propriétés algébriques de la fonction $\boldsymbol{ln}$

Propriétés algébriques

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel.

- $\ln(a \times b) = lna + lnb$.

  Exemple : $\ln(6) = \ln(2 \times 3) = ln2 + ln3$.

- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$ car $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna + ln\frac{1}{b} = lna + ln1 - lnb = lna - lnb$,

  Donc, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$.

  En particulier,

  $ln\frac{1}{a} = ln1 - lna = 0 - lna$, donc $ln\frac{1}{a} = -lna$.

- $lna^n = nlna$ $(n \in \mathbb{N})$.

  Exemples

  1) $ln\sqrt{a} = lna^{\frac{1}{2}}$.

  2) $ln\sqrt[3]{5} = ln5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}ln5$.

Remarque :

1) Le calcul des images de certains nombres réels par le logarithme népérien donne par exemple des valeurs approchées :

   $ln2 \approx 0{,}693$; $ln3 \approx 1{,}098$; $ln5 \approx 1{,}609$; $ln7 =\approx 1{,}946$; $ln11 \approx 2{,}398$; $ln13 \approx 2{,}565.$;

2) Il existe un nombre réel x compris entre 2 et 3 tel que $lnx = 1$. Ce nombre est noté e et appelé base du logarithme népérien : $lne = 1$ et e$\approx$ 2,718281828.

3) $lne^x = xlne = x$, car $lne = 1$.

   $e^{lnx} = x$ donc $lne^x = e^{lnx} = x$.

SEQUENCE 3

Equations faisant intervenir ln

Objectif

Résoudre les équations comportant $\boldsymbol{ln}$

Exemples

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :

(E_1): $ln(-2x+3) = ln(x+4)$

(E_2): $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$

(E_3): $(lnx)^2 - 6(lnx) + 5 = 0$

Solution

(E_1): $ln(-2x+3) = ln(x+4)$

Posons les contraintes sur l'inconnue x :

(E_1) ne peut être résolue que si $-2x+3 > 0\ et\, x+4 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}\ et -4 < x.$

$x \in]-\infty; \frac{3}{2}[\ et\, x \in]-4; +\infty[$

Ainsi, le domaine de validité de (E_1) est : $D_v =]-4; \frac{3}{2}[$.

Résolution de (E_1).

(E_1): $ln(-2x+3) = l\,n(x+4) \Leftrightarrow -2x+3 = x+4 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

, soit $S = \{-\frac{1}{3}\}$

SEQUENCE 4

Inéquations faisant intervenir ln.

Objectif

Résoudre les inéquations comportant $\boldsymbol{ln}$

Exemple

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations :

(I_1): $ln(-x+3) > ln(x+4)$

(I_2): $\ln(x-1) < \ln(3-x)$

(I_3): $\ln(x^2+9x-1) \geq 0$

Solution

(I_1): $ln(-x+3) > ln(x+4)$

Posons les contraintes sur l'inconnue x :

(I_1) ne peut être résolue que si $-x+3>0$ $et x+4>0 \Leftrightarrow x<3$ $et -4<x$.

$x \in]-\infty;\ 3[$ et $x \in]-4;+\infty[$.

Ainsi, le domaine de validité de (I_1) est : $D_v =]-4;3[$.

Résolution de (I_1).

(I_1): $ln(-x+3) > ln(x+4) \Leftrightarrow -x+3 > x+4 \Leftrightarrow 2x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$, $soit$

$x \in]-\infty;\ -\frac{1}{2}[$

$D_v =]-4;3[$ $et x \in]-\infty;\ -\frac{1}{2}[$ $alors S =]-4;-\frac{1}{2}[$.

(I_2): $\ln(x-1) < \ln(3-x)$

Posons les contraintes sur l'inconnue x :

(I_2) ne peut être résolue que si $x-1>0$ et $3-x>0 \Leftrightarrow x>1$ et $x<3$.

$x \in]1;+\infty[$ $et x \in]-\infty;3[$.

Ainsi, le domaine de validité de (I_2) est : $D_v =]1;3[$.

Résolution de (I_2).

(I_2): $\ln(x-1) < \ln(3-x) \Leftrightarrow x-1 < 3-x \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$, soit $x \in]-\infty;2[$.

$D_v =]1;3[$ et $x \in]-\infty;2[$, alors $S =]1;2[$.

(I_3): $\ln(x^2+9x-1) \geq 0$

Posons les contraintes sur l'inconnue x :

(I_3) ne peut être résolue que si $x^2+9x-1>0$.

$$x^2+9x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-9-\sqrt{101}}{10} \\ x_1 = \dfrac{-9+\sqrt{101}}{10} \end{cases}$$

$x \in]-\infty;\ \frac{-9-\sqrt{101}}{10}[\cup]\frac{-9+\sqrt{101}}{10};+\infty[$.

Ainsi, le domaine de validité de (I_3) est : $D_v =]-\infty;\ \frac{-9-\sqrt{101}}{10}[\cup]\frac{-9+\sqrt{101}}{10};+\infty[$.

SEQUENCE 5

Etude des limites de la fonction logarithme népérien

Objectif

Etudier les limites de la fonction logarithme népérien

Domaine de définition

La fonction logarithme népérien est définie dans $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$ln: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $soit\ ln:]0;\ +\infty[\longrightarrow]-\infty;\ +\infty[$.

Limites aux bornes 0 et $+\infty$

Soit $f(x) = \ln(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^>} f(x) = \lim_{x \to 0^>} \ln x = -\infty$$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors la courbe de f admet une branche infinie en $+\infty$.

On admet que la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OI).

Limite en 0

$$\lim_{x \to 0^>} x \ln x = 0$$

Limite en 1

$$\lim_{x \to 0} \ln \frac{(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

SEQUENCE 6

Variations et représentation de la fonction logarithme népérien

Objectif :

Etudier les variations et représenter la fonction logarithme népérien

Etude de la dérivabilité

$f(x) = lnx$. f est définie, continue et dérivable sur $]0;\ +\infty[$ de fonction dérivée $f'(x) = \frac{1}{x}$.

$\forall x \in [0;\ +\infty[, f'(x) > 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{x \to 0^>} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La courbe de f coupe l'axe (OI) au point A. Cherchons les coordonnées de A en résolvant l'équation

$f(x) = 0.$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow lnx = 0 \Leftrightarrow lnx = ln1 \Longrightarrow x = 1, \mathrm{A}(1; 0).$

Tangentes particulières

- Tangente au point B(e ; 1).

  $f'(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$; $f(e) = lne = 1$

  Equations de la tangente en e.

  $(T): y = f'(e)(x - e) + f(e) = \dfrac{1}{e}(x - e) + 1 = \dfrac{x}{e}$

  Alors $(T_1): y = \frac{x}{e}$

- Tangente au point A(1 ; 0).

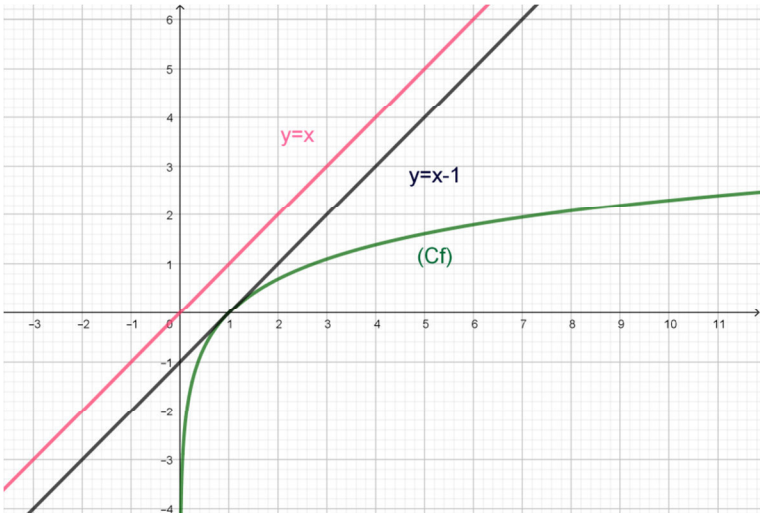
  $y = f'(1)(x - 1) + f(1); f(1) = 0$

  $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 1(x - 1) + 0 = x - 1$

  Alors $(T_2) : y = x - 1$

Tableau de variation

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	1	$+$	$\frac{1}{e}$	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$



SEQUENCE 7

Dérivée de ln

Objectif

Calculer la dérivée de $\boldsymbol{ln}$

Dérivée de la fonction ln|U(x)|

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ, et ne s'annulant pas sur I.

La fonction $f \begin{array}{l} : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln|U(x)| \end{array}$ est dérivable sur I et pour tout x de I, $f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

Remarques

- $\forall x \in I, U(x) > 0 et\ donc: |U(x)| = U(x); ln'U(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}.$
- $\forall x \in I, U(x) < 0 et\ donc: |U(x)| = -U(x); ln'U(x) = -U'(x) \times \frac{1}{-U(x)} = \frac{U'(x)}{U(x)}.$

Propriété

Si U est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I,

alors $(ln°|U(x)|)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$

U étant une fonction numérique, $ln°|U(x)| = \frac{1}{2}\ln[U(x)]^2$

Exemples

1) $f(x) = ln|5x-1| = \frac{1}{2}\ln(5x-1)^2$

$U(x) = (5x-1)^2 \Longrightarrow U'(x) = 2(5)(5x-1)$

$$f'^{(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 5(5x-1)}{(5x-1)^2} = \frac{5}{5x-1}$$

2) $g(x) = ln|5x^2 - 3x - 2| = \frac{1}{2}\ln(5x^2 - 3x - 2)^2$

$U(x) = (5x^2 - 3x - 2)^2 \Longrightarrow U'(x) = 2(10-3)(5x^2 - 3x - 2)$

$$g'^{(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{2(10-3)(5x^2 - 3x - 2)}{(5x^2 - 3x - 2)^2} = \frac{10x-3}{5x^2 - 3x - 2}$$

SEQUENCE 8

Le logarithme de base a ($a \in \mathbb{R}_+^*/a \neq 1$).

Objectif

Définir et étudier la fonction logarithme de base a

Le logarithme de base a

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1 ($a \in \mathbb{R}_+^*/a \neq 1$).

La fonction logarithme de base a, notée $log_a^x = \frac{1}{lna} lnx$

Ainsi, $a^x = m \Leftrightarrow lna^x = lnm \Leftrightarrow xlna = lnm$

$\Longrightarrow x = \frac{lnm}{lna} = \frac{1}{lna} \times lnm = log_a^m$

Donc log_a^x est la fonction logarithme de base 10 (logarithme décimal).

$$log_e^x = \frac{lnx}{lne} = \frac{1}{lne} \times lnx \Longrightarrow log_e^x = lnx$$

log_e^x est le logarithme népérien.

Propriétés caractéristiques

$log^1 = 0$ et $log^{10} = \frac{1}{ln10} \times ln10 \Longrightarrow \frac{1}{lne} \times lnx \Longrightarrow log^{10} = 1$

Les propriétés caractéristiques et algébriques appliquées au logarithme népérien sont également valable pour le fonction logarithme de base *a*.

Exemple d'étude de la fonction logarithme décimal

Soit la fonction : $f(x) = log_{10}^x = \frac{1}{ln10} lnx$.

f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'^{(x)} = \frac{ln\prime x}{ln10} = \frac{1}{ln10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{xln10}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) > 0$. la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Calcul des limites en O et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^>} f(x) = \lim_{x\to 0^>} (\frac{1}{\ln 10} \times \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^>} f(x) = -\infty$$

La droite *x=0* est l'asymptote à *(C_f)*

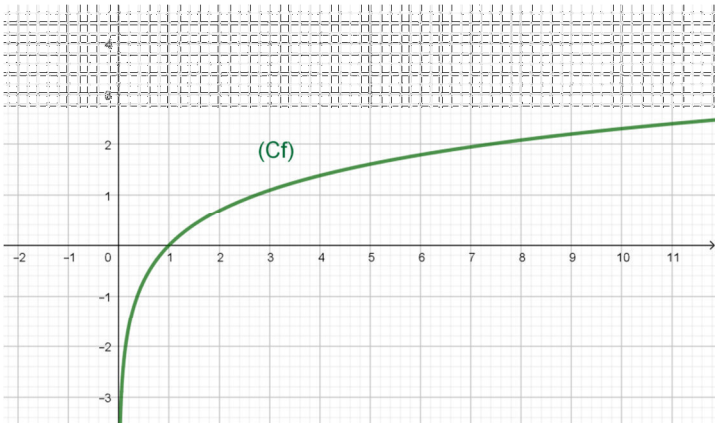
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (\frac{1}{\ln 10} \times \ln x) = \frac{+\infty}{\ln 10} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} (\frac{1}{\ln 10} \times \frac{\ln x}{x}) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Donc la courbe f admet une branche parabolique de direction (OI). Puisque $log^1 = 0$ et $log^{10} = 1$, on en dédit le tableau de variation suivant :

x	0		1		10		$+\infty$
$log'x$	‖	$+$		$+$		$+$	
log_{10}^{x}	‖	$-\infty$	0	↗	1	↗	$+\infty$



SEQUENCE 9

Leçon : Fonction exponentielle népérienne

Définition et propriétés de la fonction exponentielle

Objectif

Définir la fonction exponentielle népérienne

Définition

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle notée exp.

