MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA PROMOTION CIVIQUE

EDUNOTE
Portail Intégré de Réussite Scolaire

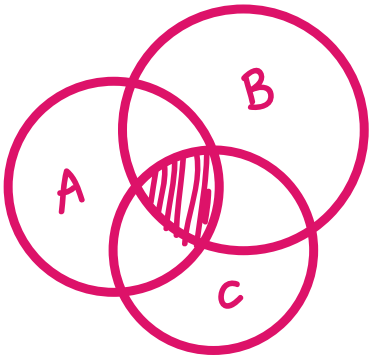
Maths
Terminale S

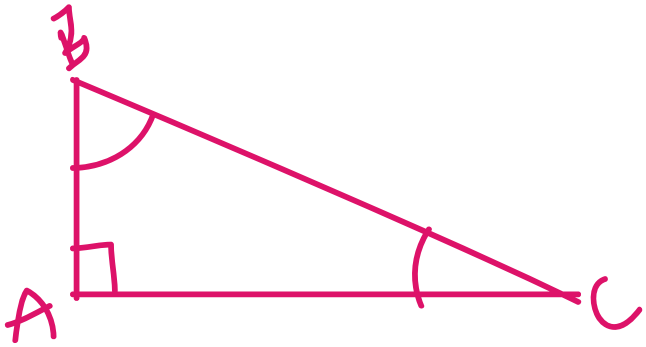
SUPPORT OFFICIEL DE L'ENSEIGNEMENT À DISTANCE AU TCHAD

✓ ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

✓ ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

✓ EXERCICES CORRIGÉS





Inscrivez-vous
www.edunote.org

Appelez le Call center
Pédagogique au
1317

Scannez puis Téléchargez
le Livre en Pdf

unicef
pour chaque enfant

EDUCATION CANNOT WAIT
a global fund for education in emergencies

UNFPA

Centre National des Curricula

TECHNIDEV
Institut des Technologies Innovantes pour le Développement

Avant – Propos

Ce support d'enseignement à distance de Mathématiques destiné aux élèves des classes de Terminales S de l'Enseignement Secondaire Général au Tchad a été conçu dans le cadre du programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Toutes propositions tendant à l'amélioration du document seront les bienvenues.

Bonne lecture

Equipe éditoriale

Le support d'enseignement de Mathématiques à distance au Tchad destiné aux classes de Terminales S (TS) a été réalisé par une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants, en particulier :

MM. :

- MANDO FERDINAND, Professeur certifié de Mathématiques ;
- ALIYABA ZOUA, Professeur licencié de Mathématiques ;
- AHMAT HANSAN YERIMA, Professeur licencié de Mathématiques

Sous la supervision de NGARADOUM FABIEN, Professeur certifié de Mathématiques

Saisie et mise en page

NODJIKOUAMBAYE MBAINAIDA, Chef de Division Bibliothèque au CNC

Assistance technique :

MAHAMAT ABBA MAHAMAT, Professeur de Mathématiques

Coordination :

Dr. ABOUBAKAR ALI KORE, Directeur Général du Centre National des Curricula

KHALID FADOUL DOUTOUM, Directeur Général de TECHNIDEV.

PREFACE

Chers élèves, enseignants, parents et parties prenantes de l'école tchadienne,

Conformément au protocole d'accord de partenariat du 02 septembre 2016 ayant pour objet le renforcement des capacités en technologies de l'information et de la communication dans les établissements secondaires, liant l'Etat Tchadien représenté par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique (MENPC) et l'Institut TECHNIDEV, ce dernier est amené à expérimenter des approches innovantes intégrant le numérique et visant à améliorer l'efficacité interne du système éducatif tchadien. Le résultat attendu de cette convention (MENPC/ TECHNIDEV) étant l'accès à une éducation et la réussite pour tous.

C'est dans ce cadre que le programme Soutien Scolaire Intégré est développé et mis en œuvre par TECHNIDEV, avec pour objectif de :

- Prendre en charge tous les élèves en difficultés scolaires dans une discipline inscrite au programme officiel et ce, conformément au niveau de l'élève ;
- Contribuer à améliorer les notes en classe de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à assurer le passage en classe supérieure de tous les élèves bénéficiaires ;
- Contribuer à améliorer le taux de réussite au BAC de tous les candidats bénéficiaires ;
- Contribuer au maintien des filles à l'école.

TECHNIDEV tient à exprimer ses remerciements aux cadres du MENPC, aux partenaires (ECW et UNICEF), les experts, les inspecteurs, les enseignants et les animateurs pédagogiques et à toutes celles et tous ceux qui ont contribué d'élaboration de ce guide.

Le présent guide pédagogique décline les stratégies d'une prise en charge de l'élève soucieux de la qualité de son éducation et de sa réussite, adhérant au projet et respectant les conditions spécifiques de sa mise en œuvre.

L'enseignant, spécialisé en techniques d'évaluation et de remédiation et en éducation par le numérique, dispose d'un outil lui permettant d'agir avec une méthode axée sur les résultats en terme de développement des compétences des élèves.

Pour les parents, c'est un instrument de suivi quotidien des activités d'apprentissage de l'enfant par rapport à sa progression dans le programme.

J'invite les élèves, les enseignant (e)s et les parents à une exploitation judicieuse de ce guide pour une contribution efficace dans la mise en œuvre de programmes de Soutien Scolaire Intégré (SSI) et partant, la redynamisation de l'école tchadienne.

KHALID FADOUL DOUTOUM

Directeur Général de TECHNIDEV

INTRODUCTION

Le présent guide a été réalisé dans le cadre de programme de Soutien Scolaire Intégré (SSI) mis en place par TECHNIDEV. Une équipe pluridisciplinaire constituée d'inspecteurs, d'animateurs pédagogiques et d'enseignants a contribué à son élaboration.

Ce guide, destiné principalement aux enseignants et aux élèves, a pour but de contribuer à l'amélioration et le renforcement des capacités de l'élève et ce, d'abord par l''identification de ses difficultés suivi un accompagnement stratégique basé sur une approche par compétences. Il s'adresse aux élèves du CM à la Terminale et s'appesantit principalement sur les matières fondamentales que sont le Français et les Mathématiques. Chaque Guide traite un trimestre spécifique conformément au programme de l'enseignement proposé par le Ministère de l'Education Nationale et de la Promotion Civique du Tchad.

Dans ce contexte, le guide met en évidence les principales compétences jugées incontournables pour la réussite de l'élève et suggère aux enseignants des stratégies et méthodologies appropriées pouvant servir à mettre en place une meilleure prise en charge individuelle de l'élève.

Dans son architecture, le guide présente de la manière suivante :

Partie 1 (destinée en premier lieu à l'enseignant) : La Fiche de programmation trimestrielle, la Fiche de Progression et la Fiche de développement de compétences du trimestre mis en exergue par ledit Guide ainsi qu'un chronogramme de prise en charge individuelle de l'élève par l'enseignant.

Partie 2 (destinée aux élèves) : Elle déroule les différentes compétences que l'élève doit développer, ainsi que des épreuves et applications favorisant l'acquisition de ces compétences. Des tableaux d'évaluation des élèves sont consacrés à la fin de chaque épreuve.

Table des Illustrations

= Important pour

= Astuces et

= Exercice

= Exercices

= Relire plusieurs fois

= Compétence acquise

= Compétence en cours

= Compétence non-acquise

OBJECTIFS TERMINAL D'INTEGRATION

Au terme de la classe de Terminale S, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives permettant de mobiliser et de renforcer les connaissances mathématiques antérieures, de développer les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse dans des contextes variés et transversaux.

TS : CB1 : Analyse

Au terme de la classe de Terminale S, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir les fonctions d'une variable réelle, les suites numériques et les calculs différentielles.

TS : CB2 : Algèbre -Arithmétique et probabilité

Au terme de la classe de Terminale S, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir les Structures algébriques, les calculs dans les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ et les calculs de probabilité.

TS : CB3 : Géométrie

Au terme de la classe de Terminale S, l'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives faisant intervenir la géométrie dans le plan et la géométrie dans l'espace.

Fiche de programmation horaire du premier trimestre

1er Trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombre d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
1er Octobre au 31 Décembre 11 semaines	CB1	1	**Limites, continuité et dérivation**	8H	4H	2H	12H	56H en TD 88H en TC
		2	**Etude de fonctions**	8H	4H		12H	
	CB2	1	**Equations linéaires**	8H	4H	2H	12H	
		2	**Arithmétique**	10H	4H		14H	
		3	**Nombres complexes et similitudes**	12H	6H		18H	
	CB3	1	**Calculs barycentriques**	10H	4H	2H	14H	

FICHE DE PROGRESSION DU 1er TRIMESTRE

Trimestre	Période	Contenus		
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité	CB 3 : Géométrie
1	1er Octobre au 10 Novembre	- Fonctions numériques d'une variable réelle : limite continuité et dérivation - Fonctions numériques d'une variable réelle : étude de fonctions	- Equations linéaires - Arithmétique	
	11 Novembre au 31Décembre		- Nombres complexes	- Calculs barycentriques

Les modules d'intégration de Mathématiques de la classe de Terminale S premier trimestre

Compétence de Base 1

Terminale S–CB1 : **L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les fonctions numériques d'une variable réelle : limite, continuité, dérivation et étude des fonctions.**		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
- **Fonctions numériques d'une variable réelle : limite, continuité et dérivation.** ➢ **Limite** ➢ **Continuité**	- **Déterminer la limite d'une fonction en un point et à l'infini.** - **Interpréter graphiquement la limite infinie d'une fonction en un point (asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées).** - **Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient et de la composée de fonctions.** - **Déterminer la limite d'une fonction par comparaison.** - **Interpréter graphiquement la limite à l'infini d'une fonction (asymptotes obliques, asymptotes parallèles à l'axe des abscisses et branches paraboliques).** - **Etudier la continuité d'une fonction en un point.** - **Etudier la continuité d'une fonction sur un intervalle.** - **Déterminer le prolongement par continuité d'une fonction en un point.** - **Etudier la continuité de la composée de deux**	- **Détermination de la limite d'une fonction en un point et à l'infini.** - **Interprétation graphique de la limite infinie d'une fonction en un point (asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées).** - **Détermination de la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient et de la composée de fonctions.** - **Détermination de la limite d'une fonction par comparaison.** - **Interprétation graphique de la limite à l'infini d'une fonction (asymptotes obliques, asymptotes parallèles à l'axe des abscisses et branches paraboliques).** - **Etude de la continuité d'une fonction en un point.** - **Etude de la continuité d'une fonction sur un intervalle.** - **Détermination du prolongement par continuité d'une fonction en un point.** - **Etude de la continuité de la composée de deux fonctions continues.**

	➢ Dérivation	fonctions continues. - Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone. - Déterminer la valeur approchée des zéros d'une fonction continue sur un intervalle. - Déterminer la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle. - Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point (éventuellement à gauche, à droite). - Déterminer une équation de la tangente en un point (éventuellement demi-tangente à gauche, demi-tangente à droite). - Déterminer une approximation affine d'une fonction en un point. - Etudier les variations d'une fonction. - Rechercher et donner la nature des extrémums d'une fonction. - Utiliser les théorèmes sur les inégalités des accroissements finis. - Calculer la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables. - Calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction strictement monotone sur un intervalle. - Calculer les dérivées successives de fonctions. - Utiliser la notation $\frac{df}{dx}$ et $\frac{d^2f}{dx^2}$.	- Détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone. - Détermination de la valeur approchée des zéros d'une fonction continue sur un intervalle. - Détermination de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle. - Calcul du nombre dérivé d'une fonction en un point (éventuellement à gauche, à droite). - Détermination d'une équation de la tangente en un point (éventuellement demi-tangente à gauche, demi-tangente à droite). - Détermination d'une approximation affine d'une fonction en un point. - Etude des variations d'une fonction. - Recherche et détermination de la nature des extrémums d'une fonction. - Utilisation des théorèmes sur les inégalités des accroissements finis. - Calcul de la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables. - Calcul de la dérivée de la réciproque d'une fonction strictement monotone sur un intervalle. - Calcul des dérivées successives de fonctions. - Utilisation de la notation $\frac{df}{dx}$ et $\frac{d^2f}{dx^2}$.
	- Fonctions numériques d'une	- Déterminer l'ensemble d'étude d'une fonction en	- Détermination de l'ensemble d'étude d'une fonction

	variable réelle : étude des fonctions.	utilisant la parité ou la périodicité. - Déterminer les éléments de symétrie de la courbe représentative d'une fonction (axe et centre de symétrie). - Etudier les fonctions polynômes. - Etudier les fonctions rationnelles. - Etudier les fonctions irrationnelles. - Etudier les fonctions trigonométriques.	en utilisant la parité ou la périodicité. - Détermination des éléments de symétrie de la courbe représentative d'une fonction (axe et centre de symétrie). - Etude des fonctions polynômes. - Etude des fonctions rationnelles. - Etude des fonctions irrationnelles. - Etude des fonctions trigonométriques.

Compétence de Base 2

Terminale D–CB2 : **L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les équations linéaires, l'arithmétique et les nombres complexes.**		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
- **Equations linéaires** **Equations linéaires dans $\mathbb{R}^3$**	- **Interpréter géométriquement un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$.** - **Résoudre un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss.**	- **Interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$.** - **Résolution d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss.**
Arithmétique - **Numérations** - **Calculs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$**	- **Ecrire un nombre dans une base donnée.** - **Déterminer l'ensemble des multiples d'un entier naturel.** - **Effectuer la division euclidienne.** - **Utiliser les propriétés de congruence modulaire.** - **Déterminer les PGCD et PPCM de deux entiers.** - **Déterminer les nombres premiers entre eux.** - **Décomposer un entier naturel en un produit de facteurs premiers.** - **Résoudre des équations diophantiennes.**	- **Ecriture d'un nombre dans une base donnée.** - **Détermination de l'ensemble des multiples d'un entier naturel.** - **Division euclidienne.** - **Utilisation des propriétés de congruence modulaire.** - **Détermination des PGCD et PPCM de deux entiers.** - **Détermination des nombres premiers entre eux.** - **Décomposition d'un entier naturel en un produit de facteurs premiers.** - **Résolution des équations diophantiennes.**
- **Nombres complexes**	- **Représenter dans le plan complexe l'image d'un**	- **Reconnaissance d'un nombre complexe.** - **Représentation dans le plan complexe de l'image**

		nombre complexe. - Déterminer l'affixe d'un point, d'un vecteur. - Déterminer le conjugué d'un nombre complexe. - Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. - Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe. - Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ou exponentielle d'un nombre complexe et inversement. - Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes. - Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$. - Linéariser $cos^n\theta$ et $sin^n\theta$. - Déterminer la racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe. - Reconnaitre et caractériser une similitude plane directe.	d'un nombre complexe. - Détermination de l'affixe d'un point, d'un vecteur. - Détermination du conjugué d'un nombre complexe. - Calculs algébriques avec des nombres complexes. - Détermination du module et de l'argument d'un nombre complexe. - Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique ou exponentielle d'un nombre complexe et inversement. - Opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes. - Résolution des équations dans $\mathbb{C}$. - Linéarisation du $cos^n\theta$ et $sin^n\theta$. - Détermination de la racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe. - Reconnaissance et caractérisation d'une similitude plane directe.

Compétence de Base 3

Terminale D–CB2 : **L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les calculs barycentriques**		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
Calculs barycentriques	- **Définir la fonction vectorielle de Leibniz $\vec{f}(M)$.** - **Passer d'une expression de $\vec{f}(M)$ à une autre dans le plan ou dans l'espace.** - **Calculer les coordonnées du barycentre de n points pondérés dans le plan ou dans l'espace.** - **Décomposer une fonction scalaire de Leibniz en utilisant le barycentre de n points pondérés.** - **Déterminer des lignes de niveau..**	- **Définition de la fonction vectorielle de Leibniz.** - **Passage d'une expression de $\vec{f}(M)$à une autre dans le plan ou dans l'espace.** - **Calcul des coordonnées du barycentre de n points pondérés dans le plan ou dans l'espace.** - **Décomposition d'une fonction scalaire de Leibniz en utilisant le barycentre de n points pondérés.** - **Détermination des lignes de niveau.**

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES DESTINEES A L'ELEVE

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*

LIMITES ET CONTINUITE

A – LIMITES

DEFINITIONS ET PROPRIETES

SEQUENCE 1

Limites d'une fonction en l'infini

Objectif

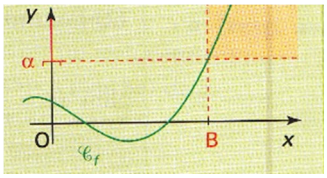
Définir et calculer la limite d'une fonction à l'infini

Définitions (limite infinie en + ∞)

f est une fonction définie sur un intervalle]A ; +∞ [où A est un réel.

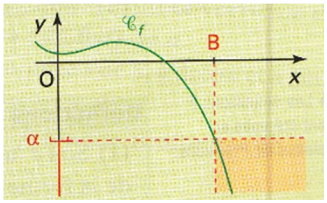
1) ***Dire que la fonction f a pour limite + ∞ en +∞ signifie que tout intervalle de la forme]α; + ∞ [,où α est un réel , contient toutes les valeurs f(x) pour x assez grand.***

   On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



2) ***Dire que la fonction f a pour limite – ∞ en +∞ signifie que tout intervalle de la forme]–∞ ; α[, où α est un réel , contient toutes les valeurs f(x) pour x assez grand.***

   On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

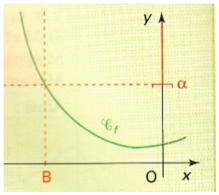


Définitions (limite infinie en – ∞)

f est une fonction définie sur un intervalle de la forme]–∞ ; A [où A est un réel.

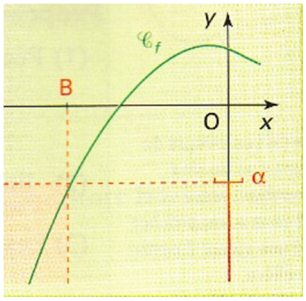
1) ***Dire que la fonction f a pour limite + ∞ en –∞ signifie que tout intervalle]α ; + ∞ [,où α est un réel , contient toutes les valeurs f(x) pour x prenant des valeurs négatives de valeur absolue assez grande.***

   On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



2) *Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty\,;\alpha[$, où α est un réel , contient toutes les valeurs f(x) pour x prenant des valeurs négatives de valeur absolue assez grande.*

On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.



Propriétés

a est un nombre réel non nul et n, un entier naturel non nul.

1) *Si a > 0 alors* $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=+\infty$ *et,*

   si a < 0 alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax+b)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=-\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}+\infty \text{ si } n \text{ est pair}\\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

SEQUENCE 2

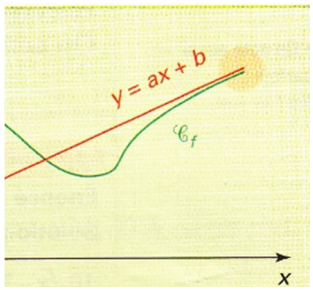
Asymptotes obliques à l'infini

Objectif

Définir et déterminer l'asymptote à l'infini

Définitions

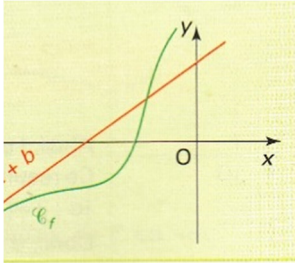
1) *f est une fonction définie sur un intervalle de la* $]A\,;+\infty[$ *où A est un réel.*



Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0$, *on dit que la droite d'équation y = ax +b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en* $+\infty$.

2) *f est une fonction définie sur un intervalle de la forme* $]-\infty\,;A[$ *où A est un réel.*

Si $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax\,b)=0$, *on dit que la droite d'équation y = ax + b est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en* $-\infty$.



Propriété

f est une fonction et c_f *sa courbe représentative.*

La droite d'équation y = ax + b est asymptote oblique à c_f *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=a$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$.

Démonstration

Démontrons cette propriété pour le cas où x tend vers $+\infty$; l' autre étant analogue.

- **Supposons que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à c_f en $+\infty$. Considérons la fonction g définie par $g(x) = f(x) - ax-b$**
  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)= 0$;
  $\forall\ x\in D_f \setminus \{0\},\ \frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{g(x)}{x}$
  $\forall\ x\in D_f,\ f(x) - ax = b + g(x).$

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b.$
- **Réciproquement, si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b] = 0$.**

  Donc la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à c_f en $+\infty$.

Exercice

On donne la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x.$

Détermine les équations des asymptotes obliques à la courbe représentative de f

en $+\infty$ et $-\infty$.

SEQUENCE 3

Recherche d'asymptotes

Objectif

Rechercher une asymptote

On suppose que lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, f(x) a une limite infinie.

On étudie alors la limite lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$.

Trois cas peuvent se présenter :

$\frac{f(x)}{x}$ a une limite infinie, $\frac{f(x)}{x}$ a une limite finie ou $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite.

- $\frac{f(x)}{x}$ a une limite infinie

On dit, dans ce cas, que la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction (OJ) c'est à dire l'axe des ordonnées.

- $\frac{f(x)}{x}$ a une limite finie

1er cas : a = 0

On dit, dans ce cas, que la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction (OI) c'est à dire l'axe des abscisses.

2e cas : a ≠ 0

On étudie alors la limite lorsque x tend vers + ∞ ou vers – ∞ de f(x) – ax. On a trois possibilités :

1ère possibilité

f(x) – ax admet une limite finie b. On dit que la droite d'équation y = ax + b est asymptote oblique à la courbe représentative de f.

2e possibilité

f(x) – ax admet une limite infinie

On dit que la courbe représentative de f a une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation y = ax.

3e possibilité f(x)-ax n'a pas de limite

On dit la courbe représentative de f n'admet ni asymptote, ni branche parabolique mais elle admet une direction asymptotique qui est celle de la droite d'équation y = ax.

– $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite

La courbe représentative de f n'admet ni asymptote, ni branche parabolique, ni direction asymptotique.

Tableau récapitulatif

Les résultats de la recherche de la direction asymptotique peuvent être résumés dans le tableau ci-dessous où a et b désignent respectivement les limites , lorsque x tend vers + ∞ ou vers – ∞ de $\frac{f(x)}{x}$ et f(x) – ax.

$a = +\infty$ ou $a = -\infty$		branche parabolique de direction(OJ)
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	la droite d'équation y = ax + b est asymptote
	$b = +\infty$ ou $b = -\infty$	branche parabolique de direction y = ax
	b n'existe pas	direction asymptotique d'équation y = ax
a n'existe pas		ni asymptote, ni branche parabolique, ni direction asymptotique.

SEQUENCE 4

OPERATIONS SUR LES LIMITES

Objectif

Identifier les formes indéterminées et calculer la limite d'une somme de fonctions

Les formes indéterminées et limite d'une somme

Dans le calcul des limites de fonctions, l'on peut obtenir l'un des résultats suivants appelés forme indéterminée ou simplement une indétermination habituellement désignée par deux points d'exclamation (!!) : « $\infty - \infty$ » ; « $\infty \times 0$ » ; « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ ».

Dans ce cas, on essaie de lever l'indétermination c'est-à-dire de trouver la limite demandée en étudiant la situation.

On dispose cependant de deux règles permettant de déterminer la limite d'une fonction polynôme et la limite d'une fonction rationnelle en l'infini.

Règles

1) ***En $+\infty$ et en $-\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.***
2) ***En $+\infty$ et en $-\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur.***

Exemples

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^3 - 5x^2 + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (4x^3) = +\infty.$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 8x + 5}{7 - x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2}{-x^2}\right) = -3$

Limite d'une somme de deux fonctions

Règle

f et g sont deux fonctions ayant pour limites respectives l et l'en l'infini.

Le tableau suivant donne la limite de la somme (f + g)(x) :

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \infty} (f+g)(x) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	!!