Elle est la réciproque de la fonction logarithme népérien.

Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et a valeur dans $\mathbb{R}^*_+$.

La fonction exponentielle est donc une bijection $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*_+$.

Propriétés caractéristiques

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $exp\, x > 0 \implies e^x > 0$;
- $e^0 = 1$ *et* $e^1 = e$;
- $lne^x = x\, lne \implies lne^x = x \implies e^{lne^x} = x$;
- $exp(1) = e$ *et* $e \approx 2{,}71828$;

$$exp\,(\sqrt{3}\,) = e^{\sqrt{3}} \approx 5{,}62325$$

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ***on a*** : $\boldsymbol{e^{a+b} = e^a \times e^b}$

Propriétés algébriques

$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall\, r \in \mathbb{Q}$, on a:

- $e^a = e^b \iff a = b$;
- $e^a < e^b \iff a < b$;

- $\forall$ x$\in \mathbb{R}$, $e^x > 0$;
- $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$;
- $(e^a)^r = e^{r.a}$.

SEQUENCE **10**

Equations comportant la fonction exponentielle

Objectif

Résoudre les équations comportant la fonction exponentielle

Exemples de résolution des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes:

1. $3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} = 0$;
2. $e^{x-1} = 2$;
3. $2e^{2(x+1)} - 7e^{x+1} + 3 = 0$

Solution

1. $3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 + 5e^x - 2 = 0$

Posons $X = e^x$, l'équation devient $3X^2 + 5X - 2 = 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$; $X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow X_1 = -2; X_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = -2 \\ e^x = \frac{1}{3} \end{cases}$

$e^x = -2$ Solution impossible ; $e^x = \frac{1}{3} <=> lne^x = ln\frac{1}{3} <=>$ **x=-** $ln3$

$\boldsymbol{S = \{-ln3\}}$

2. $e^{x-1} = 2 <=> ln\, e^{x-1} = ln2 <=> x - 1 = ln2 <=> x = 1 + ln2$

$\mathbf{S = \{1 + ln2\}}$

SEQUENCE 11

Inéquations comportant la fonction exponentielle

Objectif

Résoudre les inéquations comportant la fonction exponentielle

Exemples de résolution des inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1. $e^{x-1} > 4$;
2. $2e^{2x}+5e^{x} -3\leq 0$
3. $\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3} > 0$

Solution

1. $e^{x-1} > 4 \Leftrightarrow x-1 > \ln 4 \Leftrightarrow x-1 > 2ln2 \Leftrightarrow x > 1+2ln2$

S=$]\mathbf{1+2ln2}; +\infty[$

2. $2e^{2x}+5e^{x} -3\leq 0$

On pose $X = e^{x}$, $X > 0$; $2X^2 + 5X - 3 \leq 0$; $\Delta = 49$

$X_1 = -3$ et $X_1 = \frac{1}{2}$, $\begin{cases} X1 = -3 \\ X2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x1 = -3 \\ x2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} e^{x1} \geq -3 \\ e^{x2} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

$e^{x2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x2 \leq -\ln 2$; **S=**$]-\infty; \mathbf{-ln2}]$

3. $\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3} > 0$ $D_{i=} \mathbb{R}/\{ln3\}$

$\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3} > 0 \Leftrightarrow e^{x} - 3 > 0$ donc $x > \ln 3$

S=$]\boldsymbol{ln3}; +\infty]$

SEQUENCE 12

Limites et variations de la fonction exponentielle népérienne

Objectif

Calculer les limites de la fonction exponentielle népérienne

Etude des limites sur $\mathbb{R}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x}$. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Limites aux bornes de D_f :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

La droite d'équation y = 0 est l'asymptote horizontale à la courbe de f

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{lne^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{X}{lnX} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{lnX}{X}} = \frac{1}{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ)

Etude de la variation de *f*

- Sens de variation de f

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(C_f) coupe l'axe (OJ) car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f(0) = 1$; $f'(0) = 1$; $f(1) = e$

Tableau de variation

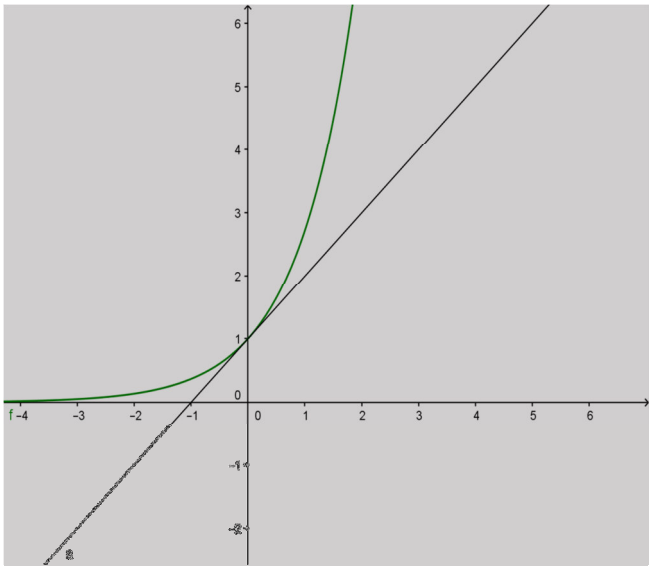
x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f(x)$	+	1	+	e	+	
$f'(x)$	0 ↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

SEQUENCE 13

Représentation de la fonction exponentielle

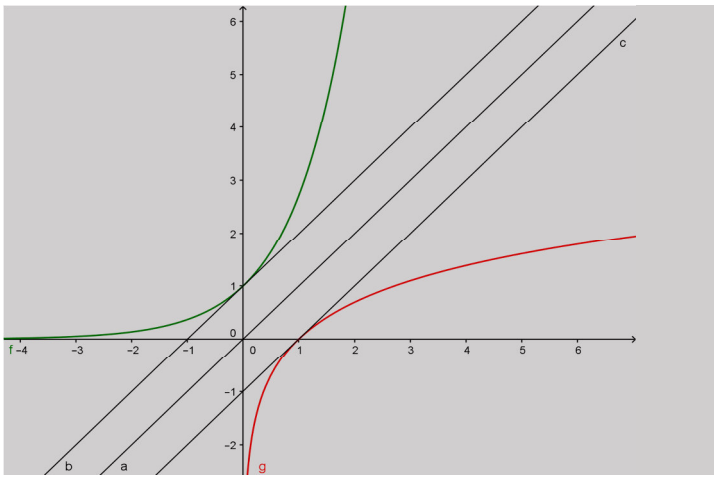
Objectifs

Représenter graphiquement la fonction exponentielle



NB : La courbe représentative de la fonction e^x est symétrique à la courbe représentative de la fonction lnx par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$, première bissectrice du plan.

L'équation de la tangente à la courbe représentative fonction e^x est la droite $(\Delta')\ d'équation\ \ y = x - 1$



$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

SEQUENCE 14

Fonction exponentielle de base a : a^x ($a > 0$)

Objectifs

Définir la fonction exponentielle de base $\boldsymbol{a}$ et utiliser ses propriétés

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif.

- **Pour tout nombre réel x, on a : $a^x = e^{x\ln a}$.**
- On appelle fonction exponentielle de base $\boldsymbol{a}$, la fonction : $x \longmapsto a^x$

Exemples

1) e^x est la fonction exponentielle de base e
2) 10^x est la fonction exponentielle de base 10 qui est la réciproque de la fonction $\log_{10}$ (logarithme décimal).
3) La fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante.

Propriétés

$\forall\, a \in \mathbb{R}^*_+$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, **on a:**

$\ln a^x = x\ln a$, on en déduit les propriétés suivantes :

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^*_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, on a :

$\boldsymbol{a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}}$;

$\boldsymbol{a^{-y} = 1/a^y}$

$\boldsymbol{a^{x+y} = a^x \,.\, a^y}$

$\boldsymbol{(a.b)^x = a^x\, b^x}$

$\boldsymbol{(a^x)^y = a^{xy}}$

$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x)}{b^x)}}$

SEQUENCE 15

Etude de la fonction $f_a : x \longmapsto a^x$ $(0 < a < 1)$

Objectif

Etudier la fonction $\boldsymbol{f_a}$ $(0 < \boldsymbol{a} < 1)$

Etude de la fonction $f_a : x \longmapsto a^x$

Soit (C_a) la courbe représentative de $f_a(x) = a^x$ / $a > 0$ et $a \neq 1$.

f_a est définie $\forall\, x \in \mathbb{R}$, donc :

$D_{fa} = \mathbb{R}$.

Etude des variations de f_a

$\forall x \in \mathbb{R}$, *on a* : $f_a(x) = a^x \Rightarrow f_a(x) = e^{x\ln a} \Rightarrow f_a(x) = e^{u(x)}$

f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $fa'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} \Longrightarrow f_a'(x) = \ln a\, e^{x\ln a} = (\ln a.)\, a^x$

$f_a'(x) = (\ln a)\, a^x$

le signe de f_a' dépend de $\ln a$

or $a \neq 1$; il y a donc 2 cas à considérer :

$0 < a < 1$ et $a > 1$

- 1er cas, $0 < a < 1$

On a $\forall x \in lR$, $f_a'(x) < 0$, donc f_a est décroissante sur lR

Limites aux bornes de D_{f_a} :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est l'asymptote horizontale à (C_a) en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = +\infty$

La courbe (C_a) admet une branche infinie en $-\infty$

$f_a(0) = 1$ et $f_a(1) = a$

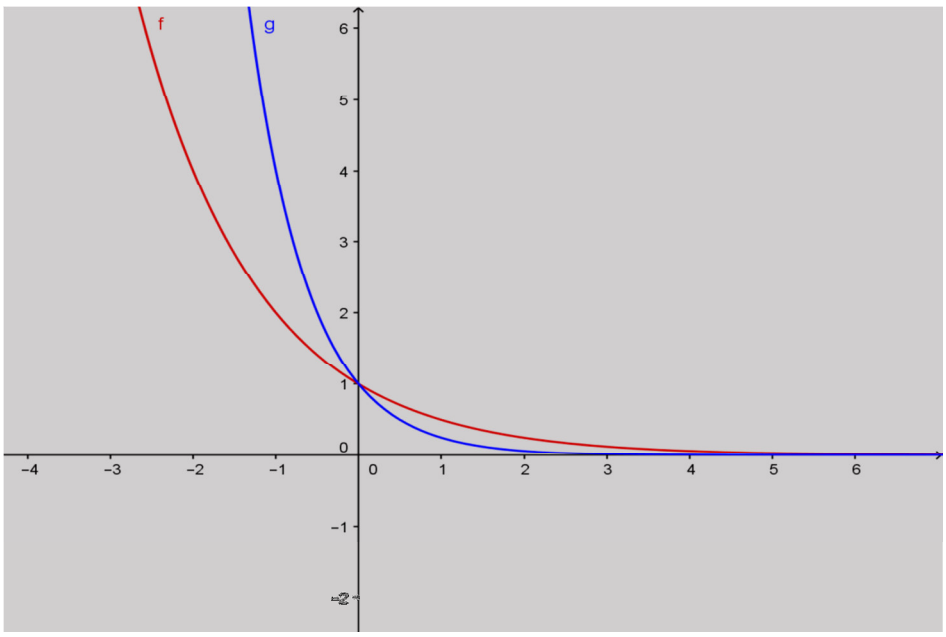
Recherche de la branche infinie en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{fa'(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x\ln a}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \ln a \frac{e^{x\ln a}}{\ln a x} = \mp\infty$$

(C_a) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$fa'(x)$	+		+	+
$fa(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ a	↗ 0

$f_{1/2}$ (x) et $f_{1/4}$ (x)



SEQUENCE 16

Etude de la fonction $f_a : x \longmapsto a^x$ ($a > 1$)

Objectif

Etudier la fonction f_a ($a > 1$)

2e cas : a> 1

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a{}'$ (x) < 0 , donc f_a est croissante sur $\mathbb{R}$

Limites aux bornes de D_{fa} :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a$ (x) $= \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = 0$

La droite d'équation y = 0 est l'asymptote horizontale à (C_a) en -∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = +\infty$

La courbe (C_a) admet une branche infinie en $-\infty$

$f_a(0)=1$ et $f_a(1)=a$

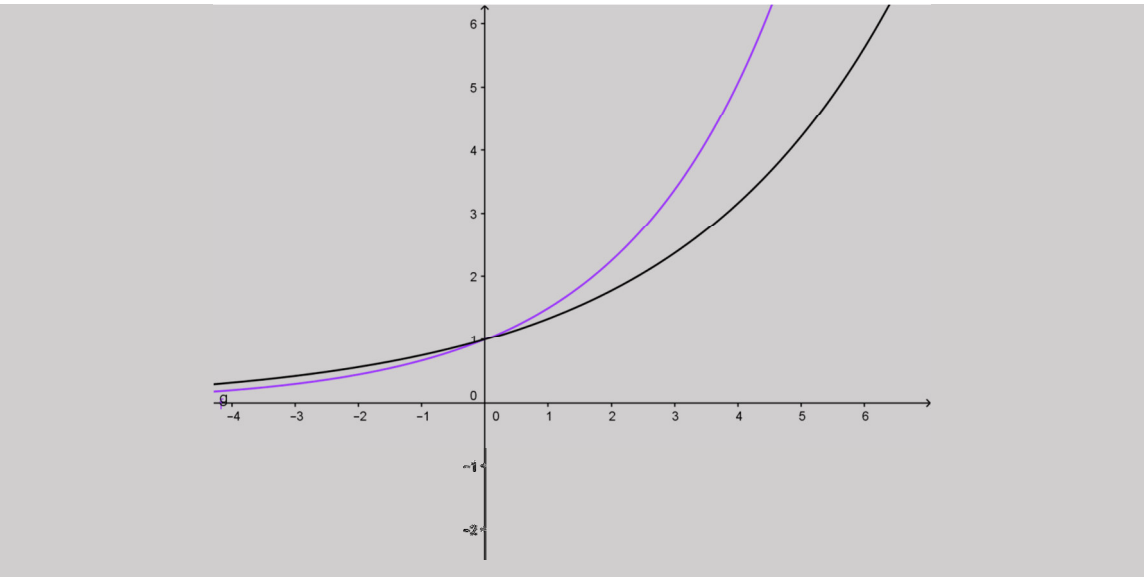
Recherche de la branche infinie en$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_a'(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln a}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln a \frac{e^{x\ln a}}{\ln a x} = +\infty$

(C_a) admet en -∞ une branche parabolique de direction celle de (OJ)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_a'(x)$	+	+	+	
$f_a(x)$	0 ↗	1 ↗	a ↗	$+\infty$

$f_{3/2}(x)$ et de $f_{4/3}(x)$



Suivant les deux cas étudiés on a la représentation suivante

$f_{1/2}(x)$ et de $f_2(x)$

SEQUENCE 17

Equations du second degré dans $\mathbb{R}$

Objectifs

- Définir une équation du second degré ;
- donner la forme canonique d'un trinôme du second degré et calculer son discriminant.

Définition

On appelle équation du second degré une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont sont trois réels donnés avec a différent de 0.

Forme canonique

Propriété et définition

Il existe des réels α et β tels que pour tout x réel,

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$= a(x - \alpha)^2 + \beta$

Cette écriture $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée forme canonique de P.

Exemple

Déterminer la forme canonique des polynômes suivants :

$P(x) = -2x^2 + 24x - 3$ $Q(x) = -x^2 + 5x - 6$ et $R(x) = 4x^2 - 4x + 1$

Discriminant

Définition

On appelle discriminant du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ le nombre réel note Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$

Remarque : Discriminant réduit

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ un polynôme du second degré.

Si $b' = \frac{b}{2}$ alors $\Delta = b^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$

Définition : *Etant donné un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ s'il existe un réel b' tel que $b' = \frac{b}{2}$ alors P admet un discriminant appelé discriminant réduit qu'on note habituellement Δ' défini par $\Delta' = b'^2 - ac$*

SEQUENCE 18

Factorisation et résolution des équations du second degré.

Objectifs

- Factoriser un trinôme du second degré ;
- Résoudre des équations du second degré.

Propriété

Soit P, le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *et* Δ *son discriminant.*

- *Si* $\Delta < 0$ *alors P n'est pas factorisable et n'admet pas de racine réelle.*
- *Si* $\Delta = 0$ *alors* $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ *et admet une racine unique* $-\frac{b}{2a}$ *appelée aussi racine double.*
- *Si* $\Delta > 0$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ *où* $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et P admet deux racines réelles distinctes* x_1 *et* x_2 *définies précédemment.*

Réciproquement, si un polynôme du second degré admet une forme factorisée, alors il admet deux racines éventuellement confondues. Cela permet de dire aussi que si un polynôme du second degré n'admet pas de racines (l'équation P(x)=0 n'admet pas de solution) alors il ne peut pas être mis sous forme factorisée.

Exemple

Déterminer les racines éventuelles des polynômes suivants et factoriser-les si possible :

1) $2x^2 + 2x + 2$
2) $x^2 + 6x + 9$
3) $6x^2 - 13x + 6$

SEQUENCE 19

Inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$

Objectifs

- Etudier le signe d'un trinôme du second degré ;
- Résoudre des inéquations du second degré.

Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit P un polynôme du second degré et Δ son disciminant

- *Si $\Delta > 0$,x_1 et x_2 désignant les deux racines avec $x_1 < x_2$ alors P(x) est du signe de a siet seulement si $x \in]-\infty\ ;\ x_1[\cup]x_2\ ;\ +\infty[$ et du signe de –a si et seulement si $x \in]x_1;\ x_2[$. On dit dans ce cas que P est du signe de a « aux extérieurs » des racines et du signe de – a « à l'intérieur des racines ».*
- *Si $\Delta = 0$, P(x) est de signe de a sauf lorsque $x = \frac{-b}{2a}$*
- *Si $\Delta < 0$, P(x) est toujours du signe de a pour tout x réel.*

Démonstration

1er cas : Δ> 0

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
Signe de a	Signe de a	Signe de a	Signe de a	
$Signedex - x_1$	–	0	+	+
$signredex - x_2$	–	–	0	+
$SignedeP(x)\_a(x - x_1)(x - x_2)$	Signe de a	0	Signe de –a	0 Signe de a

2ème cas : Δ = 0

$P(x) = a(x - x_o)^2$ *où* $x_o = \frac{-b}{2a}$

$(x - x_o)^2 \geq 0$ donc $a(x - x_o)^2$ est du signe de *a.*

3ème cas : *Δ< 0*

$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ or $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc pour tout réel $x, P(x)$ est du signe de *a.*

SEQUENCE 20

Somme des racines d'un polynôme du second dégré et interprétation graphique

Objectif

Déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit ;

Propriété

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si, ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Exemple

Déterminons deux nombres réels ayant pour somme -1 et pour produit -12

Désignons par S la somme et par P le produit

On a $x^2 - Sx + P = 0 \;\; soit \;\; x^2 + x + 12 = 0$

Le polynôme $x^2 + x + 12$ a pour discriminant $\Delta = 49$ et les racines sont $x = -4 \;\; et \; x = 3$

Les deux nombres cherchés sont $-4 \;\; et \; 3$

On peut remarquer que la somme de ces deux nombres est effectivement -1 et le produit est -12

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\begin{cases} x + y = -9 \\ xy = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = 2 \\ xy = -8 \end{cases}$

SEQUENCE 21

Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Définir et résoudre par substitution des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Définition

Un système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$ *est un ensemble* $(\sum)$ *de deux équations de la forme :*

$$(\sum)\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Où (x, y) *est le couple d'inconnues et a, b, c, a', b' et c' sont des constantes appelés coefficients du système et vérifiant les conditions* $(a, b) \neq (0,0)$ *et* $(a', b') \neq (0,0)$. *Résoudre le système revient à trouver le ou les couples* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *qui satisfont simultanément les deux équations* (1) *et* (2). *Ces couples sont les solutions du système.*

Résolution par substitution

Résoudre un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ c'est trouver tous les couples (x, y) solutions de ce système.

Méthode de résolution par substitution

A partir de l'une des deux équations, on exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre. On remplace dans l'autre équation l'inconnue trouvée par son expression. On obtient une équation à une inconnue que l'on résout et on trouve la valeur de l'inconnue. On la remplace par sa valeur dans l'expression de la première inconnue.

SEQUENCE 22

Résolution par combinaison linéaire (par addition) ou par la méthode graphique des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Résoudre par combinaison linéaire ou par la méthode graphique des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Méthode

On multiplie chaque équation du système par un nombre bien choisi tel qu'en additionnant membres à membres les équations obtenues, l'une des deux inconnues disparaisse. On résout alors l'équation à une inconnue puis on termine par le calcul de l'autre inconnue en remplaçant l'inconnue trouvée par sa valeur dans l'une de deux équations initiales.

Exemple

Résoudre Σ le système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\begin{cases} 3x + 1 = 5y \\ 2y - 4 = 9x \end{cases}$$

Méthode graphique

Soit le système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^2$suivant :

$$(I)\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

Où (x, y) est le couple d'inconnues et a, b, c, a', b' et c' sont des constantes tels que$(a, b) \neq (0,0)$et $(a', b') \neq (0,0)$.

Construire (D) et (D') les droites d'équations respectives

$$ax + by + c = 0 \quad et \qquad a'x + b'y + c' = 0.$$

Les coordonnées du point d'intersection de (D) et (D') est le couple solution du système (I).

Exemple

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ x - y = -4 & (2) \end{cases}$$

SEQUENCE 22

Résolution générale par la méthode de Cramer des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$

Objectif

Résoudre par la méthode de Cramer des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Méthode de Cramer

Cette méthode donne une expression générale de la solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues.

Comme l'étude se porte sur des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$, donc le cas où $n = 2$:

Considérons le système $(\sum)$ tel que :

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où $a, b, c, a', b' et\ c'$ sont des constantes fixées.

Calculons le déterminant associé à $(\sum)$ que l'on note Δ :

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Si$\Delta \neq 0$, alors le système $(\sum)$ admet un couple de solution (x, y) où$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}\ et\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ avec Δ_x et Δ_y respectivement déterminant de x et déterminant de y donnés par :

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

Si $\Delta = 0$, on démontre que dans ce cas le système n'a pas de solution ou admet une infinité de solutions.

Exemple

Résoudre par la méthode de Cramer le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ x - y = -4 & (2) \end{cases}$$

SEQUENCE 23

Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Objectif

Définir et résoudre par substitution des Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Définition

Un système d'équation linéaire dans $\mathbb{R}^3$ est un ensemble $(\sum)$ de trois équations à trois inconnues de la forme :

$$(\sum)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1(1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2(2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3(3) \end{cases}$$

Où (x, y, z) est le triplet d'inconnues et $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3$ et d_3 sont des constantes appelés coefficients du système et vérifiant les conditions $(a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$, $(a_2, b_2, c_2) \neq (0,0,0)$ et $(a_3, b_3, c_3) \neq (0,0,0)$. Résoudre le système revient à trouver le ou les couples $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui satisfont simultanément les trois équations(1), (2) et (3). Ces couples sont les solutions du système.

Résolution par Substitution

La méthode de substitution consiste à exprimer une des inconnues du système à trois inconnues en fonction de deux autres puis on la remplace par cette expression dans les autres équations. On se ramène ainsi à la résolution de système dans $\mathbb{R}^2$ ou encore à la résolution d'une équation à une inconnue.

Exemple

Résoudre par substitution le système à résoudre suivant

$$(\sum)\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 & l(1) \\ x + 3y + 4z = 10 & l(2) \\ 3x - 2y - z = 2 & l(3) \end{cases}$$

Leçon : Dénombrement

SEQUENCE 24

Les nombres entiers n!; A_n^p *et* C_n^p

Objectif

Calculer les nombres entiers n!; A_n^p *et* C_n^p

Le nombre n!; A_n^p *et* C_n^p

- *Pour tout entier naturel n non nul, le produit*

$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-2) \times (n-1) \times n$ *est appelé factoriel* n *et est noté* $n!$

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-2) \times (n-1) \times n$

Par convention : $0 != 1$.