SEQUENCE 5

Limite d'un produit, d'un quotient

Objectif

Calculer la limite d'un produit, d'un quotient de fonctions

Limite du produit de deux fonctions

Règle

f et g sont deux fonctions ayant pour limites respectives l et l' à l'infini.

Le tableau suivant donne la limite du produit (f × g)(x) :

Si $\lim\limits_{x\to\infty}$ f(x)=	l	l > 0	l < 0	l > 0	l < 0	0	+∞	−∞	−∞
et $\lim\limits_{x\to\infty}$ g(x)=	l'	+∞	+∞	−∞	−∞	+∞ ou −∞	+∞	−∞	+∞
alors $\lim\limits_{x\to\infty}$ (f g)(x)=	l×l'	+∞	−∞	−∞	+∞	!!	+∞	+∞	−∞

Limite de l'inverse d'une fonction

Règle

f est une fonction ayant pour limite l en l'infini.

Le tableau suivant donne la limite de l'inverse de f :

Si $\lim\limits_{x\to\infty}$ *f(x)=*	$l \neq 0$	0 par valeurs positives	0 par valeurs negatives	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{f})(x) =$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	*0*	*0*

Limite du quotient de deux fonctions

Règle

f et g sont deux fonctions ayant pour limites respectives l et l'en l'infini.

Le tableau suivant donne la limite du quotient ($\frac{f}{g}$)(x) :

Si $\lim\limits_{x\to\infty}$ *f(x)=*	*l*	*l*	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\infty}$ *g(x)=*	$l' \neq 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{f}{g})(x)=$	$\frac{l}{l'}$	*0*	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*!!*

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=$	0 par valeurs positives	0 par valeurs négatives	0 par valeurs positives	0 par valeurs négatives	0
alors $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{f}{g})(x)=$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	!!

SEQUENCE 6

Limite d'une fonction composée, limite par comparaison

Objectif

Calculer la limite d'une composée de fonctions et utiliser les propriétés de comparaison

Limite de la composée de deux fonctions

Règle

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de I, f(x) appartient à J.

On note gof la composée de f suivie de g.

a, b et c désignent des réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)= c$ alors $\lim\limits_{x\to a} gof(x)= c$.

Exercice

Calcule :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{9-\frac{1}{x}}}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}\right)$.

Limite par comparaison

Propriétés 1

f est une fonction.

- ***S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]A\,;+\infty[$, A étant un réel et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.***

- *S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]A\,;+\infty[$, A étant un réel et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.*

NB : **on a des propriétés analogues quand x tend vers $-\infty$ ou vers x_0 réel.**

Exercice

En utilisant la propriété ci-dessus, calcule la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie par :

$f(x) = 2x - 5\sin x.$

SEQUENCE 7

Limite finie d'une fonction en un réel

Objectif

Calculer la limite finie d'une fonction en un réel

Définition

f est une fonction définie aux voisinages d'un réel a appartenant ou pas au domaine de définition de f et l un réel.

Dire que la fonction f admet pour limite le réel l quand x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert contenant l ou de centre l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a.

On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Remarques

- **Parfois, l'on est obligé d'étudier la limite de f à gauche et à droite de a.**
- **Lorsque f n'est pas définie en a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors la courbe représentative de f n'admet pas d'asymptote en a mais elle peut se rapprocher indéfiniment du point de coordonnées $(a\,;l)$ sans jamais le toucher.**

SEQUENCE 8

B – CONTINUITE

Continuité en un réel, continuité sur un intervalle

Objectif

Etudier la continuité d'une fonction sur un intervalle

Définitions

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant le réel a.

1) *f est continue en a si* $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$.

2) *f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout réel a de I.*

Interprétation graphique

Graphiquement, la continuité d'une fonction *f* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ se traduit par le fait que la courbe représentative de *f* peut être tracée en un seul morceau sur I (sans lever le crayon).

Propriétés

1) *Les fonctions* $x \longmapsto x^n$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.
2) *La fonction* $x \longmapsto |x|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
3) *La fonction* $x \longmapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.
4) *Les fonctions* $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$, *où* $n \in \mathbb{N}^*$, *sont continues sur* $]-\infty\,;0[$ *et sur* $]0\,;+\infty[$.
5) *Les fonctions* $x \longmapsto \cos x$ *et* $x \longmapsto \sin x$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.

Continuité et opérations sur un intervalle

Propriétés

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

- *Les fonctions* $f+g\,;\, f\times g\,;\, kf\ (k \in \mathbb{R})$ *et* $|f|$ *sont continues sur I.*
- *Si g ne s'annule pas sur I, alors* $\frac{1}{g}$ *et* $\frac{f}{g}$ *sont continues sur K.*
- *Si f est positive sur I, alors* $\sqrt{f}$ *est continue sur I.*

Exemples

1) **Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.**
2) **Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.**

SEQUENCE 9

Continuité et composition de fonctions

Objectif

Etudier la continuité de la composée de fonctions

Propriétés

I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset J$ *et g une fonction continue sur J alors la composée gof est continue sur I.*

Démonstration

Soit x_0 un élément de I . *f* étant continue sur I, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \in J$

g étant continue sur J, $\lim_{x \to f(x_0)} g(x) = g(f(x_0))$.

On en déduit que $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = gof(x_0)$.

La fonction gof continue en tout x_0 de I est donc continue sur I.

Prolongement par continuité d'une fonction en un point

Définition et propriété

f est une fonction, D_f son domaine de définition et a un réel n'appartenant pas à D_f.

On suppose que f admet une limite finie l en a.

Alors la fonction g définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in D_f - \{a\}, g(x) = f(x) \\ g(a) = l \end{cases}$ est continue en a.

La fonction g est appelée le prolongement par continuité de la fonction f en a.

Exemple

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x-3}$.

Calculons la limite de f en $a = 3$.

En effet, $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$

Or $\lim_{x \to 3} (x - 3) = 6$.

Donc $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$.

La fonction g définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R} - \{3\}, g(x) = f(x) \\ g(3) = 6 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f au point d'abscisse 3.

Propriété

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

Cette propriété a été vue en classe de Première et résulte immédiatement de la dérivabilité de la fonction *sinus* en 0.

SEQUENCE 10

Image d'un intervalle par une fonction continue

Objectif

Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété 1

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

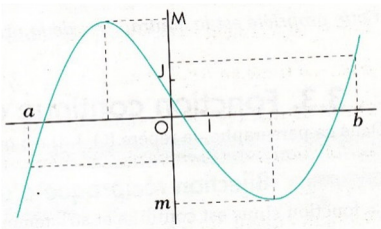
Remarques

- **Si f est une fonction constante, alors $f(I)$ se réduit à un singleton.**
- **Si f n'est pas continue sur l'intervalle I, alors $f(I)$ peut ne pas être un intervalle. Par exemple l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière (E) est $\mathbb{Z}$.**

Propriété 2

f est une fonction définie sur un intervalle fermé [a ; b].

Si f est continue sur [a ; b], alors f([a ; b])est un intervalle fermé [m ; M].



Remarques

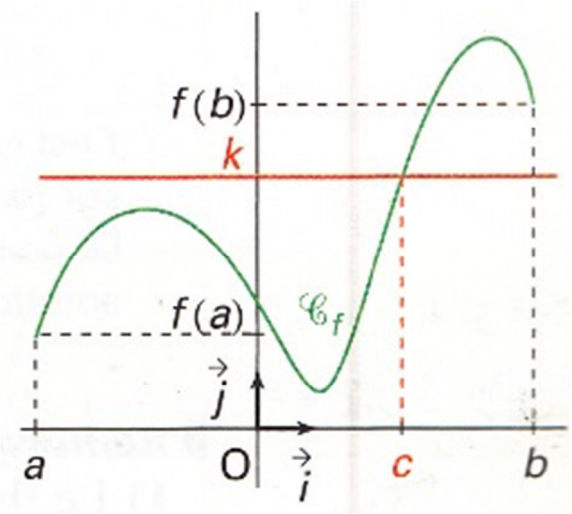
- **$\forall$ x $\in$ [a ; b], m $\leq$ f(x) $\leq$ M. f est donc bornée sur [a ; b].**
- **m et M ont un antécédent dans [a ; b] par f. On dit que f atteint ses bornes.**
- **Les valeurs m et M ne sont pas forcément celles de f(a) et f(b) ; m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur [a ; b].**

SEQUENCE 11

Théorème des valeurs intermédiaires

Objectif

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires



Théorème 1

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I

tels que a < b.

Si f est continue sur [a ; b] alors pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) il existe au moins un réel c appartenant à [a ; b] tel que f(c) = k.

Interprétation graphique

Graphiquement, la droite d'équation y = k coupe au moins une fois la courbe représentative de la fonction f en un point d'abscisse c appartenant à

l'intervalle [a ; b].

Démonstration

Si f est continue sur [a ; b] et f(a)× f(b) < 0 alors il existe au moins un réel c appartenant à]a ; b[tel que f(c) = 0.

On sait que f([a ; b]) est un intervalle J.

Soit y_0 un nombre réel compris entre f(a) et f(b). On a f(a) ∈ J et f(b) ∈ J, donc y_0 ∈ J.

Or J = f([a ; b]) ; donc y_0∈ f([a ; b]). On en déduit que y_0 a au moins un antécédent compris entre a et b.

Théorème 2

f est une fonction définie sur un intervalle I de ℝ, a et b deux réels appartenant à I tels que a < b.

Si f est continue sur [a ; b] et f(a)× f(b) < 0 alors il existe au moins un réel c appartenant à]a ; b[tel que f(c) = 0.

SEQUENCE 12

Théorème 3 (continuité et monotonie)

Objectif

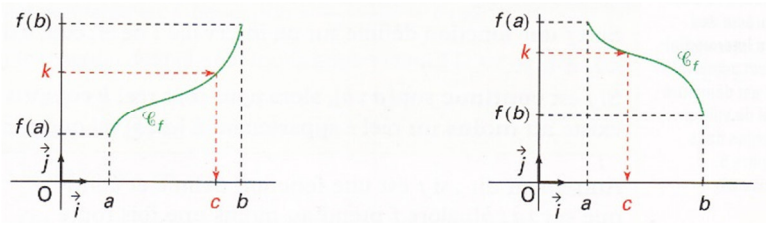
Utiliser la continuité et la monotonie de fonctions pour résoudre des équations

Théorème

f est une fonction définie sur un intervalle I de ℝ, a et b deux réels appartenant

à I tels que a < b.

Si f est continue et strictement monotone sur [a ; b], alors pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k admet une solution unique dans [a ; b].



Remarques

1) **Lorsqu'une fonction f est continue et monotone sur un intervalle I, f(I) est un intervalle de même nature que I et ses bornes sont les limites aux bornes de I.**

2) Le théorème ci-dessus s'applique aussi lorsque f est une fonction continue et monotone sur un intervalle I de la forme [a ;b[;]a ; b] ;]a ; b[; [a ; + ∞ [;]a ; +∞ [;] – ∞ ; b] ;] – ∞ ; b[. Si une borne a ou b est ouverte, on remplace l'image f(a), f(b) par la limite de f en cette borne ; si une borne de l'intervalle est – ∞ ou + ∞ alors on considère la limite de f en – ∞ ou + ∞.
3) Après avoir prouvé qu'une équation admet une solution unique c à l'aide du théorème ci-dessus, on peut rechercher cette solution c :

- soit par une résolution approchée à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur : on recherche une valeur approchée de c ou un encadrement de c par balayage ou par dichotomie.

Propriété

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I de ℝ réalise une bijection de I sur f(I), et alors :

- *Pour tous réels a et b de I, a = b ⇔ f(a) =f(b).*
- *la bijection réciproque de f notée f^{-1} est continue sur l'intervalle I.*
- *f^{-1} est strictement monotone sur I et a le même sens de variation que f.*

Théorème

f est une fonction définie sur un intervalle I de ℝ, a et b deux réels appartenant à I

tels que a < b.

Si f est continue et strictement monotone sur [a ; b] et f(a)× f(b) < 0 alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique dans]a ; b[.

SEQUENCE 13

C – DERIVATION D'UNE FONCTION

Dérivabilité et nombre dérivé en un réel

Objectif

Etudier la dérivabilité d'une fonction en un réel et déterminer le nombre dérivé

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I de ℝ et x_0 un réel appartenant à I.

Lorsque le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$(respectivement $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$) admet une limite finie quand x tend vers x_0 en restant dans I (respectivement quand h tend vers 0 avec (x_0+h) restant dans I, on dit que la fonction f est dérivable en x_0 et, cette limite notée $f'(x_0)$ est appelée le nombre dérivé de f en x_0.

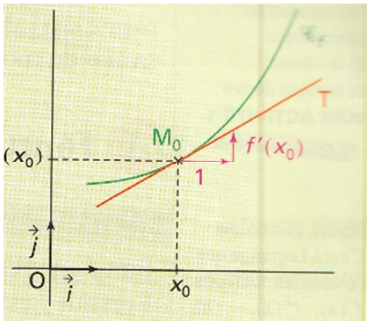
Ainsi, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

Tangente à une courbe représentative d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en un réel x_0 appartenant à I et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

La droite (T) passant par le point $A(x_0 ; f(x_0))$ de C_f et de coefficient directeur $f'(x_0)$ est appelée la tangente à la courbe C_f en A.

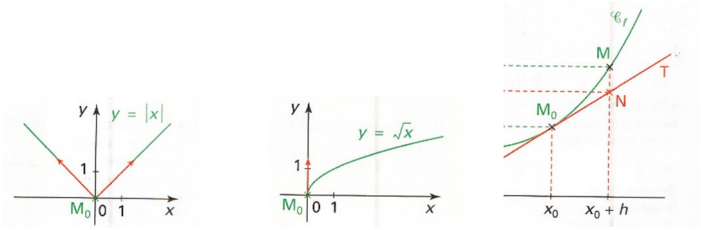


Remarques

***f*est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.**

- **Lorsque f n'est pas dérivable en x_0 mais est dérivable à droite en x_0 (respectivement à gauche en x_0), la courbe représentative de f admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente à droite (respectivement à gauche.**

  Par exemple, la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto |x|$ admet en O(0 ; 0) deux demi-tangentes.



- **Lorsque *f* n'est pas dérivable en x_0 mais que le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite infinie quand x tend vers x_0 par valeurs positives (respectivement par valeurs négatives), la courbe représentative de *f* admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale à droite (respectivement à gauche).**

  Par exemple, la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

SEQUENCE 14

Approximation affine locale d'une fonction

Objectif

Déterminer une approximation affine locale d'une fonction

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable en un réel x_0 appartenant à I.

La fonction $x \longmapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est la meilleure approximation affine locale de f au voisinage de x_0.

La fonction $x \longmapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est aussi notée $x \longmapsto f'(x_0)h + f(x_0)$ en posant $h = x - x_0$.

Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Une fonction f de [a ; b] vers $\mathbb{R}$ est dérivable sur [a ; b] si elle est dérivable sur] a ; b [et dérivable à droite en a et à gauche en b.

On pose $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \succ a}} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$ et $f'(b) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \prec b}} \left[\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\right]$.

On définit de façon analogue une fonction dérivable sur un intervalle semi-ouvert.

Exemples

1) **La fonction $f: x \longmapsto x\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables et sa dérivée est : $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right] = 0$. Donc, la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.**
2) **La fonction $g: x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.**

   Et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \left[\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right] = +\infty$. Donc, la fonction g n'est pas dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

Remarques

f est une fonction et C_f, sa courbe représentative.

- **Lorsque f est dérivable sur un intervalle I, alors on sait que C_f admet en tout point d'abscisse x_0 appartenant à I une tangente ou une demi-tangente non parallèle à (OJ). Réciproquement, nous admettrons que si C_f admet en tout point d'abscisse x_0 une tangente non parallèle à (OJ), alors f est dérivable en x_0.**

- **Lorsqu'une fonction est dérivable en tout élément d'un ensemble I, on dit qu'elle est dérivable sur I.**

Théorème

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, un élément de I.

- **Si f est dérivable en a alors f est continue en a.**
- **Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.**

Remarques

1) **La réciproque de chacun des énoncés du théorème précédent est fausse : en effet une fonction peut être continue en un réel a (respectivement sur un intervalle) sans être**

   dérivable en ce réel (respectivement sur cet intervalle).

Exemple

La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en 0 sans être dérivable en 0. De même, elle est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) **Dans le tableau de variation d'une fonction f, une flèche non horizontale et sans coupure sur un intervalle traduit à la fois la continuité et la strict monotonie de f sur cet intervalle.**

SEQUENCE 15

Fonction dérivée et dérivées usuelles

Objectif

Calculer la dérivée de fonctions

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Lorsque f est dérivable en tout réel x appartenant à I, on dit que f est dérivable sur I et on appelle fonction dérivée de f (ou dérivée de f) la fonction notée f' qui, à tout x appartenant à I, associe le nombre dérivé $f'(x)$.

2-Dérivées des fonctions élémentaires

f	f'	Ensemble de dérivabilité
k ($k \in \mathbb{R}$)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$

$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x^n (n \in \mathbb{Z}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$ si $n < 0$ $\mathbb{R}$ si $n > 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Dérivées et opérations sur les fonctions

f	f'
$u + v$	$u' + v'$
ku $(k \in \mathbb{R})$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n (n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(ax + b)$	$au'(ax + b)$

SEQUENCE 16

Dérivée de fonctions composées

Objectif

Calculer la dérivée de fonctions composées

Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle contenant f(I). La fonction gof est dérivable sur I et on a : (gof)' = f '× (g'of).

Exercice

Calcule la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = cos\frac{1}{1-x}$.

Remarque

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles tous non réduits à un point.

Si f est la composée de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, alors f est dérivable sur son ensemble de définition.

Dérivée de la réciproque d'une fonction

Théorème

f est une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle I, telle ∀ x ∈ I, f '(x) ≠ 0.

- **La fonction f réalise une bijection de I vers f(I).**
- **La bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur f(I) et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f'of^{-1}}$**

Remarque

S'il existe x_0 élément de f(I) tel que $f'(f^{-1}(x_0)) = 0$ alors, f^{-1} n'est pas dérivable en x_0 et la courbe représentative de f^{-1} admet au point d'abscisse x_0 une tangente ou une demi-tangente parallèle à (OJ).

Exemple

Soit f la fonction de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = tan\, x$.

f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $f(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$; de plus, $\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$,

$f'(x) = 1 + tan^2 x = 1 + f(x)^2$ c'est-à-dire que $\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) \neq 0.$; on en déduit que f est bijective et f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1+[f(f^{-1}(x)]^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

La réciproque de la fonction tangente est notée tan^{-1} ou bien arctan

SEQUENCE 17

DERIVEES DES FONCTIONS PUISSANCES

Dérivée de $x \longmapsto x^r$ $et\, u^r\ (r \in \mathbb{Q}^*)$

Objectif

Calculer la dérivée de fonctions puissance et utiliser l'inégalité des accroissements finis

Théorème

r est un nombre rationnel non nul et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

- La fonction $x \longmapsto x^r$ est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto rx^{r-1}$.
- La fonction u^r est dérivable sur I et sa dérivée est $ru'u^{r-1}$.

Exercice

Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

$f : x \longmapsto x^{\frac{5}{2}}$; $g : x \longmapsto x^{\frac{2}{3}}$; $h : x \longmapsto x^{\frac{-3}{2}}$.

Remarque

La fonction $x \longmapsto x^r\ (r \in \mathbb{Q}^*)$ est dérivable en 0 si $r \geq 1$

Inégalités des accroissements finis

Théorème 1

f est une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de $[a\ ;b]$,

$m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.

Démonstration

Désignons par g la fonction de I vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = Mx - f(x)$.

La fonction g est dérivable sur I et on a : $\forall\ x \in$ I, $g'(x) = M - f'(x)$. Donc g' est positive sur $[a\ ;b]$.

La fonction g est croissante sur $[a\ ;b]$; donc $g(a) \leq g(b)$.

On en déduit que $Ma - f(a) \leq Mb - f(b)$ c'est-à-dire que $f(b) - f(a) \leq Mb - Ma$.

Donc $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$. (1)

En considérant la fonction h définie de I vers $\mathbb{R}$ par h(x) = mx − f(x), on démontre de façon analogue que : $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$. (2)

Des inégalités (1) et (2), on déduit que $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.

Théorème 2

f est une fonction dérivable sur un intervalle *I.*
S'il existe un réel M tel que pour tout x élément de *[a ; b]*, $|f'(x)| \leq$ M alors pour tout réel a et b éléments de *I*, $|f(a) - f(b)| \leq M|b - a|$.

NB : ce théorème est une autre formulation de l'inégalité des accroissements finis ; elle se déduit du théorème précédent en remplaçant *m* par – M.

Exercice
Démontre que :

a) Pour tout $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$; $x \leq \tan x$. (On posera $f(t) = \tan t$)
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$. (On posera $f(t) = \sin t$)

SEQUENCE 18

Dérivées successives et applications de la dérivée
Objectif
Calculer les dérivées successives de fonctions et les utiliser
Dérivées successives d'une fonction

Définition

f est une fonction et I un intervalle.

- Si f est dérivable sur I, sa dérivée f' est appelée dérivée première de f . On la note aussi $f^{(1)}$.
- Si f' est dérivable sur I, sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f . On la note aussi $f^{(2)}$.
- De proche en proche, la dérivée n – ième de f, si elle existe est la fonction dérivée de la dérivée (n – 1) – ième de f sur I ; on la note $f^{(n)}$.

NB : $f^{(n)}$ est aussi appelée la dérivée d'ordre *n* de *f.* On utilise également, et surtout en sciences physiques, la notation de Leibniz : $f' = \frac{df}{dx}$; : $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$; … ; $f^{(n)} = \frac{d^nf}{dx^n}$.

Exercice
Détermine les dérivées successives de la fonction *f* définie par
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 4$.

Aplication1 : dérivées et sens de variation d'une fonction
f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

- Si f′ est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Aplication2

Position relative d'une courbe et de ses tangentes

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et a un élément de I. On désigne par C_f la courbe représentative de f et par (T), la tangente à C_f au point A d'abscisse a.
(T) a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
On se propose de déterminer la position relative de C_f et (T) sur I.

Pour cela, on considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$.

On a $g(a) = 0$ et $\forall\, x \in I, g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Donc $g'(a) = 0$.

- Si f′′ est strictement positive sur I, alors f′ est strictement croissante sur I. Soit x un élément de I. On a : $x < a \Rightarrow f'(x) < f'(a)$; c'est-à-dire $x < a \Rightarrow g'(x) < 0$

De même, on a : $x > a \Rightarrow g'(x) > 0$.

On en déduit le tableau de variation de g sur l'intervalle I.

x		x_0	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

Donc $\forall\, x \in I \setminus \{a\}, g(x) > 0$

C_f est au-dessus de (T) sur l'intervalle I. On dit que la courbe C_f est convexe.

- On démontre de même que si f'' est strictement négative sur I, alors C_f est au-dessous de (T). On dit alors que C_f est concave.
- Si f'' s'annule en a en changeant de signe, la tangente (T) traverse la courbe C_f au point A d'abscisse a. On dit que le point A est un point d'inflexion à la courbe C_f.

Dérivées et extrémums d'une fonction

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I.

- $f(a)$ est un extrémum relatif de la fonction f si et seulement si f' s'annule en a en changeant de signe.
- Si f admet en a un extrémum, alors $f'(a) = 0$.

SEQUENCE 19

FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE : étude de fonctions

Ensemble de définition, ensemble d'étude de fonction

Objectif

Déterminer l'ensemble d'étude d'une fonction en utilisant la parité ou la périodicité.