Exemples

$1! = 1$;

$2! = 1 \times 2$;

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$;

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$; etc.

- *Soit n et p deux entiers naturels tels que* $p \leq n$, *on a:*

  $A_n^p = n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)$.

Exemples

$A_7^2 = 7 \times 6 = 42$;

$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$;

$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

Remarque

Le nombre de facteurs du produits $n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)$ est égal à p.

Par exemple, A_{10}^3 est le produit de 3 entiers naturels consécutifs dont le plus grand est 10 :

$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

- *Soit n et p deux entiers naturels tels que* $p < n$, *on a:* $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemples

$C_{12}^2 = \frac{2!}{2!(12-2)!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{2! \times 10} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$

$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{3! \times 12!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3!} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 13}{3 \times 2} = 455$.

Exercice

Calculer les nombre entiers naturels suivants :

7!; 8! ; $A_{18;}^{3}$ $A_{19;}^{4}$ et $C_{32.}^{5}$

SEQUENCE 25

Outils pour dénombrer : arrangements avec ou sans remise, les permutations

Objectif

Dénombrer un ensemble en utilisant les arrangements avec ou sans remise, les permutations

Introduction

Soit E un ensemble formé de n éléments.

Arrangement avec remise

Définition

On appelle arrangement avec remise de p éléments de E, tout p-uplet $(a_1, a_2 \dots a_p)$ *d'éléments de E distincts ou non.*

Propriété

Le nombre d'arrangements avec remise de p éléments de E est : n^p *.*

Arrangement sans remise

Définition

On appelle arrangement sans remise de p éléments de E, tout p-uplet $(a_1, a_2 \dots a_p)$ *d'éléments de E deux à deux distincts.*

Propriété

Le nombre d'arrangements sans remise de p éléments de E est : A_n^p

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \text{ où } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)}$$

Exemple

Dix athlètes participent à une course. On appelle podium l'arrivée de trois premiers. On suppose qu'il n'y a pas d'ex aequo.

Le nombre de podiums possibles est égal au nombre d'arrangements de 3 athlètes parmi 10 : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

Permutation

Définition

On appelle permutation des éléments de E, tout arrangement des n éléments de E.

Propriété

Le nombre de permutations de n éléments de E est : $n!$

Exemple

On appelle anagramme d'un mot, tout mot formé avec les lettres qui le composent (par exemple bca et cab sont des anagrammes de bac).

Le nombre d'anagramme du mot AFRIQUE est de 7!= 5040.

SEQUENCE 26

Outils pour dénombrer : combinaison

Objectif

Dénombrer un ensemble en utilisant les combinaisons et ses propriétés

Combinaison

On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie de E qui possède p éléments.

Propriété

Le nombre de combinaison de p éléments de E est : C_n^p

$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Formule du binôme de Newton

Propriété

Pour tous nombres a et b, pour tout entier naturel n non nul ; on a :

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^p b^{n-p}$

Exemples

$(a+b)^2 = \sum_{p=0}^{p=2} C_2^p a^p b^{2-p} = C_2^0 a^0 b^2 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^2 b^0 = b^2 + a^2$

$(a+b)^3 = \sum_{p=0}^{p=3} C_3^p a^p b^{3-p} = C_3^0 a^0 b^3 + C_3^1 a^1 b^2 + C_3^2 a^2 b^1 + C_n^p C_3^3 a^3 b^0 = b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b^1 + a^3$.

Dans la formule du binôme de Newton, les C_n^p sont appelés les coefficients binomiaux.

SEQUENCE 27

Problèmes de dénombrement : tirage de p objets dans une urne qui en contient n

Objectif

Utiliser l'outil convenable pour dénombrer

Introduction

Il y a trois principaux types de tirages :

- tirages successifs avec remise,
- tirages successifs sans remise,
- tirages simultanés.

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Outil de dénombrement	Nombre de tirages total
Tirages successifs avec remis	Oui	non	p-uplet de E	n^p
Tirages successifs sans remise	Oui	oui	Arrangement de p éléments de E	A_n^p
Tirages simultanés	Non	oui	Combinaison de p éléments de E	C_n^p

SEQUENCE 28

Exemples de dénombrement

Objectif

Utiliser les outils pour dénombrer quelques ensembles

Exemple 1

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 boules blanches.

On tire 3 boules de cette urne. Calculons le nombre de tirages possibles dans les cas suivants :

1) tirages successifs avec remise

Il s'agit des triplets de l'ensemble de 12 boules ; le nombre de tirages est de $12^3 = 1728$.

2) tirages successifs sans remise

Il s'agit d'arrangement de 3 boules de l'ensemble de 12 boules ; le nombre de tirages est donc :

$A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

3) Tirages simultanés

Il s'agit de combinaison de 3 boules de l'ensemble de 12 boules ; le nombre de tirages est donc : $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12\times11\times10}{3\times2} = 220$.

Exemple 2

Un jeu de 32 cartes est généralement constitué de 4 catégories de cartes : pique, trèfle, cœur et carreau contenant chacune l'As, le Roi, la Dame, le Valet, le 10, le 9, le 8 et le 7 c'est-à-dire parmi les 32 cartes on dénombre 4 As, 4 Dames, 4 Rois, 4 Valets, etc.

On tire simultanément 5 cartes de ce jeu.

Calculer le nombre de tirages distincts dans les cas suivants :

a)les 5 cartes sont quelconques

b) il y a exactement 2 As parmi les 5 cartes ;

d) les 5 cartes sont de la même catégorie.

Solution

Dans le cas de tirages simultanés, on doit utiliser des combinaisons.

a) Le nombre de tirages distincts de 5 cartes est $C_{32}^5 = \frac{32!}{5!\times27!} = 201.376$

b) Avoir exactement 2 As parmi 5 signifie que l'on a tire 2 As parmi 4As et 3 autres cartes non as parmi 27 cartes non as. Le de tirage demandé est :

$C_4^2 \times C_{27}^3 = 6 \times 3.276.$

c) Les 5 cartes sont de la même catégorie signifie que l'on a tiré 5 piques parmi 8 ou 5 trèfles parmi 8 ou 5 cœurs parmi 8 ou 5 carreaux parmi 8 ; le nombre de tirages demandé est donc : $C_8^5 + C_8^5 + C_8^5 + C_8^5 = 4 \times 56 = 224$

Exercices d'entrainement de la compétence de base 1 du deuxième trimestre

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites de la fonction f en x_0 par les valeurs supérieures.

a) $f(x) = 4 + lnx$; $x_0 = 0$; b) $f(x) = (lnx)^2 - 3$; $x_0 = 0$; c) $f(x) = \frac{x}{lnx}$; $x_0 = 1$;

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$

a) $f(x) = e^x + x$; b) $f(x) = e^x - x$; c) $f(x) = e^x + e^{-x}$; d) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$;

Exercice 2

Répondre par vrai ou faux

a) L'écriture ln $(-x)$ n'a pas de sens

b) L'équation $3\ln(2x) = 5\ln(x)$ admet deux solutions.

c) $\ln(e^{3x-5}) = 3x - 5$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations données :

a) $ln(x) = 0$; b) $ln(x) = 1$; c) $ln(4 - 2x) = 0$; d) $(2 + x)ln(x - 3) = 0$;

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations données :

a) $\ln(x) \geq 0$; b) $\ln(x) < 1$; c) $\ln(x) \geq 2$; d) $(1 - \ln(x))(3 + \ln(x)) \geq 0$

Exercice n°5

Simplifier au maximum l'écriture des réels suivants :

a) $x = e^{ln2}$; b) $x = e^{-ln3}$; c) $x = e^{1-ln2}$; d) $x = ln\sqrt{e^3}$;

Exercice n°6

Résoudre dans R les équations données :

a) $e^x = 2$; b) $e^x = -3$; c) $e^{2-x} = 1$; d) $(e^x - 1)(e^{-x} + 5) = 0$

Exercice n°7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $e^x < 3$; b) $e^x \geq -2$; c) $e^{-x} \leq 1$; d) $e^{-3x} < e^{x+7}$

Exercice 8

On considère la suite définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3 - 2^n$.

Exercice 9

Etudier les variations de la suite (u_n) définie par : $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

a) On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n + 4$ et $u_0 = 1$.
Déterminer la formule explicite de la suite.

b) Soit (u_n) une suite géométrique dont le premier terme u_0 et la raison q sont strictement positifs, et (v_n) la suite telle que : pour tout entier naturel n, $v_n = ln(u_n)$.

1) Démontrer que la suite (v_n) est définie et qu'elle est arithmétique. On déterminera sa raison r en fonction de q.

2) Déterminer les valeurs de q telles que la suite (v_n) est strictement décroisante.

Exercice 11

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

a) 1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

2. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

b) 1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n, u_n \leq n + 3$.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

3. En déduire une validation de la conjecture précédente.

On désigne par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12

1) Etudier de deux manières le sens de variation de la suite u_n définie par : $u_n = \frac{3n+2}{2n-1}$

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$. Démontrer que la suite (v_n) est bornée.

3) Etudier le sens de variation de la suite (W_n) définie par : $W_n = \frac{1}{3^n}$.

Exercice 13

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n-1}{u_n+3}, \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer $u_1, u_2,\ u_3$ et u_4 et prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n + 1 > 0$.

2) Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n+1}$ est une suite arithmétique.

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n et étudier la convergente de la suite (u_n).

Exercice 14

On considère la suite u_n définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+2} \end{cases}$

1) Démontrer que la suite $v_n = \frac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

2) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

3) Calculer $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

4) Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Démontrer que pout entier n de $\mathbb{N}$, $u_n \neq 2$

2) a) Montrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n+1}{u_n-2}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b) Exprimer v_n en fonction de n et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

c) En déduire u_n en fonction de n.

d) Calculer en fonction de n, la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Exercice 16

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + 3e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan d'unité graphique 2cm.

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

c) Tracer la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x + 1$.

Exercices d'entrainement de la compétence de Base 2 du deuxième trimestre

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $(E_1) : 4x - 5 = x - 7$; $(E_2) : -2x + 7 = 8 - 2x$; $(E_3) : \frac{x-3}{5} = \frac{4+5x}{3}$ et $(E_4) : 4x^2 = (x-3)^2$

b) (E_1) : $3x^2 - x + 1 = 0$; (E_2) : $4x^2 - 4x + 1 = 0$; (E_3) : $2x^2 - x - 3 = 0$; (E_4) : $3x^2 + 11x - 20 = 0$ et (E_5) : $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$.

Exercice 2

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

a) Calculer P(2).

b) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 3

a) Déterminer les signes de $2x + 6$ et de $-2x + 6$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : (I_1) : $25x^2 - 70x + 49 > 0$, (I_2) : $x^2 + 2x - 3 \leq 0$, (I_3) : $6x^2 \geq 7x + 5$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S1): $\begin{cases} x + y = 26 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ (S2): $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 6y = 1 \end{cases}$ (S3): $\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 3x + 15y = 3 \end{cases}$ (S4): $\begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{3}{y+1} = -1 \\ \frac{1}{x-2} - \frac{1}{y+2} = 2 \end{cases}$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$(S1) : \begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \qquad (S2) \begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$ln(2 - 2x) = 1$

$ln(2 - x) = -3$

$ln(x^2 - 8) = 0$

$ln(1 - \frac{1}{x})=2$

$ln(3x - 4) = ln(x^2 - 4)$

$ln(x - 2) = ln2$

$ln(x - 2) = ln(x^2 - 2)$

$2lnx = ln(x + 4) + ln2x$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$ln(2 - 2x) = 1$

$ln(2 - x) = -3$

$ln(x^2 - 8) = 0$

$ln(1 - \frac{1}{x})=2$

$ln(3x - 4) = ln(x^2 - 4)$

$ln(x - 2) = ln2$

$ln(x - 2) = ln(x^2 - 2)$

$2lnx = ln(x + 4) + ln2x$

$(lnx)^2 + lnx - 2 = 0$;

$-2(lnx)^2 + lnx + 3 = 0.$

$e^{x+2} = 3$

$(e^x + 1)(e^x - 4)=0$

$e^{2x} = 2e^x - 1$

$2e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$

$e^{3x} = 4e^x$

$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$lnx < 1$

$lnx \geq 2$

$ln(2x - 1) > -1$

$(e^x + 1)(e^x - 4) \leq 0$

$ln(x - 2) \leq ln(2x - 1)$

$ln(-3x) \geq ln(x^2 - 4)$

$(lnx)^2 + lnx - 2 \leq 0$;

$-2(lnx)^2 + lnx + 3 > 0.$

$e^{\frac{x+1}{x}} > 3$ $\qquad$ $ln(1+\frac{2}{x}) \geq lnx$

$e^{x-1} < 2$ $\qquad$ $ln(x^2-1) <$e

$e^{2x} > 2e^x - 1$

$2e^{2x} + 3e^x - 2 \leq 0$

Exercice 9

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $e^{x^2+2x-3} = 0$ b) $e^{x^2+3} - e = 0$ c) $e^{x^2+2x-3} = 1$ d) $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$.

e) $e^{\frac{5x+3}{x-4}} = \frac{1}{e}$ f) $\frac{e^{5x+3}}{e^{x-4}} = \frac{1}{e}$ g) $\frac{e^x-2}{e^x-1} = 2$ h) $\frac{e^x+4}{2e^x+1} = 5$.

i) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ j) $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$ k) $e^{2x-2} - (1+e)e^x + e^3 = 0$

l) $2e^{2x} - 3e^{1-x} = 2e - 3$.

Indication : On peut poser X= e^x.

Exercice 10

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a) $(e^x)^2 - e \geq 0$ *b*) $e^{x^2+2x-1} \geq e^{-3x^3+7x+2}$ *c*) $e^{\frac{x-1}{x+3}} > e^2$ *d*) $(e^x - 1)(e^{2x} + 1) < 0$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S1) $\begin{cases} \ln(x-2) + 3ln(y-1) = 9 \\ 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases}$ $(S2)$: $\begin{cases} x - y = 1 \\ lnx + lny = ln12 \end{cases}$

(S3) : $\begin{cases} 2e^x - e^y = -1 \\ 4e^x + 3e^y = 18 \end{cases}$ $\qquad$ (S4) : $\begin{cases} 5e^{-x} - 3e^{-y} = 3 \\ 7e^{-x} + 6e^{-y} = 11 \end{cases}$

Exercice 12

Dix athlètes participent à une course. On appelle podium l'arrivée de trois premiers. On suppose qu'il n'y a pas d'ex aequo.

Quel est e nombre de podiums possibles ?

Exercice 13

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 boules blanches.

On tire 3 boules de cette urne. Calculer le nombre de tirages possibles dans les cas suivants :

1) Les tirages sont successifs avec remise

2) Les tirages sont successifs sans remise

3) Les Tirages sont simultanés

Exercice 14

Un jeu de 32 cartes est généralement constitué de 4 catégories de cartes : pique, trèfle, cœur et carreau contenant chacune l'As, le Roi, la Dame, le Valet, le 10, le 9, le 8 et le 7 c'est-à-dire parmi les 32 cartes on dénombre 4 As, 4 Dames, 4 Rois, 4 Valets, etc.

On tire simultanément 5 cartes de ce jeu.

Calculer le nombre de tirages distincts dans les cas suivants :

a)les 5 cartes sont quelconques

b) il y a exactement 2 As parmi les 5 cartes ;

d) les 5 cartes sont de la même catégorie.

Exercice 15

Un tournoi sportif compte sept équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer une fois, et une seule, toutes les autres équipes. Combien doit-on organiser de matchs ?

Evaluation

Exercice 1

Un jury est composé de 4 membres tirés au sort parmi 9 hommes et 6 femmes.

1) Calculer la probabilité que le jury comprenne 2 hommes et 2 femmes.
2) Calculer la probabilité que le jury ne comprenne aucune femme.
3) Calculer la probabilité que le jury comprenne au moins une femme.

Exercice 2

A) Soit g, la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = ln(x) + x - 3$.

1) Justifier que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$;
2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3 ;
3) En déduire le signe de g en fonction de x.

B) Soit f, la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(ln(x) - 2) + 2$.

On appelle $(\mathcal{C})$, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2) a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$;

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0;\ +\infty[$.

Soit $(\mathcal{C}')$, la courbe d'équation $y = ln(x)$.

c) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;\ +\infty[$, $f(x) - ln(x) = \frac{2-ln(x)}{x}$.

d) En déduire que les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

Difficultés rencontrées liées à l'exercice :

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

Conseils et orientation de l'enseignant :

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

Evaluation de la compétence :

TROISIEME TRIMESTRE

Programmation horaire du 3e trimestre

3ème trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée des chapitre	Nombre d'heures du Trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
1er Avril au 10 Juin 9 semaines	CB2	3	Probabilité	8H	3H	2H	12H	27H
		4	Statistique		2H		15H	

FICHE DE PROGRESSION

Trimestre	Période	Contenus	
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité
3	1er Avril au 10 Mai	R A S	- Probabilités (suite et fin) - Statistiques
	11 Mai au 10 Juin	R A S	- Statistiques (Suite et fin)

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Terminale A Troisième trimestre

Compétence de Base

Terminale D–CB2 : L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les probabilités et les statistiques.		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	**Savoir-faire**	**Activités suggérées**
- Probabilités - Statistiques	- Définir une probabilité. - Calculer la probabilité d'un évènement (hypothèse d'équiprobabilité). - Rappeler les séries statistiques à une variable. - Définir une série statistique à deux caractères. - Représenter un nuage de points d'une série statistique à deux caractères (cas de points pondérés, point moyen). - Déterminer un ajustement linéaire d'une série statistique à deux caractères par la méthode graphique ou la méthode de Mayer. - Déterminer la corrélation linéaire d'une série statistique à deux caractères.	- Définition d'une probabilité. - Calcul de la probabilité d'un évènement (hypothèse d'équiprobabilité). - Rappel des séries statistiques à une variable. - Définition d'une série statistique à deux caractères. - Représentation d'un nuage de points d'une série statistique à deux caractères (cas de points pondérés, point moyen). - Détermination d'un ajustement linéaire d'une série statistique à deux caractères par la méthode graphique ou la méthode de Mayer. - Détermination de la corrélation linéaire d'une série statistique à deux caractères.

PARTIE DESTINEES A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

SEQUENCE 26

Le calcul des probabilités

Objectif

Calculer la probabilité d'un évènement

Probabilité d'un évènement

Définition

E est une expérience aléatoire. Désignons par Ω l'univers associé à E.

On appelle probabilité sur l'univers Ω, une application P de l'ensemble des parties P (Ω) vers $[0; 1]$ *qui, à toute partie A de Ω, associe le nombre réel P(A).*

Le nombre réel P(A) vérifie :

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- *la probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui constituent A ;*
- $P(\Omega) = 1$;
- $P(\emptyset) = 0$;

Propriétés

- *P est une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux évènements de Ω, on a :*
  - *Si* $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
  - $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ *où* $\bar{A}$ *est l'évènement contraire de A tel que* $A \cup \bar{A} = \Omega$ *et* $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- *Si* $A_1, A_2, \dots, A_p$ *sont p évènements deux à deux disjoints alors,*

  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_p)$.

Equiprobabilité

Définition

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les évènements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité.

L'équiprobabilité est généralement suggérée par des expressions comme : « dé parfait » ; « dé parfaitement équilibré » ; « dé non pipé » ; « pièce parfaite » ; « boules indiscernables au toucher » ; « cartes bien battues » ; « tirage au hasard »…

Conséquences

Si $\Omega = \{a_1;\ a_2; \dots; a_n\}$, *Card* $\Omega = n$.

S'il y a équiprobabilité, $P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \dots = P(\{a_n\}) = \frac{1}{n}$

Propriété

P est une probabilité sur un univers Ω.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout évènement A, on a : $P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega}$.

Remarque

Les éventualités de l'évènement A sont appelées les cas favorables à A et celles de l'univers Ω sont les cas possibles.

On écrit alors $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Exemples

Leçons de la compétence de base 2 du troisième trimestre
Leçon : Probabilité

SEQUENCE 1

Vocabulaire probabiliste : Expérience aléatoire, univers, éventualité

Objectif

Définir une expérience aléatoire, un univers et une éventualité

Introduction

La théorie des probabilités permet l'étude de phénomènes dont la réalisation est due au hasard.

Par exemple le lancer d'une pièce de monnaie ; le jet d'un dé ; le tirage au sort d'une personne d'un groupe ; le tirage d'une carte d'un jeu ; le tirage des billets gagnant d'une loterie, etc.

Univers des éventualités d'une expérience aléatoire

Activité 1

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on lance ce dé sur la table. On lit, lorsqu'il s'arrête sur la table, le chiffre de la face supérieure.

Quel est l'ensemble des résultats possibles ?

Peut-on prévoir un résultat avant le lancer de ce dé ?

Définitions

- *Une expérience aléatoire ou épreuve est une expérience dont le résultat n'est pas prévisible.*
- *Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité**.*
- *L'ensemble de toutes les éventualités est l'**univers** associé à l'épreuve. Cet ensemble est généralement noté Ω.*

Exemples

Le lancer d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est une **expérience aléatoire**. Les **éventualités ou issues** de cette expérience aléatoire sont :1, 2, 3, 4, 5 , 6.

L'univers associé à cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

SEQUENCE 2

Vocabulaire probabiliste : Evènements, évènements élémentaires, union ou intersection d'évènements

Objectif

Définir un évènement, un évènement élémentaire, une union ou une intersection d'évènements

Evènements, évènements élémentaires

Pour $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- « Le chiffre obtenu est impair », c'est avoir comme résultat : 1 ou bien 3 ou bien encore 5.

On dit que l'évènement A « le chiffre obtenu est impair » est réalisé lorsqu'on obtient l'une des éventualités : 1 ; 3 ; 5. On écrit $A = \{1; 3; 5\}$; donc A est une partie de Ω.

- On dit alors que l'évènement « le chiffre obtenu est 2 » est un **évènement élémentaire**.

Ω a pour évènements élémentaires$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ et $\{6\}$.

- Il n'est pas possible de réaliser l'évènement « le chiffre obtenu est 7 », cet événement est dit **impossible.**
- il est toujours possible de réaliser l'évènement « le chiffre obtenu est plus petit que 7 », cet évènement est dit **certain**.

Définitions

Ω étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, on appelle évènement de Ω toute partie de l'ensemble Ω.

- *Lorsque cet évènement est un singleton, il est appelé **évènement élémentaire** ;*
- *Lorsque cet évènement est l'ensemble vide, il est appelé **évènement impossible** ;*
- *Lorsque cet évènement est l'ensemble Ω, il est appelé **évènement certain**.*

Réunion, intersection de deux évènements

Pour $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Considérons les évènements suivants :

B « obtenir un chiffre pair » ;

C « obtenir un multiple de 3 » ;

On a $B = \{2,4,6\}$ *et* $C = \{3,6\}$.

- Réaliser l'évènement B ou l'évènement C c'est obtenir un chiffre pair ou un multiple de 3 ; on dit que l'on a réalisé l'évènement (B ou C). Cet évènement est noté $B \cup C$.
  $B \cup C = \{2,3,4,6\}$.
- Réaliser l'évènement B et l'évènement C, c'est obtenir un chiffre pair multiple de 3 ; on dit que l'on a réalisé l'évènement (B et C). Cet évènement est noté $B \cap C$
  $B \cap C = \{6\}$.

Définitions

Ω étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. M et N des évènements de Ω.

- *On appelle évènement (M ou N) la partie $M \cup N$ de Ω.*
- *On appelle évènement (M et N) la partie $M \cap N$ de Ω.*

SEQUENCE 3

Vocabulaire probabiliste : Evènements contraires, évènements incompatibles

Objectif

Définir des évènements contraires ou des évènements incompatibles

Evènements contraires – évènements incompatibles

Pour $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- A est l'évènement « le chiffre obtenu est impair » ; on a : $A = \{1; 3; 5\}$
- $\bar{A} = \{2; 4; 6\}$.

$\bar{A}$ est donc l'évènement « le chiffre obtenu est pair ». $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans Ω.

On dit que $\bar{A}$ est l'**évènement contraire** de A ou que $\bar{A}$ et A sont des **évènements contraires**.

– Considérons les deux évènements suivants :

D « le chiffre obtenu est plus grand que 3 » et E « le chiffre obtenu est plus petit que 3 »

Les évènements D et E ne peuvent se réaliser simultanément ; on dit ces deux évènements sont incompatibles.

$D = \{4; 5; 6\}$; $E = \{1; 2\}$ d'où $D \cap E = \emptyset$.

Deux évènements contraires sont incompatibles.

Définitions

Ω étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. A et B des évènements de Ω.