Ensemble de définition

En général, l'ensemble de définition d'une fonction est donné dans le cas contraire, il faut le chercher tout en tenant compte de toutes les contraintes de la fonction considérée. Nous noterons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition d'une fonction f et (C_f) la courbe représentative de f

Ensemble d'étude

Pour certaines fonctions, on peut éventuellement étudier la parité ou la périodicité de la fonction pour déduire de l'ensemble de définition, l'ensemble d'étude. Nous noterons E_f l'ensemble d'étude de la fonction f.

Il est question de préciser comment à partir de la courbe représentative de la restriction de f à E_f, on déduit la courbe (C_f) totale en utilisant certaines propriétés géométriques(translation, symétrie)

Remarques

1) Pour étudier la parité d'une fonction, il faut se rassurer que son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro.
2) Certaines fonctions sont concernées à la fois par la parité et la périodicité.

Exemple

La fonction $x \longmapsto \sin 2x$ est à la fois impaire et périodique de période π.

La périodicité nous autorise à l'étudier dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et la parité permet de l'étudier dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

SEQUENCE 20

Eléments de symétrie d'une courbe

Objectif

Déterminer les éléments de symétrie de la courbe représentative d'une fonction (axe et centre de symétrie).

Centre de symétrie

1ère méthode

Pour montrer que $S(\alpha;\ \beta)$ est centre de symétrie de (C_f) courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on peut :

- Effectuer un changement d'origine O en S. On obtient alors une fonction g telle que (C_f) soit la courbe représentative de g dans $(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$,
- montrer que g est impaire

Si $M(x;\ y)$ dans $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et de coordonnées $(X;\ Y)$ dans $(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, il suffit de poser $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$

Et obtenir : $y = f(x) \Leftrightarrow Y + \beta = f(X + \alpha)$

$$\Leftrightarrow Y = f(X + \alpha) - \beta$$

Donc la fonction$g(X)$ cherchée est $f(X + \alpha) - \beta$

Exemple

On donne $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

Montrons que $S(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ **est centre de symétrie de la courbe .**

Soit (C_f) **la courbe représentative de . Posons** $\begin{cases} x = X - \frac{1}{2} \\ y = Y + \frac{1}{2} \end{cases}$

$$M(x,y) \in (C_f) \Leftrightarrow y = f(x)$$
$$\Leftrightarrow Y + \frac{1}{2} = f(X - \frac{1}{2})$$
$$\Leftrightarrow Y = f\left(X - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow Y = \frac{X - \frac{1}{2} - 3}{2X - 1 + 1} = \frac{1}{2} = -\frac{7}{4X}$$

Considérons donc la fonction $g(X) = -\frac{7}{4X}$.

Il est claire que g **est impaire donc** $S(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ **est bien centre de symétrie de la courbe représentative de** g.

2e méthode :

Pour démontrer que $\Omega(\alpha,\beta)$ **est centre de symétrie à la courbe d'une fonction** f **,il suffit de montrer que pour tout réel** $h, \alpha + h \in \mathcal{D}_f$ **on a :** $\alpha - h \in \mathcal{D}_f$

$et\ \frac{f(\alpha-h)+f(\alpha+h)}{2} = \beta$

Axe de symétrie

1ère méthode

Pour montrer que la droite d'équation $x = \alpha$ **est axe de symétrie de la courbe** (C_f) **d'une fonction** f **dans un repère orthonormé** $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$**,on peut :**

- **Effectuer un changement d'origine** $O\ en\ S$ **.on obtient alors une fonction** g **telle que** (C_f) **soit la courbe représentative de** $g\ dans\ (S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$,
- **Montrer que** g **est paire.**

Exemple

Soit $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$

Montrons que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ **est axe de symétrie.**

Posons $\begin{cases} x = X + \frac{\pi}{2} \\ y = Y \end{cases}$ ou (x, y) sont les coordonnées de M $dans$ $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et (X, Y) ses coordonnées dans $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$y = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x \Longrightarrow Y = \sin(X + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\cos 2(X + \frac{\pi}{2})$

$$\Longrightarrow Y = \cos X + \frac{1}{2}\cos(2X + \pi)$$

$$\Longrightarrow Y = \cos X - \frac{1}{2}\cos 2X$$

Si $g(X) = \cos X - \frac{1}{2}\cos 2X$

$g(-X) = \cos(-X) - \frac{1}{2}\cos(-2X) = \cos X - \frac{1}{2}\cos 2X = g(X)$

g est paire et la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est bien axe de symétrie.

2e méthode

Pour montrer que la droite d'équation $x = \alpha$ est axe de symétrie à la courbe d'une fonction f,on peut démontrer que pour tout nombre réel h tel que

$\alpha + h \in \mathcal{D}_f, on\ a: \alpha - h \in \mathcal{D}_f\ et\ f(\alpha - h) = f(\alpha + h)$

SEQUENCE 21

Point d'inflexion

Objectif

Déterminer le point d'inflexion d'une courbe

Définition

Soit $(\mathcal{T})$ la courbe représentative d'une fonction f admettant une tangente au point M_0 d'absice x_0 (tangente non parallèle à (oy))

Soit M et T deux points d'abscice x_1.

$M \in (\mathcal{T})$ et T est la tangente à la courbe.

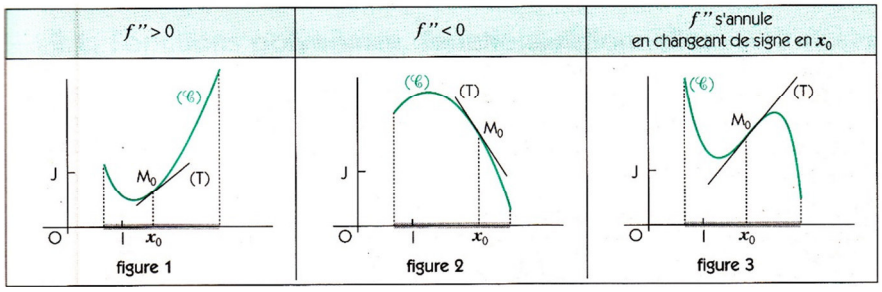
On dit que M_0 est un point d'inflexion si $\overline{TM}$ s'annule en changeant de signe en M_0

Si f est une fonction dérivable deux fois en x_0 et si f'' s'annule en changeant de signe en x_0, alors $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe f.

Définition

Soit f une fonction deux fois dérivable dans un intervalle I.

- *Si $f'' < 0$ $dans$ I, alors on dit que la courbe de f est concave dans I.*
- *Si $f'' > 0$ $dans$ I,alors on dit que la courbe de f est convexe dans I .*
- *Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, on dit que le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe de f.*



Remarque

Etudier la concavité de la courbe d'une fonction f c'est chercher à vérifier si elle est concave ou convexe.

Exemple

Soit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x$

Etudions la concavité de la courbe représentative de.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = -x^2 + 2x - 4 \;\; et\; f''(x) = -2(x-1)$$

$$\forall\, x \in \,]-\infty; 1[\;\; f''(x) > 0$$

$$\forall\, x \in \,]1; +\infty[\;\; f''(x) < 0$$

$$f''(x) = 0\; pour\;\; x = 1$$

Donc la courbe est convexe dans $]-\infty; 1[$, concave dans $]1; +\infty[$ et présente un point d'inflexion au point $A(1; -\frac{10}{3})$.

SEQUENCE 22

Branches paraboliques

Objectif

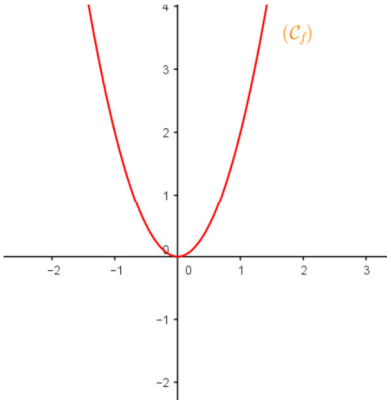
Déterminer les branches infinies d'une courbe.

Branches parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées

Activité 1

On donne $f(x) = \frac{x^3+4}{x-1}$

1) **Etudier la variation de f**
2) **Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ à l'infini.**
3) **Construire la courbe de f.**



On dit que la courbe représentative de f présente en $+\infty (mais\; aussi\; en - \infty)$ une branche parabolique de

direction asymptotique l'axe des ordonnées c'est-à-dire l'allure de la courbe f pour les grandes valeurs de x étant celle d'une parabole d'axe parallèle à l'axe des ordonnées.

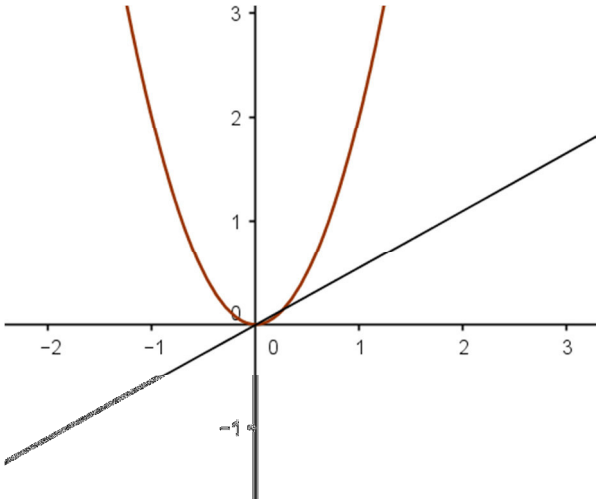
Branche parabolique de direction asymptotique à la droite d'équation $\boldsymbol{y = ax}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R})$

Activité 2

Soit $\boldsymbol{f}:]\mathbf{2}; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} \mapsto \sqrt{\frac{x^2}{x-2}}$

1) **Etudier la variation de f**
2) **Déterminer la limite à l'infini de $\frac{f(x)}{x}$ .On désigne par a cette limite.**
3) **Construire la courbe de f**
4) **Déterminer la limite à l'in fini de $f(x) - ax$**



On dit que la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation$y = ax$ (a étant le réel trouvé dans la question 2)a).

Cela signifie que l'allure de la courbe de f pour les grandes valeurs de x étant celle d'une parabole d'axe la droite d'équation $y = ax$.

Remarque

Tout ce qui précède est valable pour l'étude en $-\infty$.

SEQUENCE 23

Plan d'étude d'une fonction

Objectif

Etudier, en suivant un plan donné, une fonction

L'étude d'une fonction se fait généralement selon un plan. Le but final étant de représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction de la manière la plus précise possible .Le plan est généralement muni d'un repère orthonormé (sauf mention contraire) et les unités des axes du repère sont données selon le type de fonction à étudier.

Nous adoptons le plan suivant :

1. **Ensemble de définition-ensemble d'étude.**
2. **Continuité -dérivabilité**
3. **Variations**
4. **Limites aux bornes de l'ensemble d'étude**
5. **Tableau de variation**
6. **Branches paraboliques**
7. **Représentation graphique**

A ce niveau, on trace le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ puis on place les points remarquables figurant dans le tableau de variation auxquels on peut adjoindre par exemple les intersections de la courbe avec les axes des coordonnées.

En tout point extrémal où la fonction f' s'annule en changeant de signe on précisera les tangentes horizontales puis on trace les éventuelles asymptotes.

N.B : **n'oubliez pas de faire l'esquisse de la courbe dans un brouillon afin d'avoir une idée sur l'allure de la courbe ainsi qu'un éventuel élément de symétrie ou de point d'inflexion.**

SEQUENCE 24

Exemple d'étude d'une fonction polynôme

Objectif

Etudier une fonction polynôme

Exemple

Etudions la fonction $f: x \mapsto 2x^4 - 3x^2 + 2x - 1$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- **f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.**
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 8x^3 - 6x + 2 = 2(x+1)(4x^2 - 4x + 1)$

  $$donc\ f'(x) = 2(x+1)(2x-1)^2$$

  f' est donc du signe de $x + 1$

Donc $\forall\, x \in\,]-\infty; -1[, f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante dans $]-\infty; -1[$,
$\forall\, x \in\,]-1; +\infty[, f'(x) > 0$ et f est strictement croissante dans $]-1; +\infty[$

$$f'(x) = 0 \; pour \; x = -1 \; ou \; x = \frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^4) = +\infty \;\; et \;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^4) = +\infty$ d'où le tableau de variation.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

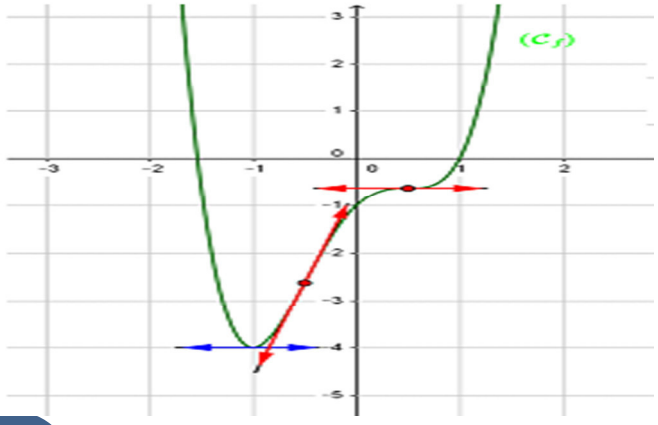
- Les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ nous autorisent à faire l'étude des branches paraboliques

- En $-\infty$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (\frac{4x^2}{x}) = -\infty$
- En $+\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{4x^2}{x}) = +\infty$

Donc la courbe de f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

- $f'(x) = 8x^3 - 6x + 2$ donc $f'(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall\, x \in\, \mathbb{R}, f''(x) = 24x^2 - 6 = 6(2x-1)(2x+1)$.
f'' s'annule en $\frac{1}{2}$ et en $-\frac{1}{2}$ tout en changeant de signe donc la courbe de f admet deux points d'inflexion aux points d'abssices $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.
Par ailleurs $\forall\, x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f'' > 0$
et $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[, f'' < 0$ donc la courbe est convexe dans $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et concave dans $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$.

- Courbe



SEQUENCE 25

Exemple d'étude d'une fonction rationnelle

Objectif

Etudier une fonction rationnelle

Exemple

Etudions la fonction numérique d'une variable définie par : $f(x) = \frac{x^3+x^2+2x-3}{x^2-3}$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$
- f **est continue et dérivable sur son domaine de définition**
- $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}, f'(x) = \frac{(3x^2+2x-2)(x^2-3)-2x(x^3+x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2} = \frac{x^4-7x^2+6}{(x^2-3)^2}$

  Mais on remarque que -1 et 1 **sont des racines du polynome** $x^4 - 7x^2 + 6$ **d'où**

  $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}, f'(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-6)}{(x^2-3)^2} = \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})}{(x^2-3)^2}$

D'où le tableau de signe de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-6		+	0	−	‖	−		−		−	‖	−	0	+
x^2-1		+		+	‖	+	0	−	0	+	‖	+		+
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	0	−	‖	−	0	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{-4\sqrt{6}+3}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{4\sqrt{6}+3}{3}$	↗	$+\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$;

  $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}<} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}>} (x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}<} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}>} (x) = +\infty$
- **Les limites de** f en $+\infty$ et $-\infty$ **suggèrent que nous pouvons étudier les branches paraboliques de** f.

Etude en $-\infty$ **:**

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2-2x-3}{x^2-3} = 1$ **et** $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2-2x-3-x^3-3x}{x^2-3} = 1$

la droite $(\mathcal{D})$ **d'équation** $y = x + 1$ **est asymptote à la courbe** $(\mathcal{C}_f)$ **de** f **en** $+\infty$ **.**

De même, l' étude en $-\infty$ **nous amène à la conclusion que la droite** $(\mathcal{D})$ **d'équation** $y = x + 1$ **est asymptote à** $(\mathcal{C}_f)$ **de en** $-\infty$**.**

Par ailleurs les limites de f**en** $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ **suggèrent que les droites d'équation** $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$ **sont des asymptotes à** $(\mathcal{C}_f)$**.**

Etudions la position de $(\mathcal{C}_f)$ **par rapport à l'asymptote** $(\mathcal{D})$ **:**

On a : $[f(x)-(x+1)] = \frac{x}{x^2-3} \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$,

Du signe de $-x(x^2-3)$ $pour$ $x \neq -\sqrt{3}$ et $x \neq \sqrt{3}$

$\forall\, x \in \left]-\infty;-\sqrt{3}\right[\cup \left]0;\sqrt{3}\right[, f(x)-(x+1) \leq 0$

$\forall\, x \in \left]-\sqrt{3};0\right[\cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[, f(x)-(x+1) \geq 0$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de $(\mathcal{D})$ dans $\left]-\infty;-\sqrt{3}\right[$ et $\left]0;\sqrt{3}\right[$

$(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de $(\mathcal{D})$ dans $\left]-\sqrt{3};0\right[$ et $\left]\sqrt{3};+\infty\right[$

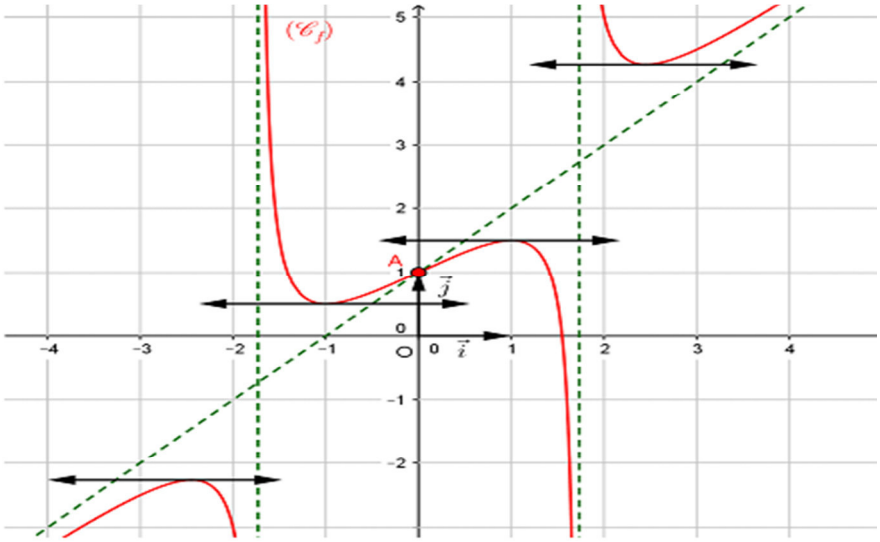
Une esquisse de la courbe dans le brouillon montre que le point $A(0,1)$ semble etre centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

En effet dans le repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $(\mathcal{C}_f)$ est d'équation $\frac{x^3+x^2+2x-3}{x^2-3}$

Posons $X = x$ et $Y = y+1$ $soit$ $x = X$ et $y = Y-1$

Alors $Y-1 = \frac{X^3+X^2+2X-3}{X^2-3} \Leftrightarrow Y = X + \frac{X}{X^2-3}$

L'équation de $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est $Y = X + \frac{X}{X^2-3}$ qui est celle d'une fonction impaire donc A est bien centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.



SEQUENCE 26

Exemple d'étude d'une fonction irrationnelle

Objectif

Etudier une fonction irrationnelle

Exemple

Etudions la fonction $f: x \mapsto \sqrt{-x^2+3x+4}$

- **Le polynôme** $-x^2+3x+4$ **admet** -1 et 4 **comme racine donc** $\mathcal{D}_f = [-1;4]$
- f **est continue sur son domaine de définition mais dérivable sur** $]-1;4[$
- $\forall\, x \in]-1;4[, f'(x) = \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+4}}$ **donc**

  $\forall\, x \in \left]-1;\frac{3}{2}\right], f'(x) \geq 0$ et $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2};4\right[, f'(x) \leq 0$

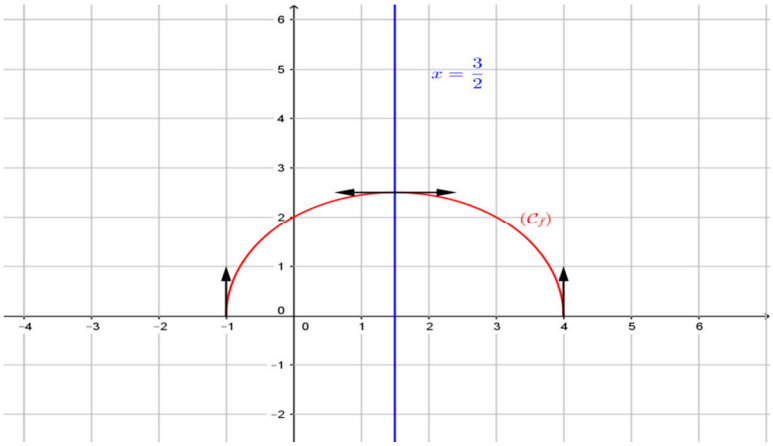
  f **n'est pas dérivable en** -1 et en $\frac{3}{2}$ **(**f' **n'est pas définie en ces deux nombres) mais sa courbe admet aux points d'abcisses** -1 et $\frac{3}{2}$ **deux demi-tangentes verticales.**

- **On a pas besoin ici de chercher les limites de** f **car aux bornes du domaine de définiton il suffit de calculer** $f(-1)et\ f(4)$

x	-1		4		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	$+$		0		$-$
$f(x)$	$\frac{5}{2}$ 0	↗	$f(\frac{3}{2})$	↘	0

- **L'allure de la courbe suggère que la droite d'équation** $x = \frac{3}{2}$ **est axe de symétrie de la courbe de** f**.**

  En effet $\forall\, x \in \mathcal{D}_f, f\left(\frac{3}{2}+h\right) = \sqrt{-h^2+\frac{25}{4}} = f(\frac{3}{2}-h)$.



SEQUENCE 27

Exemple d'étude d'une fonction trigonométrique

Objectif

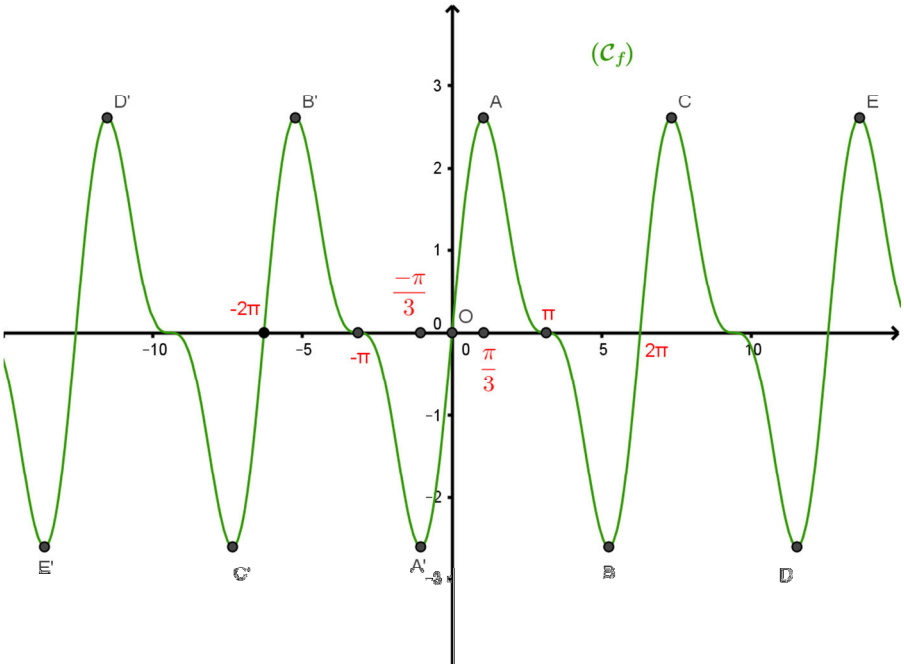
Etudier une fonction trigonométrique

Exemple

Etudions la fonction : $\boldsymbol{f(x) = 2\sin x + sin2x}$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
  $f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin(2x+4\pi) = 2\sin x + \sin 2x$ donc f est périodique de période 2π, on peut l'étudier dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$
  $\forall\, x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ $et\ f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -f(x)$ donc f est impaire , on peut finalement l'étudier dans $[0;\pi]$
  On déduira la courbe dans $[-\pi;0]$ par la symétrie de centre O puis la courbe dans chaque intervalle de largeur 2πpar la translation du vecteur $2\pi\vec{\imath}$
- $\forall\, x \in [0;\pi]$, $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$
  $= 2(\cos x + 1)(\cos x - \frac{1}{2})$
  f' est du signe de $\cos x - \frac{1}{2}$ dans $[0;\pi]$
  $\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$, $f'(x) \geq 0$ $et\ \forall\, x \in \left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$, $f'(x) \leq 0$ d'où le tableau de variation :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	$+$		0	$-$	
$f(x)$	$\frac{5}{2}$ 0	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{3})$	$\searrow$	0



COMPETENCES DE BASE 2

EQUATIONS LINEAIRES

SEQUENCE 28

Objectif

Donner une présentation matricielle d'un système d'équations linéaires

Présentation d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}\ et\ \ n \geq 2)$

Présentation classique d'un système

Un système de n équations linéaires à p inconnues $(1 \leq n \leq p)$ est un système du type

$$(\Sigma)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Où les $a_{11}, a_{21}, \ldots a_{np}$ d'une part et les $b_1, b_2, \ldots b_n$ d'autre part sont donnés.La solution du système (Σ), si elle existe, est le n-uplets $(x_1, x_2, \ldots x_p)$.