– *On appelle évènement contraire de A la partie $\bar{A}$ de Ω complémentaire de A dans Ω.*

– *On dit que l'évènement A et l'événement B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$.*

Tableau de correspondance entre le langage des ensembles et le langage des probabilités

Langage des ensembles	Langage des probabilités	Exemples
Ensemble des résultats Ω	Univers Ω	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
singleton {3}	Evènement élémentaire	{3}
partie A de Ω : $A \subset \Omega$	évènement A	$A = \{1; 3; 5\}$
Partie pleine de Ω	Evènement certain	« Obtenir un chiffre plus petit que 7 »
Partie vide :Ø	Evènement impossible	« obtenir 0 »
Réunion de A et B : A∪B	Evènement « A ou B »	« obtenir un chiffre pair ou multiple de 3 »
Intersection de A et B : A∩B	Evènement « A et B »	« obtenir un chiffre pair et multiple de 3 »
Ensembles A et B disjoints A∩B = 0Ø	Evènements incompatibles A et B	A : « obtenir un chiffre impair » B : «obtenir 4 »
A complémentaire de B dans Ω	A évènement contraire de B	A : « obtenir un chiffre impair » B : « obtenir un chiffre pair »

SEQUENCE 4

Probabilité d'un évènement

Objectif

Définir une probabilité sur un univers

Introduction

On lance un dé bien équilibré et on note le chiffre apparu sur la face supérieure.

L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

La chance d'apparition est la même pour chaque face.

- L' évènement $\{3\}$ a une chance sur six d'être réalisé ; on dit que la probabilité de cet évènement est $\frac{1}{6}$.
- L'événement $\{2; 3\}$ a deux chances sur six d'être réalisé ; on dit que la probabilité de cet évènement est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- L'évènement $\{1; 3; 5; 6\}$ a quatre chances sur six d'être réalisé ; on dit que la probabilité de cet évènement est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- L'événement impossible n'a aucune chance d'être réalisé ; sa probabilité est 0.
- L'événement certain a six chances sur six d'être réalisé ; sa probabilité est 1.

Définition

Ω étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

Une probabilité sur l'univers Ω est une application P de l'ensemble des parties de Ω vers $[0; 1]$*, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :*

- *La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent ;*
- *La probabilité de l'événement impossible est 0 ;*
- *La probabilité de l'événement certain est 1.*

SEQUENCE 5

Exemple introductif de calcul des probabilités

Objectif

Calculer une probabilité à partir d'un exemple et énumérer ses propriétés

Exemple

On lance un dé pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro apparu. La probabilité d'apparition d'un numéro pair est le double de la probabilité d'apparition d'un numéro impair et les probabilités d'apparition de deux numéros de même parité sont égales.

– Calculons la probabilité d'apparition de chaque face.

L'univers associé à cette épreuve est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Soit p la probabilité d'un numéro pair et q la probabilité d'un numéro impair.

On a $p = 2q$.

Or $P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow 3p+3q = 1 \Leftrightarrow 3(2q) + 3q = 1 \Leftrightarrow 9q = 1 \Leftrightarrow q = \frac{1}{9}$ et $p = \frac{2}{9}$

Le tableau ci-dessous donne la probabilité d'apparition de chaque face :

x	1	2	3	4	5	6
P(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

– Quelle la probabilité d'apparition d'un numéro inférieur ou égal à 3 ?

La probabilité cherchée est celle de l'événement : $A = \{1; 2; 3\}$.

On $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$. $P(A) = \frac{4}{9}$.

SEQUENCE 6

Propriétés des probabilités

Objectif

Utiliser les propriétés des probabilités

Propriétés

1 – Si A et B sont deux événements quelconques, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2 – Si $\bar{A}$ est contraire de l'événement A, alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Equiprobabilité

– *Lorsque les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.*

– *Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme : « dé parfait», « dé non pipé », « pièce parfaite », « tirage au hasard », « boules indiscernables au toucher », « cartes bien battues », etc.*

Propriété

Soit P une probabilité définie sur l'univers Ω.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout événement A, on a : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

Autrement : $P(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$

Attention

Quel que soit l'événement A, on a : $0 \leq P(A) \leq 1$.

SEQUENCE 7

Exemples de calcul de probabilités : Tirages simultanés

Objectif

Calculer les probabilités lorsque les tirages sont simultanés

Cas de tirages simultanés

Exemples

1) On tire simultanément et au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer un roi ? de tirer le roi cœur ?

On est dans la situation d'équiprobabilité.

Soit Ω l'univers associé à l'épreuve, A l'événement : « tirer un roi » et B l'événement tirer le roi cœur.

Le nombre de cas possibles est : card (Ω)= C_{32}^5. card(Ω) = $C_{32}^5 = \frac{32!}{5!\times 27!} = 201.376$

– Pour l'événement A : le nombre de cas favorables est :

$$\text{card(A)} = C_4^1 C_{28}^4 = 4 \times \frac{28!}{4!\times 24!} = 4 \times \frac{28\times 27\times 26\times 25}{4\times 3\times 2} = 14 \times 9 \times 13 \times 25 = 40.950$$

Donc la probabilité cherchée est $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{40.950}{201.376} = \frac{14\times 9\times 13\times 25}{32\times 31\times 29\times 7} = \frac{2925}{7192} = \mathbf{0,407}$.

– Pour l'événement B : le nombre de cas favorables est : $\text{card(B)} = C_1^1 C_{31}^4 = C_{31}^5$

Donc la probabilité cherchée est $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_{31}^4}{C_{32}^5} = \frac{\frac{31\times 30\times 29\times 28}{4\times 3\times 2}}{\frac{32\times 31\times 30\times 29\times 28}{5\times 4\times 3\times 2}} = \mathbf{\frac{5}{32}}$.

2) Un sac contient dix boules indiscernables au toucher dont 6 rouges et 4 noires.

On tire simultanément, au hasard, trois boules du sac et on note leurs couleurs.

Calculons la probabilité de chacun des événements suivants :

– A « les trois boules tirées contiennent exactement deux boules rouges » ;

– B : « les trois boules tirées sont de même couleur ».

Soit Ω l'univers associé à l'épreuve.

Nombre de cas possibles est : card(Ω) $= C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\times 7!} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$

soit A l'événement : « tirer exactement deux boules rouges »

card(A) $= C_6^2 C_4^1 = 15 \times 4 = 60$

la probabilité cherchée est de : P(A) $= \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

Soit B l'événement : « tirer trois boules de même couleur »

Card(B) $= C_6^3 + C_4^3 = 20+4 = 24$

P(B) $= \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

SEQUENCE 8

Exemples de calcul de probabilités : Tirages successifs avec remise

Objectif

Calculer les probabilités lorsque les tirages sont successifs avec remise

Cas de tirages successifs avec remise

Exemple

Un sac contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq sont rouges et trois noires. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on la remet dans le sac puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.

Calculons la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « les deux boules tirées sont de couleur différentes » ;

B : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

Card(Ω) $= 8^2 = 64$.

Soit A l'événement : « tirer deux boules de couleurs différentes » ;

Les résultats favorables sont les couples (Rouge ; Noire)ou (Noire ;Rouge) ; donc :

Card(A) $= 5^1\times 3^1 + 3^1\times 5^1 = 30$

P(A) $= \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$

Soit B l'événement : « tirer deux boules de même couleur »

Les résultats favorables sont les couples (Rouge, Rouge) ou (Noire, Noire).

Card(B) $= 5^2 + 3^2 = 34$

P(B) $= \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$.

SEQUENCE 9

Exemples de calcul de probabilités : Tirages successifs sans remise

Objectif

Calculer les probabilités lorsque les tirages sont successifs sans remise

Tirages successifs sans remise

Exemple

Un sac contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq sont rouges et trois noires. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on ne la remet pas dans le sac puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.

Calculons la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « les deux boules tirées sont de couleur différentes » ;

B : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

$\text{Card}(\Omega) = A_8^2 = 8 \times 7 = 56.$

Soit A l'événement : « tirer deux boules de couleurs différentes » ;

Les résultats favorables sont les couples (Rouge ; Noire) ou (Noire ; Rouge).

$\text{Card(A)} = A_5^1 A_3^1 + A_3^1 A_5^1 = 15 + 15 = 30$

Donc la probabilité cherchée est $\text{P(A)} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.

Soit B l'événement : « tirer deux boules de même couleur »

Les résultats favorables sont les couples (Rouge ; Rouge) ou (Noire ; Noire)

$\text{Card(B)} = A_5^1 A_4^1 + A_3^1 A_2^1 = 20 + 6 = 26.$

Donc la probabilité cherchée est $\text{P(B)} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$.

SEQUENCE 10

Exemples de calcul de probabilités : Tirages de boules

Objectif

Calculer les probabilités dans le cas du tirage de boules

Tirage d'une Boule

Exemple

Une urne contient six boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 6. On tire une boule de cette urne et on note son numéro.

Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ? D'avoir un chiffre plus grand que 4 ?

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $\text{card}(\Omega) = 6$.

Soit A l'événement : « avoir un chiffre pair » ; $A = \{2; 4; 6\}$, $\text{card}(A) = 3$.

D'où $P(A) = \frac{card(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Soit B l'événement: « avoir un chiffre plus grand que 4 » ; $B = \{5; 6\}$, $\text{card}(B) = 2$.

D'où $P(B) = \frac{card(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

SEQUENCE 11

Exemples de calcul de probabilités : Tirages de cartes

Objectif

Calculer les probabilités dans le cas du tirage de cartes

Tirages de cartes

Exemple

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité de tirer un trèfle ? Un As ? la Dame de cœur ? Une carte rouge ?

Tirer une carte d'un jeu de 32 cartes est une expérience aléatoire dont l'univers Ω des éventualités contient 32 éléments.

Soit A l'événement « la carte tirée est un trèfle », $P(A) = \frac{card(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Soit B l'événement « la carte tirée est un As », $P(B) = \frac{card(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Soit C l'événement « la carte tirée est la Dame de cœur », $P(C) = \frac{card(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{32}$.

Soit D l'événement « la carte tirée est rouge », $P(D) = \frac{card(D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

SEQUENCE 12

Exemples de calcul de probabilités : Lancer d'un dé parfait

Objectif

Calculer les probabilités dans le cas du lancer d'un dé parfait

Lancer d'un dé parfait

Exemple

On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 ; on lit le numéro inscrit sur la face supérieure.

Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ? D'avoir un chiffre plus grand que 4 ?

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $\text{card}(\Omega) = 6$.

Soit A l'événement : « avoir un chiffre pair » ; $A = \{2; 4; 6\}$, $\text{card}(A) = 3$.

D'où $P(A) = \frac{card(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Soit B l'événement: "avoir un chiffre plus grand que 4" ; $B = \{5; 6\}$, $\text{card}(B) = 2$.

D'où $P(B) = \frac{card(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Leçon : Statistiques

SEQUENCE 13

Organisation des données d'une série statistique à une variable : les différents types de caractères

Objectif

Distinguer les différents types de caractère

NB : Dans ce paragraphe, nous allons rappeler certaines définitions et propriétés rencontrées dans les classes antérieures et qui seront utiles dans l'étude des séries statistiques à deux caractères.

Organisation des données

Exemple 1

Caractère qualitatif

La bibliothèque d'un lycée contient dans ses rayons 1000 livres, ainsi répertoriés :

Genre	Manuels scolaires	Roman	Poésie	Document
Effectif	350	400	50	200

La population étudiée est l'ensemble des ouvrages de la bibliothèque. Le caractère (genre de l'ouvrage) prend quatre modalités non numériques. Il est dit qualitatif.

Exemple 2

Caractère quantitatif

Une enquête portant sur le nombre d'enfants dans chacun des foyers d'un village a donné les résultats suivants :

Nombre d'enfants	0	1	3	4	5	6	8	9	10
Effectif	2	3	5	4	11	11	8	4	2

L'effectif total est 50. Les modalités sont des nombres réels. Ce caractère est dit quantitatif.

Exemple 3

Caractère quantitatif à modalités regroupées en classes

A l'issue des épreuves écrites au baccalauréat, le jury repartit en fonction de la moyenne (sur 20) obtenue, les candidats en six catégories : refusés, admissibles, admis mention passable, admis mention assez bien, admis mention très bien. Ces données sont consignées dans le tableau ci-dessous :

Moyenne obtenue	[0; 8[	[8; 10[	[10; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 20[
Effectif	40750	20555	11200	2002	1054	523

Le caractère étudié est la moyenne obtenue par les candidats. Les modalités sont regroupées en classes, chaque classe correspond à une catégorie. Les classes ne sont pas d'amplitudes égales : les classes ont respectivement pour amplitudes 8 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 4.