Définition

Le système (Σ) est dit homogène lorsque les coefficients $b_1, b_2, \ldots b_n$ sont tous nuls.

Définition

Un système homogène est toujours compatible si et seulement si l'ensemble solution est non vide.

Remarque

Un système homogène est toujours compatible car le n-uplet $(0, \dots, 0)$ en est toujours solution.

Présentation matricielle d'un système

Exemple

Considérons le système $(\Sigma)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

C'est un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$.

Notons A **la matrice** $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, X **la matrice** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ **et** B **la matrice** $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Alors le système (Σ) **est équivalent à** $AX = B$ **ou** A, X **et** B **sont les matrices définies ci-dessus.**

Exemple

le système $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ -x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ **est équivalent à l'équation**

AX=B où A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $et\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proposition

Les transformations suivantes changent tout système en un système équivalent :

1. **Echanger deux lignes**
2. **Multiplier une ligne par un même réel non nul**
3. **Ajouter une ligne à une autre ligne.**

SEQUENCE 29

Objectif

Résoudre les systèmes d'équations linéaires par la méthode de Cramer

Résolution des systèmes d'équations linaires par la méthode Cramer

Méthode

S : AX=B est un système de n **équations à n inconnues**

Si det $(A) \neq 0$ **alors le système a une solution unique**

$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det A}$ **avec** A_j **la matrice obténue en remplaçant la j ième colonne de A par les éléments de la matrice B.**

Exemple **: Résolvons le système** (ε) : $\begin{cases} 2x - y - 3z = 6 \\ x + 3y + 4z = 10 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases}$

La matrice A du système (ε) est A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Le déterminant du système (ε) est :

D=$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\,(-3+8) + (1-12) -$
$3(-2-9)$ D=30

Le déterminant étant non nul, le système admet un unique triplet (x, y, z) solution avec :

$x = \frac{Dx}{D}$, $\quad y = \frac{Dy}{D}$ $\quad$ et $\quad z = \frac{Dz}{D}$

Calculons

$D_x \begin{vmatrix} -6 & -1 & -3 \\ 10 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 30;$ $\quad Dy = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 1 & 10 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 30 \;\; et \;\; Dz = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 10 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 90$

d'où l'ensemble solution est : $\quad s = \{(1;\ -1; 3)\}$

SEQUENCE 30

Objectif

Résoudre les systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss

Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Cette méthode est analogue à celle par les matrices car il est question d'avoir à la fin une matrice triangulaire $A\ multiplié\ par\ X\ qui\ donne\ B$.

Description de la méthode

La méthode consiste à utiliser des opérations élémentaires pour obtenir des systèmes équivalents.

1ère étape

- Il y a au moins une ligne L_k dans laquelle le coefficient de x_1 n'est pas nul, alors on la place en 1ère ligne : $L_1 \leftrightarrow L_k$.
- A l'aide des opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow \alpha L_i + \lambda L_k\ avec\ \alpha \neq 0\ et\ i > 1$, on élimine x_1 dans toutes les équations , sauf dans la première.

2ème étape

- Parmi les équations où ne figure plus x_1 , il y'a au moins une ligne L_k dans laquelle le coefficient de x_2 n'est pas nul, alors on fait $L_2 \leftrightarrow L_k$.
- A l'aide des opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow \alpha L_i + \lambda L_2\ avec\ \alpha \neq 0\ et\ i > 2$, on élimine x_2 dans toutes les équations sauf dans les deux premières

3ème étape

Cet algorithme est arrêté lorsque l'on peut résoudre facilement une équation à une inconnue.

Exemples

1) Résolvons par la méthode du pivot de Gauss le système :

$$\begin{cases} 2x - y - z - t = 1 \\ x - 3y + z + t = -2 \\ x + y - 2z + 4t = 4 \\ x - y + z - 2t = -8 \end{cases}$$

On remarque qu'il est avantageux de mettre la ligne L_2 ou L_3 en 1ère ligne car leurs coefficients est 1 et il serait facile de faire les combinaisons.

1ère étape :

$L_1 \leftrightarrow L_2$,on a :

$$(\Sigma) \Leftrightarrow (\Sigma_1): \begin{cases} x - 3y + z + t = -2 \\ 2x - y - z - t = -1 \\ x + y - 2z + 4t = 4 \\ x - y + z - 2t = -8 \end{cases}$$

Eliminons x dans les trois dernières équations en combinant L_1 avec ces trois dernières équations $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$; $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$; $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$.

On obtient :

$$(\Sigma_1) \Leftrightarrow (\Sigma_2): \begin{cases} x - 3y + z + t = -2 \\ 5y - 3z - 3t = 3 \\ 4y - 3z + 3t = 6 \\ 2y - 3t = -6 \end{cases}$$

2ème étape :

On peut changer l'ordre des inconnues x, z, y, t car z ne figure pas dans L_4.

$$(\Sigma_2) \Leftrightarrow (\Sigma_3): \begin{cases} x + z - 3y + t = -2 \\ -3z + 5y - 3t = 3 \\ -3z + 4y + 3t = 6 \\ 2y - 3t = -6 \end{cases}$$

En faisant $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$, on a :

$$(\Sigma_3) \Leftrightarrow (\Sigma_4): \begin{cases} x + y - 3y + t = -2 \\ -3z + 5y - 3t = 3 \\ -y + 6t = 3 \\ 2y - 3t = -6 \end{cases}$$

3ème étape

En faisant $L_4 \longleftarrow L_4 + 2L_3$,on a :

$$(\Sigma_4) \Leftrightarrow (\Sigma_5): \begin{cases} x + z - 3y + t = -2 \\ -3z + 5y - 3t = 3 \\ -y + 6t = 3 \\ 9t = 0 \end{cases}$$

On obtient dans un système triangulaire qui admet pour solution $y = -3$; $z = -6$ et $t = 0$

$$S = \{(-5; -3; -6; 0)\}$$

Exercice

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

$$(1): \begin{cases} 2x + 3y - 2z = a \\ x - 2y + 3z = b \\ 4x - y + 4z = c \end{cases}$$

Ou a, b et c sont de réels donnés et (1) est d'inconnues (x, y, z)

$$(2): \begin{cases} a - 2b + 2c - 2d + e = 1 \\ 2a - b + c - d - e = 2 \\ a - b + 2c - d + e = 4 \end{cases}$$

(2) est d'inconnues (a, b, c, d, e)

SEQUENCE 31

Objectif

Résoudre des systèmes d'équations linéaires par inversion de matrice

Résolution d'un système par inversion de matrices

Nous avons vu déjà comment on calcule le déterminant par l'inverse d'une matrice. Utilisons donc l'inverse d'une matrice pour résoudre une équation du type :

$$AX = B \; avec \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; et \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

La propriété des matrices permet d'écrire : si$A$ est inversible (c'est-à-dire $\det A \neq 0$) alors :

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Propriété

Soit $AX + B = 0$ ***un système d'équations linéaires dans*** $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

- ***Si*** $det(A) \neq 0$ ***alors le système admet l'unique solution qui est le n-uplets*** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ***de matrice*** $X = A^{-1}B$.
- ***Si*** $det(A) = 0$ ***, ou bien le système admet une infinité de solutions , ou bien n'admet aucune solution.***

Exemple

Résolvons en fonction du réel t le système suivant :

$$(5): \begin{cases} x + y = 1 \\ x + t^2 y = t \end{cases}$$

Le déterminant du système (S) est : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix} = t^2 - 1$

- **Si $t \neq 1$ et $t \neq -1$, le système (5) admet un unique couple (x, y) solution.**
  Si nous posons $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, **la solution est :**
  $$X = A^{-1}B = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t+1} \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}$$
  $$S = \left\{\left(\frac{t}{t+1}; \frac{1}{t+1}\right)\right\}$$
- **Si $t = 1$, le système s'écrit :** $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$
  Donc tout couple (x, y) $tel\ que$ $x + y = 1$ est solution. $S = \{(x; 1 - x) x \in \mathbb{R}\}$
- **Si $t = -1$, le système s'écrit :** $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$
  Les deux équations sont incompatibles, l'ensemble solution est $S = \emptyset$

Remarque

A l'ordre 2 ou 3 ,la résolution par l'inversion des matrices et de Cramer s'avèrent moins laborieux mais au dela, il faut faire attention aux calculs.

Exercice

Résoudre par la méthode de Cramer puis par inversion des matrices le système suivant :

$$(S_1): \begin{cases} x + y + 7z = -1 \\ 2x - y + 5z = -5 \\ -x - 3y - 9z = -5 \end{cases}$$

SEQUENCE 32

Objectif

Interpréter géométriquement un système d'équations linéaire dans $\mathbb{R}^3$

Interprétation géométrique du système linéaire dans $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace $(oxyz)$, une équation de plan est de la forme
$\boldsymbol{ax + by + cz = d (avec\ a, b\ et\ c\ non\ tous\ nuls)}$

L'intersection de deux plans dans l'espace correspond au système suivant de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Trois cas se présentent alors :

- **Les plans sont parallèles et (distincts) et le système n'admet aucune solution.**
- **Les plans sont confondus et le système admet une infinité de solutions**
- **Les plans se coupent en une droite et le système admet une solution.**

Exemples

1) **Le système** $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 7 \\ 4x + 6y - 8z = -1 \end{cases}$ **n'admet pas de solution car le système est équivalent à :** $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 7 \\ 2x + 3y - 4z = -\frac{1}{2} \end{cases}$
   Mais les deux équations sont incompatibles donc $S = \emptyset$.
   Les plans déterminés par les deux équations sont strictement parallèles et distincts.
2) **Soit le système** $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 7 \\ 4x + 6y - 8z = 14 \end{cases}$
   Les deux équations définissent le même plan d'équation $2x + 3y - 4z = 7$. En écrivant $z = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{7}{4}$, le système aura donc pour solution
   $S = \left\{\left(x, y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{7}{4}\right), x, y \in \mathbb{R}\right\}$

3) **Soit le système** $\begin{cases} 7x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$
   Par substitution $\begin{cases} 7x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{7}{2}x + y - \frac{1}{2} \\ 2x + 3y + 2(\frac{7}{2}x + y - \frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{7}{2}x + y - \frac{1}{2} \\ 9x + 5y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{7}{2}x + y - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{9}{5}x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

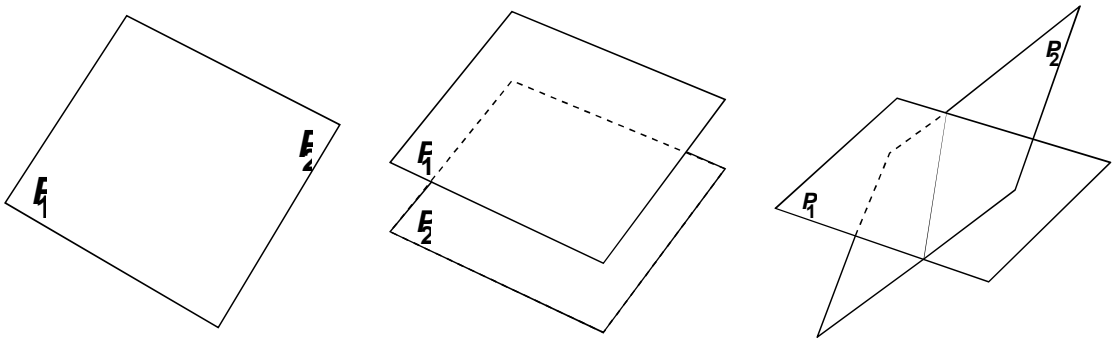
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{17}{10}x - \frac{1}{10} \\ y = -\frac{9}{5}x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

Posons $x = \lambda$ un réel quelconque.

On a : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{9}{5}\lambda + \frac{2}{5} \\ z = \frac{17}{10}\lambda - \frac{1}{10} \end{cases}$ **qui est la représentation paramétrique d'une droite (D).**

Géométriquement les plans $(P_1) et\ (P_2)$ d'équations respectives $7x + 2y - 2z = 1\ et\ 2x + 3y + 2z = 1$ se coupent en une droite (D) de représentation

paramétrique $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{9}{5}\lambda + \frac{2}{5} \\ z = \frac{17}{10}\lambda - \frac{1}{10} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$



Le premier cas est celui dont les deux équations représentent le même plan.
L'ensemble solution est ce plan.
Dans le deuxième cas les plans sont parallèles et leur intersection est vide.
Dans le troisième cas, l'intersection des deux plans est une droite.

ARITHMETIQUE

SEQUENCE 33

Ensemble $\mathbb{N}$

Objectif

Faire l'addition et la multiplication dans les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Axiomes fondamentaux de $\mathbb{N}$

A_1 : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

A_2 : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

A_2 : Toute suite d'entiers naturels strictement décroissants est finie.

Ensemble $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs :

Opérations dans $\mathbb{Z}$

Addition dans $\mathbb{Z}$

Théorème

$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif (ou abélien).

Propriété d'égalité

Théorème

Pour tous entiers relatifs a, b et c, on a : $a + b = a + c \Longrightarrow b = c$.

Multiplication dans $\mathbb{Z}$

Théorème

Pour tous entiers relatifs a, b et c, on a :

(1) : $a \times b \in \mathbb{Z}$: la multiplication est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$.

(2) : la multiplication est commutative dans $\mathbb{Z}$ car, $a \times b = b \times a$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$.

(3) : la multiplication est associative dans $\mathbb{Z}$ car : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

(4) : l'entier relatif 1 est l'élément neutre pour la loi $\times$ dans $\mathbb{Z}$:

$$\forall\, a \in \mathbb{Z}, a \times 1 = 1 \times a = a.$$

(5) : la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{Z}$:

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

Autres propriétés de la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Théorème

Pour tous entiers relatifs a, b et c, on a :

(1) : $b \times 0 = 0$

(2) : $ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Ordre dans $\mathbb{Z}$

Soit a, b deux entiers relatifs, posons $b = a + b + (-a)$ et définissons dans $\mathbb{Z}$ une relation notée $\leq$ par : pour tous entiers relatifs et b , $(a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{N})$.

Théorème 1

La relation $\leq$ dans $\mathbb{Z}$ est une relation d'ordre total.

Théorème 2

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$:

(1): $\forall\, c \in \mathbb{Z}$, on a : $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$

(2): $\forall\, c \in \mathbb{N}^*$, on a : $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$.

Théorème 3

Toute partie bornée non vide de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit et un plus grand élément.

Théorème 4

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est archimédien c'est-à-dire soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$, il existe un entier relatif n tel que $nb \geq a$

SEQUENCE 34

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Objectifs

- Effectuer la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$
- Ecrire un nombre dans une base donnée

Théorème

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$.

Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que : $a = bq + r$ et $0 \leq |b|$.

Le nombre q est le quotient de la division enclidienne de a par b et r en est le reste.

Effectuer une division euclidienne, c'est déterminer son quotient et son reste.

Numération

Base de numération

Théorème

Soit p un entier naturel supérieur à 2.

Tout entier naturel x peut s'écrire de façon unique : $x = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$ où les coefficients $0 \leq a_k < p$ avec $a_n \neq 0$ si $x \neq 0$ et $n = 0$ si $x = 0$.

La suite $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ est appelée développement de x en base p et l'on écrit :

$$x = \overline{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{2,} a_{1,}\, a_{0,}}^{\,p}$$

Ecriture en base 2 : système binaire

L'écriture de tout nombre dans le système binaire n'utilise que les chiffres 0 et 1.

Ainsi, le nombre $\overline{11001011}^{2}$ est un nombre écrit dans le système binaire .

On peut le convertir dans le système décimal.

On a alors $\overline{11001011}^2 = 1.2^7 + 1.2^6 + 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 203$.

Donc le nombre $\overline{11001011}^2 = 203$ en base 10.

On peut convertir un nombre écrit en base 10 dans un système à base 2. Pour cela, on procède par des divisions euclidiennes successives.

Système hexadécimal (à base 16)

Ce système de numérotation est utilisé dans la programmation et utilise des codes à 16 signes. Dans ce système, l'ensemble des chiffres utilisés est :
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ où les chiffres A, B, C , D, E et F représentent respectivement les nombres 10, 11, 12, 13, 14 et 15.

SEQUENCE 35

Multiples d'un entier relatif

Objectif

Déterminer les multiples d'un entier relatif

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs.

a est un multiple de b s'il existe un entier relatif k tel que $a = bk$.

Théorème 1

a et b sont deux entiers relatifs tels que b non nul.

a est multiple de b si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

Théorème 2

Soit a, b et n trois entiers relatifs.

Si a et b sont multiples de n alors, pour tous entiers u et v, $au + bv$ est multiple de n.

Ensemble des multiples d'un entier relatif

Définition

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On appelle ensemble des multiples de n, l'ensemble constitué des nombres :$\{\dots, n(-3), n(-2), n(-1), n \times 0, n \times 1, n \times 2, n \times 3, \dots\}$.

Ces nombres sont de la forme nk où $k \in \mathbb{Z}$.

On note cet ensemble $n\mathbb{Z}$.

Diviseurs d'un entier relatif

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs.

On dit que b est un diviseur de a (ou b divise a) si a est multiple de b.

b divise a se note $b|a$

Vocabulaire

Soit n un entier. Tous les diviseurs de n autres que $-n, -1, 1$ et n sont appelés diviseurs propres de n.

SEQUENCE 36

Ensemble des diviseurs d'un entier relatif

Objectif

Déterminer les diviseurs d'un entier relatif et utiliser les congruence dans $\mathbb{Z}$

Notation

Soit a un entier relatif.

On note $\mathcal{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de l'entier relatif a.

Si a et b sont deux entiers relatifs, $\mathcal{D}(a, b)$ est l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

$\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$

Théorème

Soit a, b et q trois entiers relatifs.

On a alors $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, a - bq)$.

Congruence dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soit n un entier naturel non nul.

On dit a et b sont congrus modulo n si, et seulement si, a et b ont même reste dans la division euclidienne par n.

On note : $a \equiv b(n)$ ou $a \equiv b$ (modulo n) ou $a \equiv b[n]$.

Théorème

Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel.

a et b ont même reste dans la division euclidienne par n si et seulement si $a - b$ est divisible par n.

Corollaire :

a et b sont congrus modulo n si, et seulement si, $a - b$ est divisible par n. On écrit :

$a \equiv b(n) \Leftrightarrow n|a - b.$

Propriétés de la congruence

P_1 *:a est divisible par* $n \Leftrightarrow a \equiv 0(n)$.

P_2 *:* $n \equiv 0(n)$.

P_3 *:* $a \equiv a(n)$. *On dit que la relation de congruence est reflexive.*

P_4 *:Si* $a \equiv b(n)$ *et si* $b \equiv c(n)$, *alors* $a \equiv c(n)$. *On dit que la relation de congruence est transitive.*

P_5 *:Si* $a \equiv b(n)$ *alors* $b \equiv a(n)$, *La relation de congruence est dite symétrique.*

P_6 *:Si* $a \equiv a'(n)$ *et* $b \equiv b'(n)$ *alors* $a + b \equiv a' + b'(n)$. *On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition.*

P_7 *:Si* $a \equiv a'(n)$ *et* $b \equiv b'(n)$ *alors* $a \times b \equiv a' \times b'(n)$. *La relation de congruence est compatible avec la multiplication dans* $\mathbb{Z}$.

P_8 *:Si* $a \equiv b(n)$ *et si* $p \in \mathbb{N}$ *alors* $a^p \equiv b^p(n)$.

SEQUENCE 37

Critères de divisibilité

Objectif

Utiliser les critères de divisibilité

Divisibilité par 2

Propriété

Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2.

Divisibilité par 5

Propriété

Un nombre est divisible par 5 si et seulement s'il se termine par 0 ou par 5.

Divisibilité par 4

Propriété

Un nombre est divisible par 4 si et seulement si, le nombre formé par les chiffres des dizaines et celui des unités est divisible par 4.

Divisibilité par 3

Propriété

Un nombre est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par3.

Divisibilité par 9

Propriété

Un nombre est divisible par 9 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.

Divisibilité par 11

Propriété

Un nombre est divisible par 11 si la somme alternée de ses des chiffres est divisible par 11.

SEQUENCE 38

Nombres premiers

Objectifs

- **Définir un nombre premier**
- **Décomposer un nombre entier en un produit de facteurs premiers**

Définition

Un nombre premier p est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs positifs :1 et p.

Théorème

Tout entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.

Théorème

Il existe une infinité de nombres premiers.

Théorème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si n n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur d tel que: $1 \leq d^2 \leq n$.

Nombres premiers et divisibilité

Théorème

Soit p un nombre premier et a un entier relatif.

Si a n'est pas divisible par p alors a et p sont premiers entre eux.

Décompositions en produit de facteurs premiers

Théorème fondamental

Soit a un entier naturel tel que $a \geq 2$.

Il existe un entier naturel non nul n, n nombres premiers distincts $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et n entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que :$a = p_1\alpha^1 \times p_2\alpha^2 \times \ldots \times p_n\alpha^n$ et $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$.

De plus, cette décomposition est unique.

Division d'un entier

Théorème

Soit a un nombre supérieur ou égal à 2 dont la décomposition en facteurs premiers est :

$n = p_1\alpha^1 x p_2\alpha^2 x \dots x p_m\alpha^m$.

Alors tout diviseur d de n a pour décomposition :

$d = p_1\beta^1 x p_2\beta^2 x \dots x p_m\beta^m$ ***avec*** $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Le nombre de diviseurs $\varphi(n)$ est alors :

$\varphi(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_m + 1)$.

SEQUENCE 39

Objectif

- **Déterminer le PGCD et le PPCM des entiers**

PGCD et PPCM d'entiers relatifs

Plus Petit Commun Multiple (PPCM) d'entiers relatifs

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

Le plus petit commun multiple de a et b, noté PPCM(a, b) est le plus petit élément positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

PPCM(a, b) se note aussi $a \vee b$.

On emploie la décomposition en produit de facteurs premiers pour déterminer le PPCM de deux nombres a et b.

Ainsi, le PPCM de a et b est égal au produit de tous les facteurs premiers de a et b pris avec l'exposant le plus grand apparaissant dans les deux décompositions.

Théorème

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et μ leur PPCM.

On a : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$.

Théorème de la multiplication du PPCM

Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls.

On a : PPCM$(ka, kb) = k.\mathbf{PPCM}(a, b)$

Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) d'entiers relatifs

Définition du PGCD

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

On appelle plus grand commun diviseur de a et b, noté PGCD(a, b) le plus grand élément de $\mathcal{D}(a, b)$ sachant que $\mathcal{D}(a, b)$ est l'ensemble des diviseurs de a et b.

Propriétés de PGCD.

Théorème

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et σ leur PGCD.