SEQUENCE 14

Caractéristiques de position : le mode

Objectif

Déterminer le mode d'une série statistique à une variable

NB : Il est souvent nécessaire de résumer une série statistique par un nombre appelé caractéristique de position qui donne une idée sur des valeurs prises par le caractère. Rappelons-nous du mode et de la moyenne arithmétique d'une série statistique.

Définition du mode

On appelle mode d'une série statistique toute modalité d'effectif maximum.

Exemple : Une enquête effectuée à la demande d'un fabricant de chaussures et portant sur une population masculine a donné les résultats consignés dans le tableau suivants :

Pointure	39	40	41	42	43	44	45	46
fréquence	5%	10%	13%	17%	20%	17%	13%	5%

Le mode de la série ci-dessus est 43. On conclut en disant que la pointure la plus courante dans cette population est 43.

SEQUENCE 14

Caractéristiques de position : la moyenne arithmétique

Objectif

Déterminer la moyenne arithmétique d'une série statistique à une variable

Définition de la moyenne arithmétique

Pour une série statistique (xi, ni) $_{1\leq i\leq p}$*, la moyenne arithmétique est le nombre, noté* $\bar{x}$*, défini par :* $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_1x_1+n_2+\cdots+n_px_p}{n_1+n_2+\cdots+n_p}$

Exemple

Soit (x_i, n_i) une série statistique déterminée par :

x_i	0	1	3	4	5	6	8	9	10
n_i	2	3	5	4	11	11	8	4	2

Calculons la moyenne

Disposition pratique

x_i	0	1	3	4	5	6	8	9	10	total
n_i	2	3	5	4	11	11	8	4	2	50
n_ix_i	0	3	15	16	55	66	64	36	20	275

Donc $\bar{x} = \frac{275}{50} = 5{,}5$

SEQUENCE 15

Caractéristiques de dispersion

Objectif

Calculer les caractéristiques de dispersion d'une série statistique à une variable

NB : Dans certains cas les caractéristiques de position ne suffisent pour porter un jugement de valeur.

Une caractéristique de dispersion est un nombre qui permet de rendre compte de la répartition des individus autour de la moyenne. Nous nous rappelons les définitions de la variance et de l'écart type qui sont des indicateurs très importants dans toute étude statistique.

Définitions

Soit une série statistique $(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ *de moyenne* $\bar{x}$.

- *La variance est le nombre réel V(x) défini par :* $V(x)=\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i-\bar{x})2}{\sum_{i=1}^{p} n_i}$
- *L'écart type, noté* ∂_X, *est la racine carrée de la variance :* $\partial_X = \sqrt{V(X)}$

En pratique on utilise la formule développée de V(x) suivante: $V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2$

où $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$.

SEQUENCE 16

Exemple de calcul de caractéristiques de dispersion

Objectif

A partir d'un exemple, calculer les caractéristiques de dispersion d'une série statistique à une variable

Exemple

Calculons la variance et l'écart-type de la série statistique définie par ;

x_i	8	9	12	13
n_i	2	3	2	1

Disposition pratique

x_i	8	9	12	13	total
n_i	2	3	2	1	8
$n_i x_i$	16	27	24	13	80
${x_i}^2$	64	81	144	169	//////////////
$n_i {x_i}^2$	128	243	288	169	828

On a : $\bar{x} = \frac{80}{8} = 10$; V(x) $= \left(\frac{828}{8}\right) - 10^2 = 103{,}5 - 100 = 3{,}5$ et $\partial_X = \sqrt{3{,}5} = 1{,}87$

SEQUENCE 17

Organisation des données d'une série statistique à deux caractères

Objectif

Organiser les données d'une série statistique à deux variables

NB : On peut, sur une population donnée, étudier deux caractères quantitatifs : la modalité associée à chaque individu est alors un couple de nombres réels. Ainsi, on construit une série statistique à deux caractères ou série statistique double.

Exemple introductif

On a relevé le poids (en kg) et la taille (en cm) de 10 élèves. On a obtenu les résultats suivants :

Poids (x)	65	68	62	62	68	62	65	68	71	74
Taille (y)	165	168	174	168	171	174	174	171	171	174

Ces données peuvent nous permettre de définir deux séries statistiques à une variable : séries des poids (x_i, n_i) et séries des tailles (y_i, n_j).

Série des poids

Poids (x_i)	62	65	68	71	74
Effectif (n_i)	3	2	3	1	1

tailles (y_j)	165	168	171	174
Effectif (n_j)	1	2	3	4

Série des tailles

Posons X={62, 65, 68, 71, 74} $et\ Y = \{165; 168; 171; 174\}$.

	62	65	68	71	74	Total
165	0	1	0	0	0	1
168	1	0	1	0	0	2
171	0	0	**2**	1	0	3
174	2	1	0	0	1	4
Total	3	2	3	1	1	10

A chaque couple $(x\ ;\ y)$ de l'ensemble X×Y, on associe le nombre n d'élèves de poids x et de taille$y$. Par exemple, au couple (68 ; 171) on a associé le nombre 2 c'est-à-dire qu'il y a parmi les 10 élèves 2 ont chacun un poids de 68kg et une taille de 171cm.

On définit ainsi une série statistique à deux caractères (ou série double).

Cette série est représentée par le tableau ci-dessus. La série double peut être notée $(x_i, y_{i,} n_{ij})$.

- Les totaux de la dernière ligne sont les effectifs de la série des poids ;
- Les totaux de la dernière colonne sont les effectifs de la série des tailles.

Puisque ces effectifs apparaissent « en marge » du tableau à double entrée, les séries des poids et les séries des tailles sont appelées des séries marginales de la série double.

SEQUENCE 18

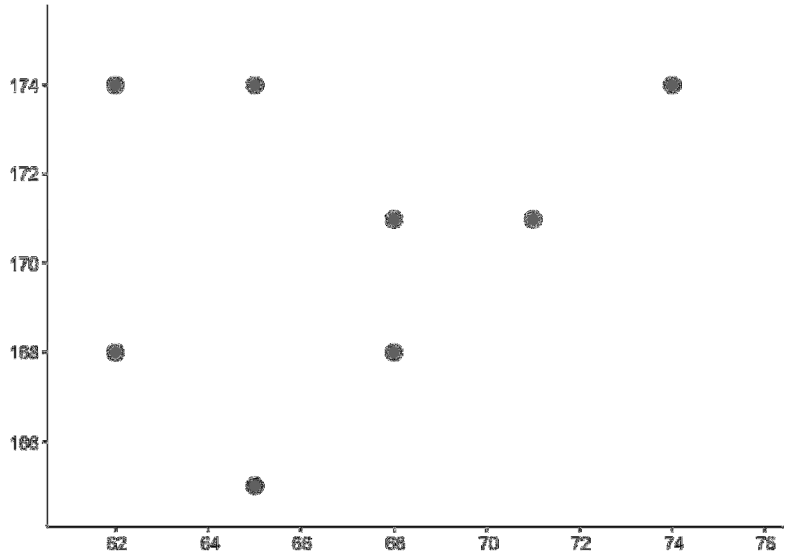
Nuage de points associé à une série double

Objectif

Construire le nuage de points associé à une série double

Nuage de points

Le plan est muni d'un repère orthonormal. L'ensemble des points M_{ij} du plan de coordonnées (x_i, y_j) est appelé nuage de points associé à la série. Représentons le nuage de points associé à la série définie ci-dessus par points pondérés.



SEQUENCE 19

Point moyen d'un nuage de points associé à une série double

Objectif

Déterminer le point moyen d'un nuage de points associé à une série double

Point moyen d'un nuage

Considérons l'exemple précédent et déterminons le point moyen du nuage.

Le point moyen G du nuage est le point du plan dont l'abscisse est la moyenne de la série des poids et l'ordonnée la moyenne de la série des tailles. En effet :

$$\bar{x} = \frac{3\times62+2\times65+3\times68+1\times71+1\times74}{10} = \frac{665}{10} = 66{,}5$$

$$\bar{y} = \frac{1\times165+2\times168+3\times171+4\times174}{10} = \frac{1710}{10} = 171.$$

G (66,5 ; 171) est donc le point moyen du nuage associé à la série double.

Définition

Soit (x_i, y_j) une série statistique à deux caractères quantitatifs.

On appelle point moyen du nuage de points représentant cette série, le point de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$, où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j).

SEQUENCE 20

Exemple de détermination de point moyen d'un nuage de points associé à une série double

Objectif

A partir d'un exemple, déterminer le point moyen d'un nuage de points associé à une série double

Exemple

Les notes obtenues par dix élèves aux épreuves d'anglais et d'histoire d'un examen sont consignées dans le tableau suivant :

Anglais (x_i)	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
Histoire (y_j)	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

Les moyennes des séries statistiques marginales sont :

$\bar{x} = \frac{3+5+2\times6+2\times9+2\times9+2\times12+2\times14}{10} = 9$

$\bar{y} = \frac{5+2\times8+2\times10+2\times13+17+2\times16}{10} = 11{,}6$

G(9 ; 11,6) est le point moyen du nuage associé à la série.

(Faire une représentation graphique)

SEQUENCE 21

Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

Objectif

Ajuster linéairement un nuage de points associé à une série double

Considérons dans ce paragraphe une série statistique à deux caractères x et y tel que l'effectif de chacune des modalités est égal à 1.

Le nuage de points associé à cette série est l'ensemble des points $M_i$de coordonnées (x_i, y_j).

Lorsque le nuage de points associé à une série a une forme qui se rapproche d'une droite alors on détermine une droite (D) d'équation $y = ax + b$ et qui passe le plus près possible des points du nuage.

Principe de Mayer

Pour déterminer la droite d'ajustement d'un nuage par la méthode Mayer, on peut :

- Partager le nuage en deux sous nuages disjoints E_1 et E_2 de même effectif, dans l'ordre où les points se présentent ;

- Déterminer respectivement les points moyens G_1 et G_2 des sous nuages E_1 et E_2 ;
- Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2).

La droite (G_1G_2) déterminée et appelée droite de Mayer, ajuste bien le nuage des points de la série double.

SEQUENCE 22

Exemple d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer

Objectif

A partir d'un exemple, ajuster linéairement un nuage de points associé à une série double

Exemple

Considérant la série double donnée par le tableau ci-dessous :

Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffres d'affaires (y_j)	41	68	55	80	95	104	100	122

Déterminons la droite d'ajustement par la méthode de Mayer :

Sous nuage E1

x_i	1	2	3	4
y_j	41	68	55	80

Sous nuage E2

x_i	5	6	7	8
y_j	95	104	100	122

On a : $G1(\frac{1+2+3+4}{4};\frac{41+68+55+80}{4})$ soit G_1 (2,5 ; 61).

$G2(\frac{5+6+7+8}{4};\frac{95+104+100+122}{4})$ soit G_2 (6,5 ; 105,25)

Résolvons le système suivant pour conclure : $\begin{cases} 2{,}5x + b = 61 \\ 6{,}5x + b = 105{,}25 \end{cases}$

$$\begin{cases} a = 11{,}0625 \\ b = 33{,}34375 \end{cases}$$

La droite (G_1G_2) a donc pour équation : $y = 11{,}0625x + 33{,}34375$.

SEQUENCE 23

Covariance

Objectif

Définir et calculer la covariance

Définition

Soit (x_i, y_j)*.une série statistique à deux caractères x et y, d'effectif total N.*

La ***covariance*** *de cette série est le nombre réel, noté* ***cov(x, y),*** *tel que :*

$Cov(x, y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$.

En pratique on calcule facilement cov(x, y) en se servant de sa formule développée suivante : $cov(x, y) = (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i) - \bar{x}\bar{y}$

Exemple

Soit la série statistique à deux caractères (exemple des notes en anglais et en histoire) :

x	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
y	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

Calculons la covariance.

											total
x_i	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14	90
y_j	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16	116
$x_i y_j$	90	156	40	60	117	238	15	48	192	224	1180

On a : $\bar{x} = \frac{90}{10} = 9; \bar{y} = \frac{116}{10} = 11{,}6$ et $\text{cov(x,y)} = \frac{1180}{10} - 9 \times 11{,}6 = 118 - 104{,}4 = 13{,}6$

cov(x, y) = 13,6

SEQUENCE 24

Coefficient de corrélation linéaire

Objectifs

- Définir et calculer le coefficient de corrélation linéaire ;
- Interpréter le coefficient de corrélation linéaire.