Alors : $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(\sigma)$.

Théorème

Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls.

Alors : PGCD$(ka, kb) = k$. PGCD(a, b).

Théorème

Soit a et b deux entiers relatifs non tous nuls et σ leur PGCD.

Les nombres de la forme $au + bv$ (avec $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$) sont les multiples de σ.

Corollaire

Soit a et b deux entiers relatifs non tous nuls et σ leur PGCD.

Il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $\sigma = au + bv$.

L'utilisation de ce corollaire est pratique pour la résolution de certaines équations dans $\mathbb{Z}^2$.

Algorithme d'Euclide

Lemme d'Euclide

Soit a, b et q, trois entiers relatifs non nuls.

On a : PGCD$(a, b) =$ PGCD$(b, a - bq)$.

Théorème

Soit a et b, deux entiers naturels non nuls.

Lorsque b ne divise pas a, le PGCD de a et b est le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

SEQUENCE 40

Nombres premiers entre eux

Objectif

Déterminer les nombres premiers entre eux

Définition

On dit que deux nombres entiers naturels sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égal à 1.

Propriétés fondamentales

Théorème de Bezout-Bachet

Soit a et b deux entiers relatifs.

a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$.

Corollaire
Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a est premier avec b et c, alors a est premier avec bc.

Théorème de Gauss
Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Corollaire
Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
(1) Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux, alors ab divise c.
(2) Si a et b sont premiers entre eux, alors PPCM(a, b) $= |a \times b|$.

Relation entre PPCM et PGCD d'entiers relatifs

Théorème

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, σ leur PGCD et μ leur PPCM.

On a : $\sigma\mu = ab$.

SEQUENCE 41

Equations diophantiennes

Objectif

Résoudre les équations diophantiennes

Définition

Les équations diophantiennes du 1er degré à deux inconnues x et y sont les équations du type $ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers.

La résolution de ces types d'équations dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ s'appuie sur les propriétés fondamentales telles que le théorème de Bezout-Bachet, le thèotème de Gauss et les proprétés étudiées sur les nombres premiers entre eux.

Lorsque les entiers a, b et c sont relativement simples, la démarche de résolution consistera à trouver, au préalable, une solution particulière puis de cette solution particulière, en déduire les autres.

Pour les cas où les coefficients sont relativement compliqués, il s'agira d'appliquer l'algorithme d'Euclide afin d'en déterminer une solution particulière avant la finalisation de la résolution.

Méthode de résolution des équations diophantiennes

Dans le cas où on doit résoudre une équation diophantienne $\boldsymbol{ax + by = c}$ où les coefficients $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont relativement « grands », la démarche à adopter consistera :

- Calculer le PGCD$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ afin de s'assurer si les entiers $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont premiers entre eux ;

Dans le cas où PGCD$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{1}$, on cherche une solution particulière de l'équation $\boldsymbol{au + bv = 1}$, en s'appuyant du théorème de Bezout et en prenant en compte les résultats des divisions effectuées en point 1 pour s'assurer du fait que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont premiers entre eux ;

A partir de la solution particulière obtenue en deuxième point , on multiplie membre à membre l'égalité $\boldsymbol{au_0 + bv_0 = 1}$ par $\boldsymbol{c}$ et on obtient $\boldsymbol{acu_0 + bcv_0 = c}$.

Les entiers $\boldsymbol{x_0 = cu_0}$ et $\boldsymbol{y_0 = cv_0}$ sont les composantes de la solution particulière de l'équation initiale $\boldsymbol{ax + by = c}$.

Lemme de Fermat

Soit p un entier premier, pour tout entier a non divisible par p ;

$$\boldsymbol{a^{p-1} \equiv 1[p]}$$

LES NOMBRES COMPLEXES

SEQUENCE 42

Notation et forme algébrique d'un nombre complexe

Objectif

Définir un nombre complexe, donner sa forme algébrique et construire l'ensemble $\mathbb{C}$

Définition 1

On appelle ensemble des nombres complexes, l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme $z = x+iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $i^2 = -1$.

- ***L'écriture $x + iy$, avec x et y réels, est appelée la forme (ou l'écriture) algébrique de z.***
- ***Le réel x est appelé la partie réelle de z et on note $x = \mathcal{R}e(z)$.***
- ***Le réel y est appelé la partie imaginaire de z et on note $y = \mathcal{J}m(z)$.***

Notation

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Définition 2

Soit z un nombre complexe de la forme $a+ib$.

Si $a = 0$, le nombre complexe est dit imaginaire pur.

Si $b=0$, le nombre complexe est dit réel.

Remarque

Un complexe est nul lorsque sa partie réelle et sa parie imaginaire sont toutes nulles.

$z = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0$ et $\mathcal{J}m(z) = 0$.

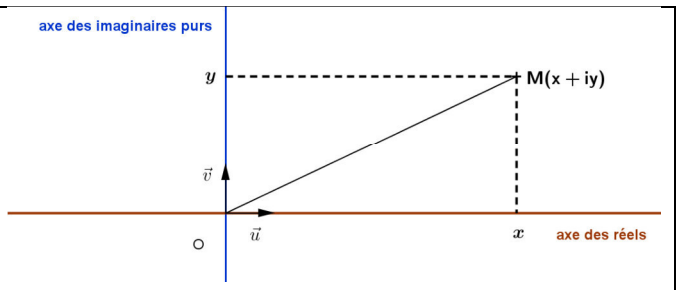
Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, x', y et y' réels.

$z = z' \Leftrightarrow x = x$ et $y = y'$.

SEQUENCE 43

Représentation graphique des nombres complexes
Objectif
Représenter dans un plan orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un nombre complexe

Propriété *A tout nombre complexe $z = x+iy$, on peut faire correspondre un point M(x, y) dans le plan orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.* *Réciproquement,à tout point M(x, y) d'un plan muni d'un repère orthonormal$(O, \vec{u}, \vec{v})$,on peut associer un nombre complexe $z = x+iy$.*	

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

– *Soit $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy}$, avec x et y réels ,un nombre complexe.*

L'unique point M du plan dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ sont $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ est appelé l'image de $\boldsymbol{z}$ et on note $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{z})$ ou $\boldsymbol{z_M} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy}$

Soit M un point de coordonnées $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le nombre $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy}$ est appelé l'affixe du point M

Le plan ainsi muni du repère orthonormal est appelé plan complexe

SEQUENCE 44

Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$ et interprétation géométrique
Objectif
Faire des opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$ et les interpréter géométriquement
Théorème
soient z et z' , deux nombres complexes, M et M' deux points du plan complexe images respectives de z et z', soit S un point du plan complexe.
Le point S a pour affixe $z + z'$ si et eulement si $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

Soit z et z' deux nombres complexes et M et M' les deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'.
La différence $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

$z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\overrightarrow{OM'}} - z_{\overrightarrow{OM}}$

Propriété (Affixe d'un point milieu d'un segment)

Soit z_A et z_B les affixes respectives des points A et B. L'affixe du point I, milieu du segment $[AB]$ est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

L'affixe de centre de gravité G du triangle ABC est :

$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Opérations sur les complexes

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes définis par :

z= x+iy et z'= x'+iy'.

1- $z + z' = (x + x') + i(y + y')$;
2- $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

SEQUENCE 45

Conjugué d'un nombre complexe

Objectif

Déterminer le conjugué d'un nombre complexe et en faire usage

Définition

Soit z un nombre complexe défini par :

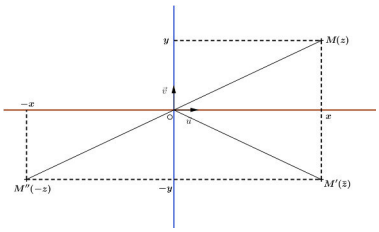
z = x+iy.

Le nombre conjugué de z, noté $\bar{z}$, est le complexe $x - iy$.

On note : $\bar{z} = \overline{x + \imath y} = x - iy$.

Conséquence

Dans le plan complexe, les points M(z) et M'$(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Propriété

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, $z\bar{z} = x^2 + y^2$

Propriété

Pour tout nombre complexe z :

– $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\,\mathcal{J}m(z)$.

- z *réel si et seulement si* $z = \bar{z}$.
- z *imaginaire pure si et seulement si* $z = -\bar{z}$.

SEQUENCE 46

Inverse et module d'un nombre complexe

Objectifs

- **Calculer l'inverse d'un nombre complexe non nul**
- **Donner le module d'un nombre complexe**

Propriété 1

Tout complexe non nul z ***admet dans*** $\mathbb{C}$ ***un unique inverse noté*** $\frac{1}{z}$.

Propriété 2

Pour tous nombres complexes z ***et*** z' :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
- $Si\, z \neq 0, alors\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- $Si\, z' \neq 0\ alors\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$
- $Si\, z \neq 0\ et\ pour\ tout\ entier\ relatif\ n\ , \overline{z^n} = \bar{z}^n$

Module d'un nombre complexe

Définition et interprétation géométrique

Soit $z = x + iy$, ***avec*** x et y ***réels, un complexe.***

On appelle module de z ***le*** $r\acute{e}el\ positif$ ***noté*** $|z|$ ***défini par*** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Remarque

$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Propriété

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Si M est le point d'affixe z alors $|z| = OM$ ***et si*** $\vec{w}$ ***est un vecteur d'affixe z alors*** $|z| = \|\vec{w}\|$.

Propriétés des modules

Soit $z = x + iy$ ***et*** $z' = x' + iy'$ ***deux nombres complexes avec*** x, x' y ***et*** y' ***réels.***

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $Si\, z \neq 0, \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

– ***Si*** $z \neq 0$ ***et pour tout entier relatif*** n, $|z^n| = |z|^n$.

Propriété

Pour tout complexe z ***et pour tout complexe*** z',

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$ ***(inégalité triangulaire)***

SEQUENCE 47

Argument d'un nombre complexe nombre

Objectif

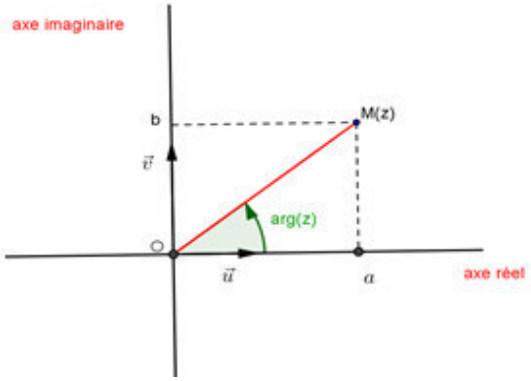
Déterminer l'argument d'un nombre complexe

Définition

Soit z ***un nombre complexe non nul et M le point d'affixe*** z ***dans le plan complexe.***

On appelle argument de z, ***et on note*** $arg(z)$, ***une mesure en radian de l'angle orienté de vecteurs***

$(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.



Propriété (forme trigonométrique d'un nombre complexe)

Soit z ***un nombre complexe non nul de forme algébrique*** $x + iy$ ***avec*** x, y ***réels et*** α ***un argument de z.***

Une forme trigonométrique de z est : $z = |z|(cos\alpha + isin\alpha)$.

Propriété

Soit z ***un complexe non nul***

Si z ***s'écrit sous la forme*** $r(cos\alpha + isin\alpha)$ où r ***est un réel strictement positif et*** α ***un réel, alors :***

$|z| = r$ ***et*** $arg(z) = \alpha\ [2\pi]$.

Remarques

Pour un nombre complexe de la forme $x + iy$,

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

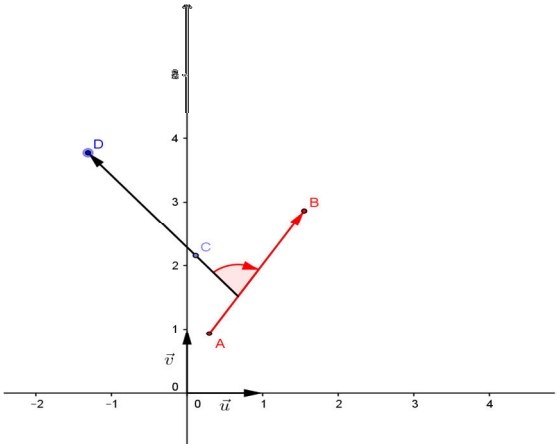
- $z = z'$ ***si et seulement si*** $|z'| = |z|$ ***et*** $arg z' = arg z + 2k\pi$ ***avec k entier.***
- $arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi$ ***avec k entier.-***
- $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z) + 2k\pi$ ***avec k entier.***
- ***Pour n entier relatif :*** $arg(z^n) = n \times arg(z) + 2k\pi$ ***avec k entier***
- $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi$ ***avec k entier.***

Propriété

Pour tous point A et B distincts, on a :

- $arg(z_B - z_A = (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$ ***avec k réel.***
- ***Pour tous points A, B, C, et D tels que A*** $\neq$ ***B et C*** $\neq$ ***D ; on a :***

$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$ ***avec k entier.***



SEQUENCE 48

Formule de Moivre et forme exponentielle d'un nombre complexe

Objectifs

- **Ecrire un nombre complexe sous sa forme exponentielle**
- **Utiliser la formule d'Euler**

Propriété

Soit z un nombre complexe tel que $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, pour tout entier relatif n :

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$. ***(Formule de Moivre)***

Forme exponentielle d'un complexe

Définition

Pour tout réel α, $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$.

Propriété

Pour tous nombres complexes $z = r\,e^{i\alpha}$ et $z' = r'\,e^{i\alpha'}$ ou r et r' sont des reels strictement positifs et α et α' sont des réels quelconques,

- $zz' = r\,e^{i\alpha} \times r'e^{i\alpha'} = rr'\,e^{i(\alpha+\alpha')}$.
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r\,e^{i\alpha}} = \frac{1}{r}\,e^{-i\alpha}$.
- $\frac{z}{z'} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} = \frac{r}{r'}\,e^{i(\alpha-\alpha')}$.

Propriété

Tout complexe non nul z peut s'écrire sous la forme : $z = |z|\,e^{i\alpha}$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul.

Une écriture de z sous la forme $z = |z|\,e^{i\alpha}$ où α est un argument de z est appelée une forme exponentielle de z.

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul.

Si z s'écrit sous la forme $re^{i\alpha}$ où r est un réel strictement positif et α un réel,

Alors $|z| = r$ et $\alpha = arg(z) + 2k\pi$ où k est un entier.

Formule d'Euler

Par addition et par soustraction membre à membre des deux égalités suivantes :

$\begin{cases} \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha} \\ \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha} \end{cases}$ **on obtient :**

$cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ et $sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

Nous venons d'obtenir la formule d'Euler.

SEQUENCE 49

Equations dans $\mathbb{C}$

Objectif

Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$

Equations du premier degré

La méthode de résolution des équations du premier degré avec les complexes est la même que celle dans $\mathbb{R}$ mais il faut mettre la solution sous forme algébrique.

Equations du second degré

La résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$ se fait en fonction du discriminant comme dans $\mathbb{R}$ mais ici quel que soit le signe du discriminant l'équation admet toujours de solution.

Soit a, b et c trois réels avec a non nul et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation (E) : $az^2 + bz + c$.

- ***Si $\Delta > 0$, (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions réelles distinctes :***

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ***et*** $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- ***Si $\Delta = 0$, (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution double :***

$z_0 = \frac{-b}{2a}$

- ***Si $\Delta < 0$, (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions complexes conjuguées :***

$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ***et*** $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe ($n \in \mathbb{N}^*$)

Propriété

Soit $re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

$re^{i\theta}$ admet n racines n-ièmes telles que : $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ $k \in \{0\,;n-1\}$

Les images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

SEQUENCE 50

Similitudes planes directes

Objectif

Etudier les similitudes planes directes

Théorème et définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O,$\vec{u},\vec{v}$).

S'il existe deux complexes a et b, avec a non nul, tels que : le point M d'affixe z ait pour image M' d'affixe z' par une application f et

$z' = az + b$ ceci équivaut à dire que f est une similitude directe.

Toute similitude directe est caractérisée par :

- ***son centre est le point invariant, d'affixe $z_0 = \frac{b}{1-a}$.***
- ***son rapport qui est le module du complexe a***
- ***et par son angle qui est un argument de a.***

Cas particuliers

$z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

- **Si $a = 1$ alors l'application qui, au complexe z, associe z' est une translation de vecteur b**
- **Si $a = -1$ alors l'application qui, au complexe z, associe z' est une symétrie centrale de centre $\frac{b}{2}$**
- **Si $a \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$ alors l'application qui, au complexe z, associe z' est une homothétie de centre $\frac{b}{1-a}$ et de rapport $k = a$**
- **Si $a \in \mathbb{C}^*$, et $|a| \neq 1$ alors l'application qui, au complexe z, associe z' est une rotation de centre $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = \arg(a)$.**

Compétence de Base 3

CALCULS BARYCENTRIQUES

Points pondérés

Objectifs

Définir un point pondéré et une fonction vectorielle de Leibniz $\vec{f}(M)$

SEQUENCE 51

Définition

- ***On appelle point pondéré, tout couple (A, α) où A est un point du plan et α un nombre réel.***
  On dit aussi que le point A est « affecté » du coefficient α.

- *Un système de points pondérés est une famille finie* $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ *de couples* (A_i, λ_i) *où, tout* i *,* A_i *est un point du plan (ou de l' espace) et* λ_i *un réel.*
  Le réel $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ *est appelé le poids total du système de points pondérés.*

Fonction vectorielle de Leibniz

Définition

On considère une famille finie de couples (A_i, λ_i) *où les* A_i *sont des point du plan (ou de l'espace) et* λ_i *des réels avec* $i \in [1; n]$.
On appelle fonction vectorielle de Leibniz notée $\vec{f}$ *la fonction qui, à tout point M du plan (ou de l'espace) associe le vecteur notée*
$\vec{f}(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$

On note $f : P \longrightarrow V$

$$M \longmapsto f(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

Exemples

1) $\forall M \in P, f(M) = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$
2) $\forall M \in P, f(M) = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$

Théorème
$A_1, \dots, A_n$ *étant* n *points du plan (ou de l'espace) et* $\lambda_1, \dots \lambda_n$, n *réels.*
La fonction vectorielle de Leibniz notée $\vec{f}(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ *est :*

- *constante si le poids total du système* $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ *est nul*
- *une bijection si* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.

Barycentre de n points pondérés

Définition

Soient n points (distincts ou non), $A_1, \dots, A_n$ *du plan (ou de l'espace) et n réels* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *tels que* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ *. L'unique point G du plan (ou de l'espace) vérifiant* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ *est appelé barycentre du système de points pondérés* $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$.

D'autre part si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ *alors G est appelé isobarycentre du système de points* (A_i, α_i)

SEQUENCE 52

Barycentre de deux points pondérés

Objectif

Définir et construire le barycentre de deux points pondérés

Définition

Soit $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ ***un système de deux points pondérés tels que*** $\alpha+\beta\neq 0$

Le barycentre de (A,α) ***et*** (B,β) ***est l'unique point G défini par*** $\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$..

L'écriture $\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$***.est équivalent à l'égalité*** $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Propriétés

- ***Le barycentre de 2 points est inchangé lorsque l'on remplace les deux coefficients par des coefficients proportionnels.***
- ***Le barycentre G de 2 points A et B appartient à la droite (AB).***
- ***Remarque***
- ***Le barycentre*** G ***appartient au segment*** $[AB]$ ***lorsque*** α ***et*** β ***sont de même signe, ;***
- ***si*** $\alpha=\beta$ G ***est milieu du segment*** $[AB]$ ***;***
- ***G plus proche du point ayant le coefficient le plus grand en valeur absolue.***

Réduction de la fonction vectorielle de Leibniz associée à 2 points pondérés :

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

Propriété

Soit (A,α)***et*** (B,β) ***deux points pondérés tels que***
$\alpha+\beta\neq 0$ ***et*** $G=Bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$
Alors pour tout point M du plan on a :
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\beta\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}$ ***et comme***
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ***car*** $G=Bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ ***donc :***

$$\overrightarrow{MG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$$

Coordonnées du barycentre de 2 points pondérés

Propriété

Dans la plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, ***soit*** $A(x_A,y_A)$ ***et*** $B(x_B,y_B)$ ***.***
Si G est le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ ***alors G a pour coordonnées :***

$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ ***et*** $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$

SEQUENCE 53

Barycentre de trois points pondérés

Objectif

Définir et construire le barycentre de trois points pondérés

Définition

Soient $(A,\alpha),(B,\beta)et\ (C,\gamma)$ ***trois points pondérés tels que :***

$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. ***Alors il existe un point unique G tel que*** $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

G est appelé barycentre des trois points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta)et\ (C,\gamma)$

Propriétés

Propriété caractéristique du barycentre de 3 points pondérés

Soit $(A,\alpha),(B,\beta)et\ (C,\gamma)$ ***trois points pondérés tels que*** $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

G est le barycentre du système $(A,\alpha),(B,\beta)et\ (C,\gamma)\Leftrightarrow$ ***pour tout point du plan(ou de l'espace)*** $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

Conséquence

Si G est le barycentre de $\{(A,\alpha),(B,\beta)et\ (C,\gamma)\}$ **alors on a :**

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

Barycentre des points et proportionnalité des coefficients

Propriété

Si G est le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ ***alors pour tout réel k non nul, G est aussi barycentre de*** $(A,k\alpha),(B,k\beta)et\ (C,k\gamma)$

Barycentre partiel

Théorème

Soit $(A,\alpha),(B,\beta),et\ (C,\gamma)$ ***un système de trois points pondérés tels que*** $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Si on note H le barycentre du système $\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$ ***alors le barycentre G du système*** $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ ***est aussi le barycentre du système*** $\{(A,\alpha),(H,\beta+\gamma)\}$

On construit G comme barycentre du système $(A,-1)et\ (H,3)$ **. On a donc** $-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GH}=\vec{0}\Leftrightarrow-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AH}=\vec{0}$ **donc** $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AH}$

Isobarycentre de 3 points pondérés :

Définition

On appelle isobarycentre des points A, B et C le barycentre des points A, B et C affectés tous du même coefficient plus particulièrement, c'est le barycentre des points pondérés $(\boldsymbol{A},\mathbf{1}),(\boldsymbol{B},\mathbf{1})\boldsymbol{et}\ (\boldsymbol{C},\mathbf{1})$

Propriété

L'isobarycentre de trois points pondérés non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

Coordonnées de barycentre de 3 points pondérés

Théorème

Soient A , B et C trois points non alignés et G le barycentre du système $\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha}),(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\beta}),(\boldsymbol{C},\boldsymbol{y})\}$.

Alors G a pour coordonnées $\left(\frac{\beta}{\alpha+b+\gamma};\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$ ***dans le repère*** $(\boldsymbol{A},\overrightarrow{\boldsymbol{AB}},\overrightarrow{\boldsymbol{AC}})$

SEQUENCE 54

Problème de lieux géométriques

Objectif

Déterminer et construire des lieux géométriques

Equations de type $\|\boldsymbol{\alpha}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}+\boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\|=\boldsymbol{a}$ où a est un réel donné.

On sait que lorsque $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{on}\ \boldsymbol{a}:\|\boldsymbol{\alpha}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}+\boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\|=|(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})|\boldsymbol{MG}$

Donc $\|\boldsymbol{\alpha}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}+\boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\|=\boldsymbol{a}\Leftrightarrow|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{MG}=\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{d'o}\text{ù}\ \ \boldsymbol{MG}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|}$

Si $\boldsymbol{a}>\mathbf{0}$ **;**

Le lieu des points M est donc le cercle (ou le sphère) de centre G et de rayon $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|}$

Si $\boldsymbol{a}<\mathbf{0}$

Le lieu des points M est vide

Si $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$

Le lieu des points M se réduit au point G

Equations du type $\|\boldsymbol{a}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}+\boldsymbol{b}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\|=\|\boldsymbol{c}\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}+\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{MD}}\|$

La réduction de cette équation nous donne pour $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\neq\mathbf{0}$

$$\|\boldsymbol{a}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}+\boldsymbol{b}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\|=\|\boldsymbol{c}\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}+\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{MD}}\|\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\boldsymbol{MG_1}$$
$$=|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|\boldsymbol{MG_2}\ \ \boldsymbol{ou}$$

$$\boldsymbol{G_1}=\boldsymbol{Bar}\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{B},\boldsymbol{b})\}\ \ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{G_2}=\boldsymbol{Bar}\{(\boldsymbol{C},\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{D},\boldsymbol{d})\}$$

L'égalité obtenue : $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\boldsymbol{MG_1}=|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|\boldsymbol{MG_2}$ **signifie que le lieu des points M correspond à :**

1. $\boldsymbol{si}\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{d}$

La médiatrice du segment $[G_1G_2]$ (dans le plan) ou le médiateur de $[G_1G_2]$ (dans l'espace)

2. $si\ a + b \neq C + d$

Le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ dans le plan ou la sphère de diamètre $[G_1G_2]$ (dans l'espace)

Fonction scalaire de Leibniz

Définition

On appelle fonction scalaire de Leibniz la fonction f définie de P dans $\mathbb{R}$ par :

$f : P \longrightarrow \mathbb{R}$

$M \longmapsto f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2$

$\forall M \in P, \overrightarrow{MA_i}^2 = MA_i^2$

Ligne de niveau k de l'application f

La résolution de l'équation f(M) = k, $k \in \mathbb{R}$ est la recherche de l'ensemble des points M du plan P tels que f(M) = k noté (E_k).

Propriété

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, n points pondérés du plan tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

$\forall M \in P, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2$ ***où*** $G = bar\{(A_i, \alpha_i)\}$

- $(E_k). = \begin{cases} \emptyset \\ \{G\} \\ C(G) \end{cases}$

Preuve

En effet, f(M) = k si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2 = k$

$MG = \frac{k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2}{(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)}$

Posons $\delta = MG$

- ***Si*** $\delta < 0$ ***alors*** $MG < 0$ ***et*** $(E_k). = \emptyset$
- ***Si*** $\delta = 0$ ***alors*** $MG = 0$ ***et*** $(E_k). = \{G\}$
- ***Si*** $\delta > 0$ ***alors*** $(E_k). = C(G, \sqrt{\delta})$

Propriété

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, n points pondérés du plan tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.

$\forall M \in P, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) OA_i^2 - 2\vec{u}\overrightarrow{OM}$ ***où*** $\vec{u} = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) \overrightarrow{OA_i}$

Ainsi, $(E_k).=\begin{cases} \emptyset \text{ ou le plan } P \text{ si } \vec{u} = \vec{0} \\ \text{la droite } (\Delta) \text{ de vecteur directeur } \vec{u} \text{ si } \vec{u} \neq \vec{0} \end{cases}$

Lignes de niveau de l'application : M $\longmapsto \frac{MA}{MB}$

Soient A et B deux points distincts du plan, $k \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $k \neq 1$.

$\frac{MA}{MB} = k$ *alors* (E_k)*.est le cercle de diamètre* $[IJ]$ *où* $I = bar\{(A,\ 1), (B, k)\}$ *et*

$J = bar\{(A,\ 1), (B, -k)\}$

Si $k \neq 1$ *alors* $1 - k^2 \neq 0$ *et* $G = bar\{(A,\ 1), (B, -k^2)\}$

$(E_k). = C(G, \frac{k}{|1-k^2|}AB)$

Lignes de niveau de l'application : $M \longmapsto Mes\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$

Propriété

Soient A et B deux points distincts du plan.

- ***L'ensemble des points M du plan P tels que*** $Mes\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 0$ ***est la droite (AB) privée du segment*** $[AB]$
- ***L'ensemble des points M du plan tels que*** $Mes\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \pi$ ***est le segment*** $[AB]$ ***privé des points A et B.***

EXERCICE D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 1 DU PREMIER TRIMESTRE

Limites, continuité, dérivation et étude de fonctions

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to +\infty}\left(-2x^2 - x^3 + 6x^5\right)$

b) $\lim_{x \to -\infty}\left(2x^2 + x^3 - 6x^5\right)$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2+6x+5}{x-3}$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{-2x^2+x+1}{x^2+x-2}$

e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{|-2x+3|}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x-2x^2+\sqrt{2}x^3}{2x^3-8}$

g) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

h) $\lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{\sqrt{x+7}-3}$

i) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2x}{x^5-1}$

Exercice 2

a) On donne $g(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2x-3}; & si\ x < 0 \\ x^2 - 1; & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{2x^2 + x - 1}; & si\ x > 2 \end{cases}$

b) Expliquer pourquoi g est continue sur chacun des intervalles: $]-\infty\ ; 0[\ ;\ ]0\ ; 2[$ et $]2\ ; +\infty[$

c) Etudier la continuité de g en 0 et en 2.

d) g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3

1) Déterminer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants :

a) $f(x) = cosx - sinx$

b) $f(x) = cos\left(-3x + \frac{\pi}{3}\right)$

c) $f(x) = sin\left(x^2 - \frac{\pi}{6}\right)$

d) $f(x) = sin^2x\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

e) $f(x) = sin(cosx)$

f) $f(x) = (2x^2 + 1)(3x - 1)^2$

g) $f(x) = (x + 1)^3 + 1$

h) $f(x) = (tan^3x)tanx$

2) Calculer les dérivées des fonctions suivantes en admettant qu'elles soient dérivables sur l'intervalle I donné.

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $I =]0;\ +\infty[$

$g(x) = \frac{2x+3}{(3x-1)^2}$, $I = \left]\frac{1}{3};\ +\infty\right[$

$h(x) = (x^2 + x + 1)^4\sqrt{2x + 3}$, $I = \left]-\frac{3}{2};\ +\infty\right[$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la fonction f, puis préciser ses extremums.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+9}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

d) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

Exercice 5

I- Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où $a, b\ et\ c$ sont des nombres réels.

1) Calculer $f'(x)$;

2) Déterminer les réels a, b et c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$.
3) Etudier la fonction f. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-1; 0]$, une solution unique β dans $[0; 1]$ et une solution unique γ dans $[2; 3]$.
4) Tracer la courbe (C_f) de f.

II- Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 5$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [4; 5]$.
3) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

EXERCICES TYPES DE LA COMPETENCE DE BASE 1 DU PREMIER TRIMESTRE ET SOLUTIONS

Enoncé 1

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 24x + 3.$

1- a) Déterminer la fonction dérivée f' de f

b) étudier le sens de variation de f'

c) calculer $f'(-2)$ et en déduire le signe de $f'(x)$.

2- Etudier le sens de variation de f

Solution

1- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

a) $f'(x) = 3x^3 + 6x^2 + 12x + 24$

b) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$f''(x) = 9x^2 + 12x + 12$

$\forall x \in \mathbb{R}, 9x^2 + 12x + 12 > 0$, donc $f''(x) > 0$.

f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $f'(-2) = 3 \times (-2)^3 + 6x(-2)^2 + 12x + (-2) + 24$

$= -24 + 24 - 24 + 24$

$f'(-2) = 0$

2- f' étant strictement croissante, $f'(-2) = 0$

On en déduit que : $\forall x \in]-\infty; -2[, f'(x) < 0$

$\forall x \in]-2; +\infty[, f'(x) > 0$

Donc : f est strictement décroissante sur $]-2; +\infty[$

et strictement croissante sur $]-2; +\infty[$

Enoncé 2

Montrer que pour tout réel x, l'équation $2\,x - Sinx = m$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$, puis montrer que cette solution est unique.

Solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - Sinx$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

- Calculons les limites aux bornes de $D_f = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq Sinx \leq 1$

$$\Longrightarrow 2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$$

$\lim_{x\to+\infty}(2x+1) = +\infty$, on déduit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et comme $\lim_{x\to-\infty}(2x-1) = +\infty$, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $m \in]-\infty; +\infty[$, m a au moins un antécédent par f dans $\mathbb{R}$. On en déduit que l'équation $f(x) = m$ soit $2x - Sinx = m$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

- Montrons que cette solution est unique.

En effet : $f'(x) = 2 - Cosx$.

Or $Cosx \leq 1$, donc $f'(x) > 0$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc on peut conclure que l'équation

$f(x) = m$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Enoncé 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + 2\sqrt{1-x}, Si\ x \leq 1 \\ \frac{x^3-1}{x^3+1}, Si\ x > 1 \end{cases}$$

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Montrer que f est continue en 1.

2) Etudier la dérivabilité de f en 1 et donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

3) Calculer la limite en plus l'infini de f et en déduire une interprétation graphique du résultat.

4) Calculer $f(-3)$, puis la limite en moins l'infini de f.

5) Montrer que f est strictement croissante sur $[1\,; +\infty[$.

6) Montrer que $\forall \in]-\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

7) Dresser le tableau de variation de f.

8) Tracer $(\mathcal{C})$

9) Soit g la restriction de f définie sur $[1\,;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Tracer $(\mathcal{C}_{g^1})$ dans le même repère.

c) Déterminer g^1 pour tout x de J

d) Calculer $g(\sqrt[3]{2})$, en déduire $g^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

Solution

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + 2\sqrt{1-x}, Si\ x \leq 1 \\ \frac{x^3-1}{x^3+1}, Si\ x > 1 \end{cases}$$

1) Montrons que f est continue en 1 :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{x\to 1}(x - 1 + 2\sqrt{1-x}) = 1 - 1 + 2\sqrt{1-1} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-1}{3-1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = 0$$

On déduit que : $\lim_{x} \longrightarrow 1\, f(x) = f(1) = 0$ donc f est continue en 1.

2) Etudions la dérivabilité de f en 1

- Dérivabilité de f à gauche en 1

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x-1+\sqrt{1-x}}{x-1} = 1 + 2\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$$

$1 + 2\frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}}$ posons $X = \sqrt{1-x}$

Or $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}}\right) = \lim_{\substack{X\to 0\\ >}} = \left(1 - \frac{2}{X}\right) = -\infty$

Donc : $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en 1.

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^3-1}{(x-1)(x^3+1)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^3+1)} = \frac{x^2+x+1}{x^3+1}$$

Or $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^3+1} = \frac{3}{2}$. Donc $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}$.

f est dérivable à droite en 1

Interprétation géométrique des résultats

- $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$. On déduit que la courbe $\left(\mathcal{C}_g\right)$ admet à gauche en 1 une tangente verticale.
- $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}$. On remarque que la courbe $\left(\mathcal{C}_g\right)$ admet à droite en 1 une tangente (T) de coefficient directeur $\frac{3}{2}$.

3) Limite de f en $+\infty$.

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1.$

On en déduit que $\left(\mathcal{C}_f\right)$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

4) On a : $f(-3) = 3 - 1 + 2\sqrt{1-(-3)} = -4 + 4 = 0$

$$f(-3) = 0$$

Limite de f en $-\infty$

On a : $f(x) = (x-1)\left[1 + 2\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}\right] = (x-1)\left[1 - 2\frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^2}\right]$

$f(x) = (x-1)\left[1 - 2\frac{2}{\sqrt{1-x}}\right]$.

Or : $\lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}}\right] = 1$

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

5) Montrons que f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$

$\forall x \in [1\,;+\infty[, f'(x) = \frac{3x^2(x^3+1)-(x^3-1)\times 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{3x^5+3x^2-3x^5+3x^2}{(x^3+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}\ .$$

$\forall x \in [1\,;+\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

6) Montrons que $\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) =$

$\forall x \in]-\infty; 1[$, on : $f'(x) = 1 + 2 \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

$$f'(x) = 1 - \frac{-1}{\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\left(\sqrt{\sqrt{1-x}-1}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{\left(\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}.$$

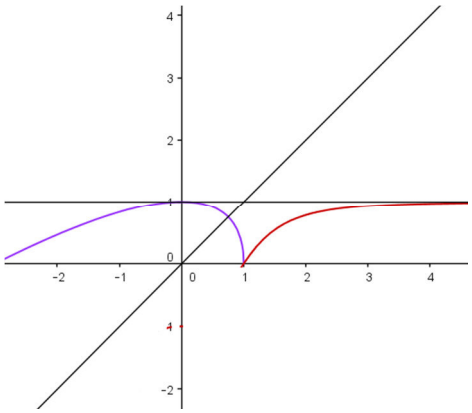
$$f'(x) = \frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$

D' où : $\forall x \in]-\infty; 1[$.

7) Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0 ‖ 1	↗	1

8) Tracer $(\mathcal{C}_f)$



9) g est définie sur$[1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}$.

a) Montrons g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

g est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$; donc J réalise une bijection sur $[1 ; \infty[$.

On en déduit que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J=$[0 ;1[$.

b) Tracé de (g^{-1}).

c) Détermination de g^{-1} pour tout $x \in J$.

$g(x) = y$, avec $x \in [1 ; +\infty[$ et $y \in [0; 1[$.

$g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$

$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x^3+1} = y \Leftrightarrow x^3 - 1 = x^3y + y$

$\Leftrightarrow x^3(1 - y) = 1 + y$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{1+y}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1+y}{1-y}}.$$

On obtient : $g^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{1+y}{1-y}}$; donc $\forall x \in J$, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$.

d) Calcul de $g(\sqrt[3]{2})$

$$g(\sqrt[3]{2}) = \frac{(\sqrt[3]{2})^3 - 1}{(\sqrt[3]{2})^3 + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit que : $g^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{2}$.

Enoncé 4

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et pour tout réel x,

$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

On admet que cette fonction existe et on ne cherche pas à déterminer une expression de $f(x)$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1) Justifier l'existence et l'unicité d'une primitive f de f' sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ (on ne demande pas de calculer).
2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) + f(-x)$.
   a) Calculer $g'(x)$ pour tout x réel.
   b) Calculer $g(0)$ et en déduire que g est une fonction impaire.
3) Soit I la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $I(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.
   a) Calculer la dérivée $I'(x)$ de I pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
   b) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, f possède une limite en $+\infty$ qui vaut $2f(1)$.
   c) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?
4) On considère la fonction T définie sur $\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $T(x) = f(tanx) - x$.
   a) Montrer que T est dérivable et calculer T'.
   b) En déduire une expression de T
   c) En déduire $f(1)$ et la limite de f en $+\infty$.
   d) Calculer $f(\sqrt{3})$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
      - dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
      - tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Solution

$f(0) = 0$; $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

1) justifions l'existence et l'unicité d'une primitive de f.

Existence

f est continue sur $\mathbb{R}$ car f' est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc f' admet une primitive f sur $\mathbb{R}$.
Unicité
Soient f et g deux primitives de f' sur $\mathbb{R}$.
Alors $\int f'(x)dx = f(x) + c$ (1) et $\int f'(x)dx = g(x) + c'$ (2)
De (1) et (2) on obtient $f(x) + c = g(x) + c'$
$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + c' - c$.
Or $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$, donc $c = c'$ et par suite $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est unique.
2) $g(x) = f(x) + f(-x)$, $D_g = \mathbb{R}$.

a) Calculons $'(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) - f'(-x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 0.$

b) Calculons $g(0)$.

$g(0) = f(0) + f(0) = 0$.

Déduisons-en que g est une fonction impaire.

On a : $g'(0) = 0 \Longrightarrow g$ est constante. Comme $g(0) = 0$, g est la fonction nulle.

Donc : $f(x) + f(-x) = 0$ c'est-à-dire que: $f(-x) = -f(x)$; d'où f est impaire.

3) $I(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, $D_I = \mathbb{R}^*$.

a) Calcul de $I'(x), \forall x \in \mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, I'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

$$I'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, I'(x) = 0.$

b) Déterminons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2f(x).$

On a : $f(x) = I(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \to +\infty} \left[I(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} I(x) = f(1)$
Car I est une fonction constante, et $\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0.$
Aussi, $I(x) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2f(1).$

c) On en déduit que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale qui est la droite

d'équation $y = 2f(1)$.

4) Soit T la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $T(x) = f(tanx) - x$.

a) Montrons que T est dérivable et calculons $T'(x)$.

La fonction $x \longrightarrow tanx$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $tan\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$,

or f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'où T= $f \circ tan$ est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, T'(x) = (tanx)' \times f'(tanx) - 1$

$T'(x) = (1 + tan^2x) \times \frac{1}{tan^2+1} = 1 - 1 = 0$

Donc $T'(x) = 0$.

b) Déduis-en une expression simple de T.

La dérivée de T est constante et vaut 0, donc T est une fonction constante.

Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $T(x) = T(0) = f(tan0) - 0 = 0$

Donc : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, T(x) = 0$.

c) Déduisons-en $f(1)$. On sait que $tan\frac{\pi}{4} = 1$

Donc : $T\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, or $T\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(tan\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}$

$f(1) = -\frac{\pi}{4}$ d'où : $f(1) = \frac{\pi}{4}$

$T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

- $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 2f(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Donc $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

d) $T(x) = f(tanx) - x \Longrightarrow f(tanx) = T(x) + x$

Or $tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, d'où $f\left(tan\frac{\pi}{3}\right) = f(\sqrt{3}) = T\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

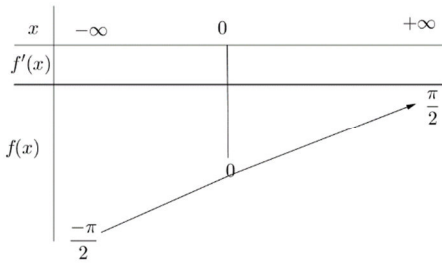
Donc : $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

De plus, on a : $tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, or $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = T\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

Car $T(x) = 0$. Donc $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

- Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

$f'^{(x)} = \frac{1}{x+x^2} > 0$, donc f est strictement croissante.



Trace les asymptotes d'équations $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$. Construis la courbe sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et complète par la symétrie de centre O pour obtenir$(\mathcal{C})$.

Enoncé 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative.

1) Exprimer $f(x)$ sans symbole à valeur absolue

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition : $(\mathcal{C})$ admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?

3) Etudier les variations de f

4) Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = x + 3$ sont asymptotes à $(\mathcal{C})$

5) Tracer $(\mathcal{C})$ et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie dont on précisera l'équation

6) Démontrer que, pour tout réel x de $[1\,;5]$,le point $M(x; f(x))$ est à une distance constante du point $\Omega(3\,;0)$. En déduire la nature de $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[1\,;5]$.

Solution

$f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$

1) Expression de $f(x)$ sans symbole « valeur absolue ».
   - Pour tout $x \in]-\infty;1]\cup[5\,;+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 5}$
   - Pour tout $x \in [1\,;5]$, $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$
2) Continuité de f sur $D = \mathbb{R}$

   $f(1) = 0$; $\lim\limits_{1^-} f = 0$, ; $\lim\limits_{1^+} f = 0$

   $f(5) = 0$; $\lim\limits_{5} f = 0$ et $\lim\limits_{5} f = 0$

   f est continue en 1 et 5, donc f est continue sur $\mathbb{R}$

   Dérivabilité de f sur D.

   f est dérivable sur I=$]-\infty;1]$, $\cup[5\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur I.

   $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} -\sqrt{\frac{5-x}{x-2}} = -\infty$

   $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to5^-} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to5^+} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = +\infty$

   f n'est ni dérivable en 1 ni en 5.

Aux points d'abscisses 1 et 5, $(\mathcal{C})$ admet des tangentes verticales.

3) Etude de f.

$\forall x \in]-\infty;1], \cup [5\,;+\infty[, f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x-5}}$

$\forall x \in]1;5[,\ f'(x) = \frac{-x+3}{\sqrt{x^2+6x-5}}$

4) $\Delta: y = x - 3$ asymptote en $+\infty$

$\Delta': y = -x + 3$ asymptote en $-\infty$

Montrons que la droite $\Delta: y = x - 3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

$$f(x) - (x-3) = \sqrt{x^2 - 6x + 5} - (x-3)$$

$$= \frac{x^2-6x+5-(x-3)^2}{\sqrt{x^2-6x+5}+(x-3)}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{x^2-6x+5}+(x-3)}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-6x+5}+(x-3)} = 0$

Donc la droite $\Delta: y = x - 3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

De même, on démontre que $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{-x^2+6x-5} - (-x+3)\right) = 0$

Et on conclut que la droite $\Delta': y = -x + 3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$

5) Axe de symétrie

$f(a+x) = f(a-x)$

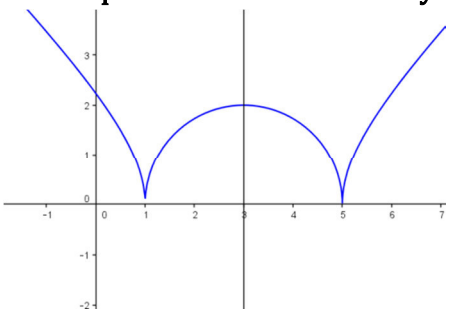
$\Leftrightarrow |(a+x)^2 - (a+x) + 5| = |(a+x)^2 - 6(a-x) + 5|$

$\Leftrightarrow 2ax - 6x = -2ax + 6x$

$\Leftrightarrow 4ax(a-3) = 0$

$\forall x \in D_f, a = 3$

Donc la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie à $(\mathcal{C})$



6) Montrons que ΩM est constante

Soit $M(x), f(x), x \in [1\,;5]$

On a : $Mx\left(\sqrt{x^2+6x-5}\right)$ et $\Omega\ (3\,;0)$

$\Omega M^2 = (x-3)^2 + (-x^2 + 6x - 5)$

$\Omega M^2 = 4$. Donc ΩM=2

Dans [1 ;5], $(\mathcal{C})$ est un demi-cercle de centre $\Omega(3\ ;0)$ et de rayon 2.

EXERCICE D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 2 DU PREMIER TRIMESTRE

SYSTEMES LINEAIRES

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes d'équations linéaires suivants :

1) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = -2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + y + z = -2 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant puis donner une interprétation géométrique du résultat : $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 7 \\ -x + y - 2z = 2 \end{cases}$

Exercice 3

Déterminer les nombres réels a, b et c tels que ; pour tout nombre réel $x \neq -1$,

$$\frac{1}{(x+1)^2} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{x+1}$$

Exercice 4

1) Utiliser la méthode de Gauss pour résoudre le système d'équations linéaires suivant dans $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ -x + y - z + t = -6 \\ 8x + 4y + 2z + t = 12 \end{cases}$$

2) Déterminer les coefficients réels a, b, c, d de la fonction $f : X \longmapsto aX^3 + bX^2 + cX + d$, sachant que $f(1) = 0$; $f(-1) = -6$, $f(2) = 12$ et $f'(1) = 5$.

ARITHMETIQUE

Exercice 5

a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD de 676 et 2002.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $\mathbf{676x + 2002y = 2}$.

Exercice 6

A l'aide du théorème de Bezout, démontrer que pour tout entier relatif $\boldsymbol{n}$, $\mathbf{2n + 5}$ et $\mathbf{5n + 3}$ sont premiers entre eux.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes :

(a)$\begin{cases} x \equiv 7(8) \\ x \equiv 11(12) \end{cases}$; (b)$\begin{cases} x \equiv 7(129) \\ x \equiv 11(1223) \end{cases}$; (c)$\begin{cases} 15x \equiv 9(12) \\ 4x \equiv 5(7) \end{cases}$.

Exercice 8

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de $\mathbf{7^{2002}}$ par 9.

b) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel $\boldsymbol{n}$, le reste de la division euclidienne de $\mathbf{5^n}$ par 3.

Exercice 10

Ecrire $\mathbf{2^6 - 1}$ en base deux.