Définition

Soit une série statistique double dont les caractères sont x et y. On note ∂_X *et* ∂_Y *les écarts types respectifs de x et y et cov(x, y) la covariance de la série double.*

On appelle coefficient de corrélation linéaire entre les caractères x et y le nombre réel r défini par : $r = \frac{c(x,y)}{\partial_X \partial_Y}$.

Interprétation du coefficient de corrélation

Il y a « bonne corrélation » ou « forte corrélation » entre x *et* y si $0,87 \leq |r| \leq 1$.

Il y a donc faible corrélation entre x *et* y si $0 \leq |r| < 0,87$.

SEQUENCE 25

Exemple de calcul de coefficient de corrélation linéaire

Objectifs

A partir d'un exemple, calculer le coefficient de corrélation linéaire

Exemple

Considérons l'exemple précédent portant sur les notes des dix élèves en anglais et en histoire.

Calculons le coefficient de corrélation r entre les notes d'anglais et les notes en histoire.

Sachant que $\bar{x} = 9$, $\bar{y} = 11,6$ *et* $cov(x, y) = 13,6$. Calculons d'abord v(x) et v(y), et ensuite r.

											total
x_i	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14	90
y_j	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16	116
${x_i}^2$	81	144	25	36	81	196	9	36	144	196	948
${y_i}^2$	100	169	64	100	169	289	25	64	256	256	1492

On a : v(x) = $(\frac{948}{10}) - 9^2 = 94{,}8 - 81 = 13{,}8$; v(y) = $\left(\frac{1492}{10}\right) - (11{,}6)^2 = 149{,}2 - 134{,}56 = 14{,}64$.

Enfin r = $\frac{c(x,y)}{\partial_X \partial_Y} = \frac{13{,}6}{\sqrt{13{,}8 \times 14{,}64}} = \frac{13{,}60}{14{,}214} = 0{,}96$

r = 0,96

Il y a une forte corrélation entre les notes d'anglais et les notes d'histoire obtenues par ce groupe d'élèves.

Exercices d'entrainement de la compétence de Base du troisième trimestre

Exercice 1

Une classe de terminale littéraire comprend 45 élèves. Parmi ces élèves, 24 pratiquent la natation, 32 pratiquent le judo et 15 pratiquent les deux sports. On rencontre, au hasard, un élève à la sortie de la classe.

Quelle est la probabilité pour qu'il pratique au moins un des deux sports ?

Exercice 2

Dans un sac contenant 3 boules blanches et 5 boules noires, on prélève 2 boules au hasard, simultanément. Calculer la probabilité de prélever :

a) 2 boules blanches ;
b) 2 boules noires ;
c) 2 boules de même couleur ;
d) 2 boules de couleurs différentes.

Exercice 3

Dans un sac se trouvent quatre pièces de 10 francs, trois pièces de 25 francs et une pièce de 50 francs.

1) On tire au hasard simultanément deux pièces du sac.

a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux pièces de même valeur ?

2) On tire maintenant, toujours au hasard et simultanément, trois pièces de ce sac.

a) Quel est le nombre de tirage possibles ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement la somme de 85 francs ?
c) Quelle est la probabilité de tirer au moins une pièce de 10 francs ?

Exercice 4

Dans un groupe de 20 personnes, on doit choisir, au hasard, trois représentants. Saliou et Julie sont membres de ce groupe. Calculer la probabilité d'événements

A : « ni Saliou, ni Julie ne font partie des trois représentants » ;

B : « Saliou et Julie font partie de trois représentants » ;

C : « Seul Julie fait partie des trois représentants ».

Exercice 5

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules noires.

1) On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne. Déterminer la probabilité des événements suivants :

   A : « Les 2 boules tirées sont de la même couleur » ;

   B : « il ya au moins une boule rouge parmi les 2 boules tirées ».

2) On tire successivement et sans remise, au hasard, les 2 boules. Déterminer la probabilité des événements suivants :

   C : « la première boule tirée est rouge » ;

   D : « Les boules tirées sont de couleurs différentes ».

Exercice 6

Une entreprise veut engager 4 ingénieurs dans 4 spécialités différentes. 6 ingénieurs se présentent. Combien de choix s'offrent au responsable de l'embauche dans les 3 cas suivants ?

1) Les 6 ingénieurs sont polyvalents (pouvant tous occupés n'importe lequel des 4 postes).
2) Un seul est polyvalent pour les 4 branches, les 5 autres le sont seulement dans 3 branches.
3) Parmi ces 6 candidats se trouvent 3 hommes et 3 femmes, tous polyvalents. L'équipe recherche doit comprendre 2 hommes et 2 femmes.

Exercice 7

On a rangé en vrac dans une boite, neuf cartes postales indiscernable au toucher. Cinq de ces cartes proviennent du Tchad, une provient du Maroc et trois de la Chine. On tire simultanément et au hasard trois cartes de la boite.

1) Démontrer que la probabilité de n'obtenir aucune carte du Tchad parmi les trois cartes est égale à $\frac{1}{21}$.
2) Calculer la probabilité des événements A « lors d'un tirage, obtenir une carte de chaque pays » et B « lors d'un tirage, obtenir au moins une carte du Tchad »
3) X est la variable aléatoire comptant pour chaque tirage de trois cartes, le nombre de cartes de la Chine. Donner la loi de probabilité de X ainsi que sa variance.
4) On répète ce tirage n fois de suite en remettant à chaque fois les trois cartes tirées dans la boite. A partir de quelle de n, la probabilité d'obtenir au moins un tirage sans carte du Tchad est-elle supérieure ou égale à 0,95 ?

Exercice 8

Une boite contient 4 boules rouges ,3 boules vertes et n boules jaunes ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$).

On tire simultanément 2 boules de la boite et on suppose que les tirages sont équiprobables.

1) Exprimer en fonction de n, les probabilités des évènements :

A : « Les deux boules sont jaunes »

B : « Le tirage est unicolore »

C : « Le tirage est bicolore »

2) On suppose que $P(A) = \frac{3}{13}$; déduire$n$, puis P(B) et P(C).
3) On suppose que $n = 7$. On répète 10 fois l'expérience en remettant dans la boite après chaque tirage, les deux boules tirées. X est la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de réalisation de l'évènement B.

a) Calculer la probabilité des évènements $(X = 2)$ et $(X \geq 9)$.

b) Calculer l'Esperance mathématique de X et donner une interprétation du résultat.

Exercice 9

On considère la série statistique (xi, yi) donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	2	4	8	8,5

1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i)

2) Rechercher une équation de la droite de régression de y en x (par la méthode de Mayer).

Exercice 10

Mêmes questions pour la série statistique (xi, yi) donnée par :

x_i	3	5	6	7	9
y_j	3	5	11	9	15

Exercice 11

Le directeur des ressources humaines d'une entreprise doit embaucher des ouvriers. Lors des précédents recrutements pour des postes analogues, il a fait une étude statistique et a dressé le tableau suivant :

Salaire proposé (x_i)	60.000	64.000	68.000	72.000
Nombre de candidatures (yj)	11	17	20	23

1) Représenter le nuage de points de coordonnées (xi, yi) associé à la série double.

2) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer. Tracer cette droite.

3) En déduire une estimation du salaire que doit proposer le directeur s'il veut recruter 30 ouvriers.

Exercice 12

Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x d'une population.

Age (xi)	36	42	48	54	60	66
Tension(yi)	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1) Représenter le nuage de points de coordonnées (xi, yi) associé à cette série double.

2) Déterminer, par la méthode de Mayer, une équation de la droite d'ajustement de y en x. et tracer cette droite.

3°) Une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela vous parait-il « normal » ?

Exercice 13

Le tableau suivant donne la production y (en litres) de lait caillé en fonction du poids x (en grammes) d'une certaine levure utilisée.

Production de lait (xi)	10	11	12	13	14	15
Poids de la levure	122	130	135	144	150	153

1) Représenter le nuage de points de coordonnées (xi, yi) associé à cette série double.

2) Déterminer, par la méthode de Mayer, une équation de la droite d'ajustement de y en x. tracer cette droite.

3) En déduire une estimation du poids de levure nécessaire pour produire 20 litres de lait caillé.

Exercice 14

Soit la série statistique double en (x, y) donnée par le tableau :

Xi	0	2	4	6	8	10	12
Yi	2	22	34	38	34	22	2

1) Montrer que le coefficient de corrélation est nulle.(on vérifiera que cov(x, y)=0)

2) Représenter le nuage de points.

Exercice 15

On donne la série statistique suivante à deux variables.

Xi	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Yi	13	12	14	16	a

Une équation de la droite de régression de y en x est : y = 9x+0,6.

1) Calculer $\bar{x}$.

2) Exprimer $\bar{y}$ en fonction a.

3) En utilisant les questions 1 et 2 montrer que : a=20.

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et y. la corrélation est-elle forte ?

5) Estimer la valeur de y pour x = 3,2.

EVALUATION

Exercice 1

Cinq individus ont été témoins d'un fait donné. Parmi eux, on sait que deux seulement sont menteurs mais on ignore lesquels. On questionne deux témoins au hasard sur le fait considéré de façon indépendante.

Quelle probabilité a-t-on :

a) d'obtenir à chaque fois une description véridique des faits ?

b) d'obtenir deux versions contradictoires ?

c) d'obtenir deux versions fausses ?

Exercice 2

Deux dactylographes A et B ont participé à la saisie de 9 documents.

Le tableau ci-dessous indique la répartition du nombre de fautes commises par les deux employés.

Document	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fautes de A	18	20	16	17	18	22	25	24	23
Nombre de fautes de B	6	18	20	37	7	34	22	18	21

1) Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de la série de fautes de A.

2) Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de la série de fautes de B.

3) motiver votre choix parmi les deux dactylographes.

Exercice 3

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$.

1) Calculer $P(-1)$.

2) En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de facteurs du premier degré.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $P(x) = 0$.

4) Résoudre dans IR : a) $2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - \ln x + 6 = 0$: b) $2e^{3x} - 5e^{2x} - e^x + 6 = 0$.

Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice :

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

Conseils et orientation de l'enseignant :

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

Evaluation de la compétence :

☐

☐

☐

Table des matières

Avant – Propos 1

Equipe éditoriale 2

PREFACE 3

INTRODUCTION 5

Partie destinée à l'enseignant 7

FICHE DE PROGRAMMATION ANNUELLE 7

OBJECTIF TERMINAL D'INTEGRATION (OTI) TA 8

Fiche de programmation horaire du 1er trimestre 9

FICHE DE PROGRESSION DU 1er TRIMESTRE 10

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Terminale A 11

Premier trimestre 11

Compétence de Base 1 11

Compétence de Base 2 13

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE 14

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES 14

Leçons de la compétence de base 1 du premier trimestre 15

Leçon : Etude des fonctions numériques d'une variable réelle 15

Leçon : Suites numériques 33

Leçons de la compétence de base 2 du premier trimestre 40

Leçon : Les nombres 40

Exercices d'entrainement de la compétence de base 1 du premier trimestre 50

Exercices d'entrainement de la compétence de base 2 du premier trimestre 54

EVALUATION 55

DEUXIEME TRIMESTRE 57

Programmation horaire du 2e trimestre 57

FICHE DE PROGRESSION 58

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Terminale A 59

Deuxième trimestre 59

Compétence de Base 1 59

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE 62

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES 62

EXERCICES 62

Leçons de la compétence de base 1 du deuxième trimestre 63

Leçon : Fonction logarithme 63

Leçon : Fonction exponentielle népérienne 72
Leçons de la compétence de base 2 du deuxième trimestre 81
Leçon : Equations, inéquations et systèmes 81
Leçon : Dénombrement 88
Exercices d'entrainement de la compétence de base 1 du deuxième trimestre 93
Exercices d'entrainement de la compétence de Base 2 du deuxième trimestre 96
Evaluation 99
TROISIEME TRIMESTRE 102
Programmation horaire du 3e trimestre 102
FICHE DE PROGRESSION 103
Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Terminale A Troisième trimestre 104
Compétence de Base 104
Leçons de la compétence de base du troisième trimestre 106
Probabilités 106
Leçons de la compétence de base 2 du troisième trimestre 107
Leçon : Probabilité 107
Leçon : Statistiques 117
Exercices d'entrainement de la compétence de Base du troisième trimestre 128
EVALUATION 133

EDUNOTE
Portail Integré de Réussite Scolaire

Inscrivez-vous sur www.edunote.org

TECHNIDEV
Institut des Technologies Innovantes pour le Développement

©Technidev2021