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

Déterminer le module et un argument du nombre complexe dans les cas suivants :

1) $= \boldsymbol{Cos\theta - isin\theta}$
2) $\boldsymbol{Z = -Sin\theta + iCos\theta}$
3) $\boldsymbol{Z = -2(Cos\theta + iSin\theta)}$
4) $\boldsymbol{Z = -2(Sin\theta + iCos\theta)}$
5) $\boldsymbol{Z = 1 + itan\theta}$
6) $\boldsymbol{Z = \frac{Cos\theta + isin\theta}{Cos\theta - isin\theta}}$

Exercice 2

1) Soit $\boldsymbol{Z}$ un nombre complexe tel que : $\boldsymbol{Z + \frac{1}{Z} = 2Cos\theta}$. Démontrer que pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{Z^n + \frac{1}{Z^n} = 2Cosn\theta}$.
2) A tout nombre complexe $\boldsymbol{z \neq 2i}$, on associe le nombre complexe $\boldsymbol{Z = \frac{z+i}{z-2i}}$.
   a) Déterminer l'ensemble $\boldsymbol{E_1}$ des points M images de $\boldsymbol{Z}$ tel que $\boldsymbol{Z}$ soit réel.
   b) Déterminer l'ensemble $\boldsymbol{E_2}$ des points M images de $\boldsymbol{Z}$ tel que $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ soit un argument de $\boldsymbol{Z}$.

Exercice 3

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

1) Résolvez dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes :
   a) $\boldsymbol{z^2 - z + 1 = 0}$
   b) $\boldsymbol{z^2 - 4z + 1 = 0}$
2) A l'aide des résultats de 1°), on se propose maintenant de résoudre l'équation :
   $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0}$
   a) Vérifiez que 0 n'est pas solution de $(\boldsymbol{E})$
   b) Soit $(\boldsymbol{E'})$ l'équation $\boldsymbol{z^2 + \frac{1}{z^2} - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0}$. Montrez que $(\boldsymbol{E})$ et $(\boldsymbol{E'})$ ont même solution dans $\mathbb{C}$
   c) On pose $\boldsymbol{u = z + \frac{1}{z}}$; calculez $\boldsymbol{z^2 + \frac{1}{z^2}}$ en fonction de $\boldsymbol{u}$
   d) Montrez que $\boldsymbol{u}$ est solution de l'équation $\boldsymbol{u^2 - 5u + 4 = 0}$. Déduisez-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(\boldsymbol{E})$.

Exercice 4

1) soit α et β deux nombres complexes,
   a) Développez : $(\boldsymbol{\alpha - \beta})(\boldsymbol{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2})$;
   b) déduisez-en la résolution dans C de l'équation : $\boldsymbol{z^3 - 8 = 0}$
2) Déduisez de la question 1°), les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\boldsymbol{(z + 1)^3 - 8 = 0}$
3) Montrez que les points du plan complexe dont les affixes sont les solutions de l'équation proposée à la question 2°) sont les sommets d'un triangle équilatéral que l'on représentera.

Exercice 5

Soit la fonction $\boldsymbol{h}$ de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\boldsymbol{h(Z) = \frac{Z}{Z^2+Z+1}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de $\boldsymbol{h}$.
2) On pose $\boldsymbol{Z = h(-1 + i)}$. Calculer $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{\frac{1}{Z}}$ et $\boldsymbol{Z^8}$. On donnera chacun des résultats sous forme algébrique et forme trigonométrique.
3) On pose $\boldsymbol{Z = e^{i\theta}}$. Démontrer que dans ce cas $\boldsymbol{\overline{h(Z)} = h(\overline{Z}) = h(Z)}$.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}; \boldsymbol{I}; \boldsymbol{J})$, l'unité graphique etant égale à 1cm.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\boldsymbol{Z^3 - (6 + i\sqrt{3})Z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})Z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0}$

1) Résoudre cette équation en sachant qu'elle a deux solutions réelles.
2) On désigne par A, B, C, D et E les points d'abscisses respectives : $\boldsymbol{3}$, $\boldsymbol{2 + i\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{-1}$, $\boldsymbol{7\ et\ 11 + i\sqrt{3}}$.
   a) Démontrer que les points B, C et E sont alignés.
   b) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.
   c) Placer les points A, B, C, D et E.

3) Soit $\boldsymbol{f}$ une application du plan dans lui-même qui transforme A en D et B en E.
   a) Donner l'écriture complexe de $\boldsymbol{f}$.
   b) Caractériser l'application $\boldsymbol{f}$.
4) Calculer l'affixe du point F image de l'axe des abscisses tel que le triangle $\boldsymbol{DFE}$ soit équilatéral.

Exercice 7

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

On considère l'application $\boldsymbol{f}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\boldsymbol{f(z) = z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45}$.

1) a) Montrer que l'équation $\boldsymbol{f(z) = 0}$ admet une unique solution réelle $\boldsymbol{z_0}$ et une unique solution imaginaire pure $\boldsymbol{z_1}$ que l'on déterminera.

   b) Démontrer qu'il existe un couple $(\boldsymbol{\alpha}\,;\boldsymbol{\beta})$ de nombres complexes que l'on déterminera tel que pour tout nombre complexe $\boldsymbol{z}$,

$\boldsymbol{f(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z^2 + \alpha z + \beta)}$.

   c) En déduire l'ensemble de solution de l'équation $\boldsymbol{f(z) = 0}$.
2) Soit A, B, C et D les points du plan complexe d'affixes respectives $\boldsymbol{3i}$, $\boldsymbol{1-2i}$, $\boldsymbol{2-i}$ et $\boldsymbol{-3}$.
   a) Montrer qu'il existe une rotation $\boldsymbol{r}$ qui transforme A en B et C en D. On précisera son centre ainsi que le cosinus et le sinus d'une mesure (en radians) de son angle.
   b) Montrer qu'il existe une homothétie $\boldsymbol{h}$ qui transforme A en B et D en C. On précisera son centre ainsi que son rapport.
   c) Donner la nature géométrique de $\boldsymbol{r \circ h}$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

EXERCICES TYPES DE LA COMPETENCE DE BASE 2 DU PREMIER TRIMESTRE ET SOLUTIONS

ARITHMETIQUE

Enoncé 1

Effectuer la division euclidienne de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$, sachant que :

1) $\boldsymbol{a} = \mathbf{47}$ et $\boldsymbol{b} = \mathbf{9}$
2) $\boldsymbol{a} = -\mathbf{47}$ et $\boldsymbol{b} = \mathbf{9}$

Solution

Effectuons la division euclidienne de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$:

1) $\boldsymbol{a} = \mathbf{47}$ et $\boldsymbol{b} = \mathbf{9}$

On a : $\mathbf{47} = \mathbf{9} \times \mathbf{5} + \mathbf{2}$ et $\mathbf{0} \leq \mathbf{2} < \mathbf{9}$

Donc $\boldsymbol{q} = \mathbf{5}$ et $\boldsymbol{r} = \mathbf{2}$.

2) $\boldsymbol{a} = -\mathbf{47}$ et $\boldsymbol{b} = \mathbf{9}$

On a :$-\mathbf{47} = \mathbf{9} \times (-\mathbf{6}) + \mathbf{7}$ et $\mathbf{0} \leq \mathbf{7} < \mathbf{9}$

Donc $\boldsymbol{q} = -\mathbf{6}$ et $\boldsymbol{r} = \mathbf{7}$.

Enoncé 2

1) Ecrire le nombre 121 dans le système à base 5.
2) Soit A le nombre écrit en base 3 : $\boldsymbol{A} = \overline{\mathbf{122101}}^{\mathbf{3}}$. Ecrire A en base 10.
3) Ecrivons le nombre 3 945 dans le système hexadécimal.
4) Ecrire le nombre $\overline{\boldsymbol{BAC}}^{\mathbf{16}}$ en base 10.

Solution

1) On sait que 121 est écrit dans le système décimal.

On a : 121= $\mathbf{1} \times \mathbf{10}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2} \times \mathbf{10}^{\mathbf{1}} + \mathbf{1} \times \mathbf{10}^{\mathbf{0}}$.

On peut aussi décomposer le nombre 121 de la façon suivante :

121= $\mathbf{100} + \mathbf{20} + \mathbf{1} = \mathbf{4} \times \mathbf{5}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4} \times \mathbf{5} + \mathbf{1} \times \mathbf{5}^{\mathbf{0}}$.

Nous venons de convertir le nombre 121 dans le système à base 5.

On écrit donc : $\mathbf{121} = \overline{\mathbf{441}}^{\mathbf{5}}$.

2) Soit A le nombre écrit en base 3 : $\boldsymbol{A} = \overline{\mathbf{122101}}^{\mathbf{3}}$.

Ecrivons ce nombre en base 10.

On a : $\boldsymbol{A} = \overline{\mathbf{122101}}^{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \times \mathbf{3}^{\mathbf{5}} + \mathbf{2} \times \mathbf{3}^{\mathbf{4}} + \mathbf{2} \times \mathbf{3}^{\mathbf{3}} + \mathbf{1} \times \mathbf{3}^{\mathbf{2}} + \mathbf{0} \times \mathbf{3}^{\mathbf{1}} + \mathbf{1} \times \mathbf{3}^{\mathbf{0}}$

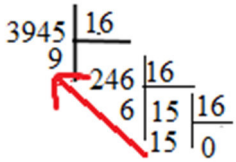
$= \mathbf{243} + \mathbf{162} + \mathbf{54} + \mathbf{9} + \mathbf{0} + \mathbf{1}$

$= \mathbf{469}$

Donc A= $\mathbf{46}$9 en base décimale.

3) Ecrivons le nombre 3 945 dans le système hexadécimal.

Effectuons d'abord les divisions successives de 3 945 par 16.
On a :



On a donc 39454= $\overline{F69}^{16}$.

4) Soit le nombre $\overline{BAC}^{16}$.
Ecrivons-le en base 10. Ona : $\overline{BAC}^{16} = 11.16^2 + 10.16^1 + 12.16^0$
$= 2816 + 160 + 12$
$= 2988$
Donc $\overline{BAC}^{16} = 2988$.

Enoncé 3

1) Déterminer le reste de la division de 50^{100} par 7.
2) Déterminer le reste de la division de 50^{100} par 7

Solution

1) Déterminons le reste de la division de 50^{100} par 7.

On cherche d'abord le reste de la division de 50 par 7. On sait que 50= $7 \times 7 + 1$

donc 50≡ $1(7)$.

On sait que si $a \equiv b(n) \Longrightarrow a^p \equiv b^p(n)(P_8)$ donc $50^{100} \equiv 1^{100}(7)$ or $1^{100} = 1$ donc $50^{100} \equiv 1(7)$.

Le reste de l'addition 50^{100} par 7 est 1.

2) Cherchons le reste de la division de 100^{100} par 7.

On sait que $100 = 14 \times 7 + 2$ donc $100 \equiv 2(7)$ et par application de la propriété P_8, on a : $100^{100} \equiv 2^{100}(7)$. On est obligé de chercher le reste de la division de 2^{100} par 7. Pour cela, on procède de la manière suivante :

2≡ $2(7) \Longrightarrow 2^2 \equiv 4(7) \Longrightarrow 2^3 \equiv 1(7)$ donc $(2^3)^{33} \equiv 1^{33}(7)$

$2^{99} \equiv 1^{33} \equiv 1(7)$ or $2^{100} = 2^{99}.2^1$ et comme $2^{99}.2^1 \equiv 1.2(7)$ donc $2^{100}2 \equiv 2(7)$.

On a donc $100^{100} \equiv 2(7)$ on dit que 2 est le reste de la division de 100^{100} par 7.

Enoncé 4
Trouver le nombre de diviseurs de 480 et déterminer tous ces diviseurs.
Solution
Trouvons le nombre de diviseurs de 480 et déterminons tous ces diviseurs.
Cherchons d'abord la décomposition de 480 en produit de facteurs premiers.

On a :$\mathbf{480 = 2^5 \times 3 \times 5}$.
A partir de cette décomposition, on peut déterminer le nombre de diviseurs de 480. On utilse la formule $\boldsymbol{\varphi(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_m + 1)}$.
Ici, $\boldsymbol{n = 480}$ avec $\boldsymbol{p_1 = 2}$, $\boldsymbol{p_2 = 3}$ et $\boldsymbol{p_3 = 5}$ et $\boldsymbol{\alpha_1 = 5}$, $\boldsymbol{\alpha_2 = 1}$ et $\boldsymbol{\alpha_3 = 1}$.
On a alors $\boldsymbol{\varphi(480) = (5 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 6 \times 2 \times 2 = 24}$.
480 a donc 24 diviseurs.

Déterminons tous les diviseurs de 480. Pour cela, construisons un tableau à double entrée comme suit :

	$\mathbf{2^0}$	2^1	$\mathbf{2^2}$	$\mathbf{2^3}$	$\mathbf{2^4}$	$\mathbf{2^5}$
$\mathbf{3^0.5^0}$	1	2	4	8	16	32
$\mathbf{3^0.5^1}$	5	10	20	40	80	160
$\mathbf{3^1.5^0}$	3	6	12	24	48	96
$\mathbf{3^1.5^1}$	15	30	60	120	240	480

Nous vérifions bien que tous ces nombres sont des diviseurs de 480 et qu'ils sont au nombre de 24.

$\boldsymbol{\mathcal{D}(480) = \{1, 2, 3, 4\ , 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 80, 96, 120, 160, 240, 480\ \}}$

Enoncé 5

Soit $\boldsymbol{n}$ un entier relatif, démontrer que $\boldsymbol{n^3 - n}$ est multiple de 6.

Solution

Soit $\boldsymbol{n}$ un entier relatif, démontrons que $\boldsymbol{n^3 - n}$ est multiple de 6.

On sait que $\boldsymbol{n^3 - n = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1) \times n \times (n + 1)}$ donc $\boldsymbol{n^3 - n}$ est le produit de trois entiers consécutifs. Or lorsqu'on a 3 entiers consécutifs l'un d'entre eux est multiple de 3, ce qui nous amène à dire que $\boldsymbol{n^3 - n}$ est u n multiple de 3.

Par ailleurs, si nous considérons deux entiers consécutifs, l'un d'entre eux est un multiple de 2 donc on peut aussi dire que $\boldsymbol{n^3 - n}$ est multiple de 2.

Comme $\boldsymbol{n^3 - n}$ est multiple de 2 et 3, alors $\boldsymbol{n^3 - n}$ est multiple de 6.

Enoncé 6

1) Déterminer une solution, dans $\mathbb{Z}^2$de l'équation : $\boldsymbol{7x - 24y = 1}$.

2) En déduire une solution, dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation $\boldsymbol{7x - 24y = 5}$.

Résolution

1) Déterminons PGCD(7, 24).

Sachant que $\boldsymbol{7 = 1 \times 7}$ et 24= $\boldsymbol{2^3 \times 3}$, PGCD(7,24)=1.

comme PGCD(7, 24)=1, alors d'après le corollaire, il existe $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ entiers relatifs tels que $\mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{24}\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$.

Or $\mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{24}\boldsymbol{y} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{24}\boldsymbol{y} + \mathbf{1} = \mathbf{7}\boldsymbol{x}$.

Pour $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{24} \times \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{1}$ et 1 n'est pas multiple de 7.

Pour $\boldsymbol{y} = \mathbf{2}$, $\mathbf{24} \times \mathbf{2} + \mathbf{1} = \mathbf{49}$ et $49 = \mathbf{7} \times \mathbf{7}$, multiple donc de 7.

On a alors $\mathbf{7} \times \mathbf{7} - \mathbf{24} \times \mathbf{2} = \mathbf{1} \Longrightarrow$ le couple (7,2) est une solution de l'équation $\mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{24}\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$.

2) Déduisons en une solution de l'équation $\mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{24}\boldsymbol{y} = \mathbf{5}$.

Nous avons vu que l'équation $\mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{24}\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$ admet une solution (7, 2) car $\mathbf{7} \times \mathbf{7} - \mathbf{24} \times \mathbf{2} = \mathbf{1}$.

En multipliant membre à membre cette égalité par 5, on a $\mathbf{7} \times \mathbf{7} \times \mathbf{5} - \mathbf{24} \times \mathbf{2} \times \mathbf{5} = \mathbf{1} \times \mathbf{5}$ et nous remarquons que l'égalité est vraie.

Donc l'équation $\mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{24}\boldsymbol{y} = \mathbf{5}$ admet une solution qui est le couple (35,10).

Enoncé 7

On désigne par $\boldsymbol{p}$ un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}^{\mathbf{4}} - \mathbf{1}$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat .

1) Montrer que $\boldsymbol{p}$ est congru à $-\mathbf{1}$ ou 1 modulo 3. En déduire que $\boldsymbol{n}$ est divisible par 3.
2) En remarquant que $\boldsymbol{p}$ est impair, prouver qu'il existe un entier naturel $\boldsymbol{k}$ tel que $\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}} - \mathbf{1} = \mathbf{4}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} + \mathbf{1})$, puis que $\boldsymbol{n}$ est divisible par 16.
3) En considérant tous les restes possible de la division euclidienne de $\boldsymbol{p}$ par 5, démontrer que 5 divise $\boldsymbol{n}$.
4) a) Soient $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ***et*** $\boldsymbol{c}$ trois entiers naturels. Démontrer que si $\boldsymbol{a}$ divise $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{b}$ divise $\boldsymbol{c}$, avec $\boldsymbol{a}$ ***et*** $\boldsymbol{b}$ premiers entre eux, alors $\boldsymbol{ab}$ divise $\boldsymbol{c}$.
   b) Déduire de ce qui précède que 240 divise $\boldsymbol{n}$.

Solution

1) Montrons que $\boldsymbol{p}$ est congru à $-\mathbf{1}$ ou 1 modulo 3. Déduisons-en que $\boldsymbol{n}$ est divisible par 3.

Soit $\boldsymbol{p}$ un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Alors, nécessairement $\boldsymbol{p} \equiv \mathbf{0}[\mathbf{3}]$ ou $\boldsymbol{p} \equiv \mathbf{1}[\mathbf{3}]$ ou $\boldsymbol{p} \equiv \mathbf{2}[\mathbf{3}]$, or $\boldsymbol{p}$ est un nombre entier premier supérieur ou égal à 7, il ne peut pas être multiple de 3, d'où $\boldsymbol{p} \equiv \mathbf{1}[\mathbf{3}]$ ou $\boldsymbol{p} \equiv \mathbf{2}[\mathbf{3}]$.

Donc $\boldsymbol{p} \equiv \mathbf{1}[\mathbf{3}]$ ou $\boldsymbol{p} \equiv -\mathbf{1}[\mathbf{3}]$.

Déduction.

On a : $\boldsymbol{n = p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)}$

- Si $\boldsymbol{p \equiv 1[3]}$, alors $\boldsymbol{p - 1 \equiv 0[3]}$, d'où $\boldsymbol{(p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)0[3]}$, soit $\boldsymbol{n \equiv 0[3]}$
- Si $\boldsymbol{p \equiv -1[3]}$, alors $\boldsymbol{p + 1 \equiv 0[3]}$, d'où $\boldsymbol{(p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)0[3]}$, soit $\boldsymbol{n \equiv 0[3]}$
  Donc $\boldsymbol{n}$ est divisible par3.

2) Si $\boldsymbol{n}$ est impaire, prouvons qu'il existe un entier naturel $\boldsymbol{k}$ tel que

$\boldsymbol{p^2 - 1 = 4k(k + 1)}$, puis que $\boldsymbol{n}$ est divisible par 16.

On sait que $\boldsymbol{p}$ un nombre entier premier supérieur ou égal à 7, nous avons $\boldsymbol{p}$ impair, c'est-à-dire qu'il existe $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{p = 2k + 1}$. On en déduit que :

$\boldsymbol{p^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)}$.

Donc $\boldsymbol{p^2 - 1 = 4k(k + 1)}$.

Montrons que $\boldsymbol{n}$ est divisible par 16.

On a : $\boldsymbol{p^2 - 1 = 4k(k + 1)}$, or $\boldsymbol{k\ et\ k + 1}$ sont des entiers de parité différentes, donc le produit $\boldsymbol{k(k + 1)}$ est pair c'est-à-dire divisible par 2. Par suite, $\boldsymbol{p^2 - 1}$ est divisible par 8. D'autre part, $\boldsymbol{p^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1)}$, avec $\boldsymbol{2k^2 + 2k + 1} \in \mathbb{N}$.

Donc $\boldsymbol{p^2 + 1}$ est divisible par 2. Puisque $\boldsymbol{n}$=$\boldsymbol{(p^2 - 1)(p^2 + 1)}$, on en déduit que $\boldsymbol{n}$ est divisible par 16.

3) Considérons les restes possibles de la division euclidienne de $\boldsymbol{p}$ par 5, démontrons que 5 divise $\boldsymbol{n}$.

$\boldsymbol{p}$ est un nombre entier premier supérieur ou égal à 7, donc $\boldsymbol{p \equiv 1[5]}$ ou $\boldsymbol{p \equiv 2[5]}$.

ou $\boldsymbol{p \equiv 3[5]}$ ou $\boldsymbol{p \equiv 4[5]}$.

- Si $\boldsymbol{p \equiv 1[5]}$, il existe $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ tel que : $\boldsymbol{p = 5k + 1}$ et on a : $\boldsymbol{p - 1 = 5k}$, d'où 5 divise $\boldsymbol{n}$
- Si $\boldsymbol{p \equiv 2[5]}$, il existe $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ tel que : $\boldsymbol{p = 5k + 2}$ et on a : $\boldsymbol{p^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)}$, avec $\boldsymbol{5k^2 + 4k + 1} \in \mathbb{N}$, d'où 5 divise $\boldsymbol{n}$.
- Si $\boldsymbol{p \equiv 3[5]}$, il existe $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ tel que : $\boldsymbol{p = 5k + 3}$ et on a : $\boldsymbol{p^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 5(5k^2 + 6k + 2)}$, avec $\boldsymbol{5k^2 + 6k + 2} \in \mathbb{N}$, d'où 5 divise $\boldsymbol{n}$.
- Si $\boldsymbol{p \equiv 4[5]}$, il existe $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ tel que : $\boldsymbol{p = 5k + 4}$ et on a : $\boldsymbol{p + 1 = 5k + 5 = 5(k + 1)}$, avec $\boldsymbol{+1} \in \mathbb{N}$, d'où 5 divise $\boldsymbol{n}$.

Finalement , on conclut que 5 divise $\boldsymbol{n}$.

4) a) Démontrons que si $\boldsymbol{a}$ divise $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{b}$ divise $\boldsymbol{c}$, avec $\boldsymbol{a\ et\ b}$ premiers entre eux, alors $\boldsymbol{ab}$ divise $\boldsymbol{c}$.
   $\boldsymbol{a}$ divise $\boldsymbol{c}$ signifie qu'il existe $\boldsymbol{m_1} \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{c = m_1 a}$
   $\boldsymbol{b}$ divise $\boldsymbol{c}$ signifie qu'il existe $\boldsymbol{m_2} \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{c = m_2 b}$
   On en déduit que $\boldsymbol{m_1 a = m_2 b}$, d'où $\boldsymbol{a}$divise $\boldsymbol{m_2 b}$.

Or $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont premiers entre eux, il s'en suit que $\boldsymbol{a}$ **divise** $\boldsymbol{m_2}$. Par conséquent, il existe $\boldsymbol{m_3} \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{m_2} = \boldsymbol{m_3 a}$. Ainsi on a $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{m_2 b} = \boldsymbol{m_3 ab}$. Ce qui prouve que $\boldsymbol{ab}$ divise $\boldsymbol{c}$.

b) Déduisons de ce qui précède que 240 divise $\boldsymbol{n}$.

On a montré que 3 divise $\boldsymbol{n}$; 16 divise $\boldsymbol{n}$ et 5 divise $\boldsymbol{n}$. Or 3, 5 et 16 sont deux à deux premiers entre eux, par conséquent $\mathbf{3 \times 5 \times 16}$ divise $\boldsymbol{n}$, donc 240 divise $\boldsymbol{n}$.

Enoncé 8

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $\boldsymbol{x^2 - 4x + 2 \equiv 0[7]}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} \boldsymbol{3x - y \equiv 1[5]\ (1)} \\ \boldsymbol{x + 2y \equiv 0[5]\ (2)} \end{cases}$

Solution

1) Utilisons un tableau de congruence modulo 7.

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{x^2 - 4x + 2}$	**2**	**6**	**5**	**6**	**2**	**0**	**0**

$\mathbb{Z}$: $\boldsymbol{x^2 - 4x + 2 \equiv 0[7]} \Leftrightarrow \boldsymbol{x \equiv 5[7]}$ ou $\boldsymbol{x \equiv 6[7]} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 7k + 5}$ ou $\boldsymbol{x = 7k + 6}$.

Donc S= $\{\boldsymbol{7k + 5, 7k + 6,\ k} \in \mathbb{Z}\}$.

2) Résolution du système $\begin{cases} \boldsymbol{3x - y \equiv 1[5]\ (1)} \\ \boldsymbol{x + 2y \equiv 0[5]\ (2)} \end{cases}$

$\boldsymbol{2 \times (1) + (2)} \Leftrightarrow \boldsymbol{7x \equiv 2[5]} \Leftrightarrow \boldsymbol{2x \equiv 2[5]}$, or PGCD$(\mathbf{2; 5}) = \mathbf{1}$ d'où $\boldsymbol{x \equiv 1[5]}$.

Dans $(\mathbf{2})$, on a: $\boldsymbol{1 + 2y \equiv 0[5]} \Leftrightarrow \boldsymbol{2y \equiv -1[5]} \Leftrightarrow \boldsymbol{2y \equiv 4[5]}$, or PGCD$(\mathbf{2; 5}) = \mathbf{1}$ d'où $\boldsymbol{y \equiv 2[5]}$

Donc S= $\{(\boldsymbol{5k + 1; 5k' + 2}), \boldsymbol{ou}\ (\boldsymbol{k; k'}) \in \mathbb{Z}^2\}$.

LES NOMBRES COMPLEXES

Enoncé 1

On considère le nombre complexe $\boldsymbol{x = -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - i\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$

1) Calculer $\boldsymbol{x^2}$, **en déduire le module et un argument de** $\boldsymbol{x}$.

2) Déduire de la question précédente les valeurs exactes de $\boldsymbol{Cos\,\frac{11\pi}{8}}$ **et** $\boldsymbol{Sin\,\frac{11\pi}{8}}$.

Solution

$\boldsymbol{x = -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - i\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = -\left(\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + i\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\right)\ (1)}$

1) Calculons x^2

$$x^2 = \left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2 + 2i\left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)$$

$$= 4 - 2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{16-8}$$

$$= -4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(-1+i)\,.$$

Déduisons-en le module et un argumente de x.

Posons $x_0 = \sqrt{4-2\sqrt{2}} + i\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; on a : $x = -x_0$

$$x_0{}^2 = 4\sqrt{2}(-1+i) = 8\left(Cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\,Sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Donc $x_0 = 2\sqrt{2}\left(Cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\,Sin\frac{3\pi}{8}\right)$.

Or $x = -x_0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}\left(Cos\left(\frac{3\pi}{8}+\pi\right) + \mathrm{i}\,Sin\left(\frac{3\pi}{8}+\pi\right)\right)$

D'où $x = 2\sqrt{2}\left(Cos\left(\frac{11\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\,Sin\left(\frac{11\pi}{8}\right)\right)$ (2).

Alors $|x| = 2\sqrt{2}$ et un argument de x est $\frac{11\pi}{8}$.

2) Valeur exacte de $Cos\left(\frac{11\pi}{8}\right)$ et $Sin\left(\frac{11\pi}{8}\right)$

Des écritures (1) et (2) de , il vient : $2\sqrt{2}Cos\frac{11\pi}{8} = -\sqrt{4-2\sqrt{2}} \Leftrightarrow Cos\frac{11\pi}{8} = -\frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Et $2\sqrt{2}Sin\frac{11\pi}{8} = \sqrt{4+2\sqrt{2}} \Leftrightarrow Sin\frac{11\pi}{8} = \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Enoncé 2

Soit un polynôme $P(z) = 2z^3 - 4z + \lambda$, $(\lambda \in \mathbb{R})$. On considère l'équation (E) : $P(z) = 0$

1) a) Montrer que si (E) admet une solution complexe z_0 alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E)

b) En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution réelle. On ne demande pas de la déterminer.

2) a) Déterminer λ pour que l'équation (E) admette comme solution réelle $\sqrt{2}$

b) Résoudre l'équation (E) pour la valeur $\lambda = 0$

3) On donne $\lambda = 8$.

a) Vérifier que $1 + i$ *est une solution de* (E)

b) Résoudre alors l'équation (E)

c) Déterminer le module et un argument à chaque solution de (E).

Solution

P(z)=$\boldsymbol{2z^3 - 4z + \lambda\ etsoitP(z) = 0}$

1)a)Montrons que si l'équation (E) admet une solution alors; $\overline{z_0}$ est aussi solution.

Supposons que $\boldsymbol{z_0}$ est solution de (E) c'est- à- dire $\boldsymbol{2{z_0}^3 - 4z_0 + \lambda = 0}$

P($\overline{z_0}$)=$\boldsymbol{2\overline{z_0}^3 - 4\overline{z_0} + \lambda = 2\overline{{z_0}^3} - \overline{4z_0} + \lambda = \overline{2\overline{{z_0}^3} - \overline{4z_0} + \lambda}}$=0, donc $\overline{z_0}$ est solution de (E).

b) $\boldsymbol{z_0\ et\ \overline{z_0}}$ sont solution de l'équation (E). Puisque (E) est un polynôme complexe à coefficients réels et de degré 3, alors elle admet au moins une solution réelle.

2) a) Pour que $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ soit solution, il faut que P($\boldsymbol{\sqrt{2}}$)=0.

Ainsi, P($\boldsymbol{\sqrt{2}}$)=$\boldsymbol{2\left(\sqrt{2}\right)^3 - 4\sqrt{2} + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0}$

b) Résolvons (E) pour $\boldsymbol{\lambda = 0}$.

On a : $\boldsymbol{2z^3 - 4z = 0 \Leftrightarrow 2z(z^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow z = 0}$ ou $\boldsymbol{z = \sqrt{2}}$ ou $\boldsymbol{z = -\sqrt{2}}$.

Donc les solutions de l'équation sont : $\boldsymbol{0;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2}}$.

3) On donne $\boldsymbol{\lambda = 8}$

a)Vérifions que $\boldsymbol{1 + i}$ est solution de (E).

P(1+i)=$\boldsymbol{2(1 + i)^3 - 4(1 + i) + 8 = 4i(1 + i) - 4 - 4i + 8 \Leftrightarrow \mathrm{P}(1 + \mathrm{i}) = 0}$, donc $\boldsymbol{1 + i}$ est solution de (E).

b) Résolution de (E).

- Factorisation : $\boldsymbol{2z^3 - 4z + 8 = (z - 1 - i)\left(2z^2 + 2(1 + i)z - 4(1 - i)\right)}$

- Equation : $\boldsymbol{2z^2 + 2(1 + i)z + 2(1 + i)z - 4(1 - i) = 0 \Leftrightarrow z^2 + (1 + i)z - 2(1 - i) = 0}$

$\boldsymbol{\Delta = 8 - 6\mathrm{i}}$. et $\boldsymbol{\delta = a + ib}$ la racine carrée de $\boldsymbol{\Delta}$

$\boldsymbol{|\Delta| = \sqrt{64 + 36} = 10}$, on a : $\boldsymbol{\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ a^2 + b^2 = 10 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3\ ou\ a = -3 \\ b = 1 ou\ b = -1 \\ ab < 0 \end{cases} \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{\begin{cases} \delta = -3 + i \\ ou \\ \delta = 3 - i \end{cases}}$

Donc $\boldsymbol{z_1 = \frac{-1-i-3+i}{2} = -2}$ et $\boldsymbol{z_2 = \frac{-1-i+3-i}{2} = 1 - i}$

Les solutions de l'équation (E) sont :$\boldsymbol{-2; 1 + i; 1 - i}$

c) Module et argument de chaque solution de (E)

$\boldsymbol{z_0 = -2;\ |z_0| = 2}$ et $\boldsymbol{\arg(z_0) = \pi}$

$z_1 = 1 + i$; $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$

$z_2 = 1 - i$; $|z_2| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = \frac{-\pi}{4}$

Enoncé 3

a) $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes. h est une application de $\mathbb{C}$ $dans$ $\mathbb{C}$ telle que $h(z) = w$. On pose $z = x + iy$ et $w = u + iv$ où u et v sont deux réels exprimés en fonction de x et y.

i) Déterminer w tel que $h(z)$=i$z^2 - \bar{z}$

ii) On donne $u = x + y$ et $v = x - y$. Exprimer $h(z)$ en fonction de z.

b) Soient x, y et z des éléments de $\mathbb{C}$ tels que $|x| = |y| = |z| = 1$; $x + y + z = 1$.
Montrer que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Solution

a) $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes. h est une application de $\mathbb{C}$ $dans$ $\mathbb{C}$ telle que $h(z) = w$. On pose $z = x + iy$ et $w = u + iv$ où u et v sont deux réels exprimés en fonction de x et y.

i) Déterminons w tel que $h(z)$=i$z^2 - \bar{z}$

$w = h(z) = \mathrm{i}z^2 - \bar{z}$

$u + iv = i(x + iy)^2 - (x - iy)$

$= -x - 2xy + i(x^2 - y^2 + y)$

$w \quad = -x - 2xy + i(x^2 - y^2 + y)$

ii) Déterminons $h(z)$

$u = x + y$ et $v = x - y$

$w = h(z) = u + iv = x + y + i(x - y)$

$= x - iy + i(x - iy)$

$= (1 + i)(x - iy)$

D'où $h(z) = (1 + i)\bar{z}$

b) Montrons que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

$$|x| = |y| = |z| \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \theta_1 \in \mathbb{R}, x = Cos\theta_1 + iSin\theta_1 \\ \exists \theta_2 \in \mathbb{R}, y = Cos\theta_2 + iSin\theta_2 \\ \exists \theta_3 \in \mathbb{R}, z = Cos\theta_3 + iSin\theta_3 \end{cases}$$

$$x + y + z = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = (Cos\theta_1 + Cos\theta_2 + Cos\theta_3) + i(Sin\theta_1 + Sin\theta_2 + Sin\theta_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Cos\theta_1 + Cos\theta_2 + Cos\theta_3 = 1 \\ Sin\theta_1 + Sin\theta_2 + Sin\theta_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 1$

Autre méthode :

$|x| = |y| = |z| = 1 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{x}, \bar{y} = \frac{1}{y}$ et $\bar{z} = \frac{1}{z}$

Donc : $x + y + z = 1 \Leftrightarrow \overline{x + y + z} = 1 \Leftrightarrow \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 1$

D'où $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Enoncé 4

Au nombre complexe z de module 1, d'argument $\theta(0 < \theta < 1)$, on associe le nombre complexe z' tel que $z' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$.

1) $\overline{z'}$ désigne le conjugué de z'.

Déterminer $\overline{z'}$ en fonction de z. (on remarquera que $\bar{z} = \frac{1}{z}$).

z' peut-il être un nombre réel non nul ?

2) a) Déterminer en fonction de $\frac{\theta}{2}$ le module et un argument de z'.

b) En déduire la partie réelle × et la partie imaginaire Y de z'.

z' peut-il être un imaginaire pur non nul ?

Solution

$|z| = 1. z = Cos\theta + iSin\theta, o < \theta < \pi, z' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$

1) Déterminons $\overline{z'}$ en fonction de z

$$\overline{z'} = \frac{\bar{z}(\bar{z}+1)}{(\bar{z}-1)^2} = \frac{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}+1\right)}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2} = \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

z' réel $\Leftrightarrow \overline{z'} = z' \Leftrightarrow \frac{z+1}{(z-1)^2} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \; et \; z + 1 = z(z+1) \\ z = -1 \end{cases}$

Or $z = [1; \theta]$, avec $0 < \theta < \pi \Leftrightarrow z \neq -1$

Donc z' ne peut pas être un réel non nul.

2) a) Modules et arguments des nombres complexes donnés .

- $z + 1 = Cos\theta + 1 + iSin\theta = 2Cos^2\frac{\theta}{2} + 2iSin\frac{\theta}{2}Cos\frac{\theta}{2}$

$$= 2Cos\frac{\theta}{2}\left(Cos\frac{\theta}{2} + iSin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$2\left(Cos\frac{\theta}{2} + iSin\frac{\theta}{2}\right)Cos\frac{\theta}{2}$$

Donc : $|\mathbf{z}+\mathbf{1}| = \boldsymbol{Cos}\frac{\theta}{2}$ et arg $(\mathbf{z}+\mathbf{1}) = \frac{\theta}{2}, \boldsymbol{Cos}\frac{\theta}{2} \in \left[\mathbf{0}; \frac{\pi}{2}\right[$

- $\mathbf{z}-\mathbf{1} = \mathbf{Cos\theta} - \mathbf{1} + \mathbf{iSin\theta} = -\mathbf{2Sin}^2\frac{\theta}{2} + \mathbf{2}\boldsymbol{iSin}\frac{\theta}{2}\boldsymbol{Cos}\frac{\theta}{2}$

$$= \mathbf{2}\boldsymbol{Sin}\frac{\theta}{2}\left(-\boldsymbol{Sin}\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{i}\ \boldsymbol{Cos}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \mathbf{2}\boldsymbol{Sin}\frac{\theta}{2}\left(\boldsymbol{cos}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{iSin}\ \left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Donc : $|\mathbf{z}-\mathbf{1}| = \mathbf{2}\boldsymbol{Sin}\frac{\theta}{2}$ et arg $(\mathbf{z}-\mathbf{1}) = \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}$

- $(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})^2 = \mathbf{4Sin}^2\frac{\theta}{2}(\boldsymbol{Cos}\theta+\pi) + \boldsymbol{isin}(\theta+\pi)$

Donc : $\left|\boldsymbol{z}-\mathbf{1}^2\right| = \mathbf{4Sin}^2\frac{\theta}{2}$ et arg$[(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})^2] = \theta+\pi$.

b) Module et argument de $\boldsymbol{z}'$

on a : $|\mathbf{z}| = \mathbf{1}$ et $\mathbf{arg}(\boldsymbol{z}) = \theta, |\mathbf{z}+\mathbf{1}| = \mathbf{2}\boldsymbol{Cos}\frac{\theta}{2}$ et arg$|\mathbf{z}+\mathbf{1}| = \frac{\theta}{2}$;

Donc: $|\boldsymbol{z}(\mathbf{z}+\mathbf{1})| = \boldsymbol{Cos}\frac{\theta}{2}$ et agr$|\boldsymbol{z}(\mathbf{z}+\mathbf{1})| = \theta + \frac{\theta}{2} = \frac{3\theta}{2}$

Donc : $\left|\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}\right| = \frac{Cos\frac{\theta}{2}}{2Sin^2\frac{\theta}{2}}$ et arg$\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}\right] = \frac{3\theta}{2} - (\theta+\pi) = \frac{\theta}{2} - \pi$.

On en déduit que $|\mathbf{z}'| = \frac{Cos\frac{\theta}{2}}{2Sin^2\frac{\theta}{2}}$ et arg(z')$= \frac{\theta}{2} - \pi$.

c) Déduisons-en la partie nulle x et la partie imaginaire Y de z'

$$\mathbf{z}' = \mathbf{X} + \mathbf{iY} = \frac{Cos\frac{\theta}{2}}{2Sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\boldsymbol{Cos}\left(\frac{\theta}{2}-\pi\right) + \boldsymbol{iSin}\left(\frac{\theta}{2}-\pi\right)\right)$$

$= -\frac{Cos^2\frac{\theta}{2}}{2Sin^2\frac{\theta}{2}} - \boldsymbol{i}\frac{Cos\frac{\theta}{2}}{2Sin\frac{\theta}{2}}$ d'où : $\mathbf{X} = -\frac{Cos^2\frac{\theta}{2}}{2Sin^2\frac{\theta}{2}}$ et Y$=-\frac{Cos\frac{\theta}{2}}{2Sin\frac{\theta}{2}}$

$\mathbf{z}'$ imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow \begin{cases} -\boldsymbol{Cos}\frac{\theta}{2} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{Cos}\frac{\theta}{2} \neq \mathbf{0} \end{cases}$ impossible

Donc : $\mathbf{z}'$ ne peut pas être imaginaire pur non nul.

Enoncé 5

1. a) $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}; \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{z}^2 - \mathbf{2}^{\alpha+1}\ (\boldsymbol{Cos\alpha})\boldsymbol{z} + \mathbf{2}^{2\alpha} = \mathbf{0}$

Donner chacune des solutions sous forme trigonométrique.

b) le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(\boldsymbol{o}; \widehat{\boldsymbol{u}}; \widehat{\boldsymbol{v}};)$. A et B les points images des solutions de E.

Déterminer $\boldsymbol{\alpha}$ pour que le triangle OAB soit équilatéral.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $\mathbf{1+2i}$, $\mathbf{2+i}$ et $\mathbf{2+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}$.

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B et déterminer une mesure de chacun des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.

Solution

1. a) $\alpha \in [0; 2\pi[$.

$(E): z^2 - 2^{\alpha+1}\,(Cos\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$

On a : $\Delta' = (2^{\alpha}Cos\alpha)^2 - 2^{2\alpha} = 2^{2\alpha}(Cos^2\alpha - 1)$

$$\Delta' = -(1 - Cos^2\alpha)2^{2\alpha}$$

$$\Delta' = -(Sin^2\alpha)2^{2\alpha} = (i2^{\alpha}Sin\alpha)^2$$

Donc :

$z =: 2^{\alpha}Cos\alpha + i2^{2\alpha}Sin\alpha = 2^{\alpha}(Cos\alpha + iSin\alpha)$

$z' =: 2^{\alpha}Cos\alpha - i2^{\alpha}Sin\alpha = 2^{\alpha}\big(Cos(-\alpha) + iSin(-\alpha)\big)$

S=$\{2^{\alpha}(Cos\alpha + iSin\alpha);\ 2^{\alpha}\big(Cos(-\alpha) + iSin(-\alpha)\big)\}$

b) Valeur de α pour que OAB soit équilatéral

OAB est équilatéral$\Leftrightarrow \frac{z_O - z_B}{z_O - z_A} = e^{i\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)}$

On a : $\frac{2^{\alpha}e^{i\alpha}}{2^{\alpha}e^{-i\alpha}} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow e^{i2\alpha} = e^{i\pm\frac{\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$\alpha \in [0; 2\pi[$, les valeurs correspondantes sont : $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

2) $A(1+2i)$, $B(2+i)$, $C\left(2+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})\right)$.

On a : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -i\sqrt{3}$

Alors : $mes(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = arg\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-\pi}{2} + k2\pi$, donc ABC est un triangle rectangle en B.

$mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = arg(1 + i\sqrt{3})$

$$= \frac{\pi}{3} + k\ 2\pi$$

$mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et $mes\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$

On en déduit que $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}\left(\text{car } mes\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}\right)$.

Enoncé 6

1) Déterminer les éléments caractéristiques de la transformation T du plan d'écriture complexe donné :

a) $z' = iz + 1$

b) $z' = (1 - i)z + 1$

c) $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z + 2i$

d) $z' = -z + 2i$

2) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω et d'angle α.

a) $\Omega(1 + i), k = 2$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

b) $\Omega(1 - i), k = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$

3) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S définie par $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$ avec $A(3 + i); A'^{(3)}; B(1)$ et $B'(i)$

Solution

1) Eléments caractéristiques des transformations

a) $z' = iz + 1 = e^{i\frac{\pi}{2}}z + 1$donc S est une rotation de centre Ω tel que $z_\Omega = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$,

donc on écrit T=R$\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$ avec $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) $z' = (1 - i)z + 1$. S est la similitude directe de centre Ω tel que $z_\Omega = \frac{1}{1-1+i} = -i$,

de rapport k $= \sqrt{2}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$.

c) $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z + 2i$. S est la similitude directe de centre Ω tel que $z_\Omega = \frac{2i}{1-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2i$, de rapport k $=\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$ et d'angle $\theta = arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$

d) $z' = -z + 2i = e^{i\pi}z + 2i$, S est donc la similitude de centre Ω tel que $z_\Omega = \frac{2i}{1+i}$, de rapport k =1 et d'angle π.

Enoncé 7

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z $= x + iy$ associe le point M' d'affixe z' tel que : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$.

1) Déterminer l'expression complexe de f et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de M.

2) Déterminer l'image par f:

a) de la droite (D) d'équation $y = -x\sqrt{3}$

b) du cercle de centre O et de rayon 2

Solution

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1. Expression complexe de f

Notons $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$

$z' = x' + iy' = x - y - \sqrt{3} + i(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}) = x - y - \sqrt{3} + ix\sqrt{3} + iy - i\sqrt{3}$

Or $z = x + iy \Longrightarrow x = z - iy$, alors $z' = z - iy - y\sqrt{3} + i\sqrt{3}(z - iy) + iy - i\sqrt{3}$

$z' = z - y\sqrt{3} + ix\sqrt{3} - i\sqrt{3} = (1 + i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$

Nature et éléments caractéristiques

$|1 + i\sqrt{3}| = 2$ er $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

f est donc une similitude directe de centre de centre Ω tel que $z_\Omega = \frac{-i\sqrt{3}}{1-1-i\sqrt{3}} = 1$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2. Image par f

a) De la droite (D) : $y = -\sqrt{3}x$

$\begin{cases} x' = x - \sqrt{3} \\ y' = \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} \end{cases}$, on en déduit en résolvant le système d'inconnues x et y

que $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + y'\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

En remplaçant x et y par leurs valeurs dans l'égalité $y = -\sqrt{3}x$,

on obtient $-\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x' + y'^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{2}\right)$, donc $y' = -\sqrt{3}$

L'image de la droite (D) est la droite (D') d'équation $y' = -\sqrt{3}$.

- Cette méthode permet de déterminer l'image par f d'une courbe quelconque connaissant son équation cartésienne,
- On peut également déterminer les images par f de deux points quelconques distincts A et B de (D). Ainsi, l'image de (D) par f est la droite (A'B') avec $f(A) = A'$et $f(B) = B'$.

b) f étant une similitude de rapport2, l'image par f du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2 est le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre O' $= f(O)$ et de rayon $2 \times 2 = 4$, où O' $(-i\sqrt{3})$.

Enoncé 8

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé. On considère l'application $\boldsymbol{f}$ de P dans B qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' :

$\boldsymbol{z' = (-3+4i)\bar{z} + 12 + 6i}$.

Déterminer la nature de $\boldsymbol{f}$ et trouver ses éléments caractéristiques.

Solution

L'expression complexe de f est de la forme $\boldsymbol{z' = a\bar{z} + b}$; donc $\boldsymbol{f}$ est similitude indirecte avec

$\boldsymbol{a = -3+4i}$. Son rapport est $\boldsymbol{|a| = 5}$

Définissons $\boldsymbol{f}$ analytiquement. Posons $\boldsymbol{z = x + iy}$ et $\boldsymbol{z' = x' + iy'}$.

On a : $\boldsymbol{x' + iy' = (-3+4i)(x - iy) + 12 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -3x + 4y + 12 \\ y' = 4x + 3y + 6 \end{cases}}$ $\boldsymbol{(1)}$.

$\boldsymbol{|a| \neq 1}$ donc $\boldsymbol{f}$ admet un point invariant $\boldsymbol{I(x_0, y_0)}$.

Ainsi $\boldsymbol{\begin{cases} x_0 = -3x_0 + 4y_0 + 12 \\ y_0 = 4x_0 + 3y_0 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow I(0,-3)}$.

Cherchons l'axe de la similitude.

La matrice de l'endomorphisme $\boldsymbol{\varphi}$ associé à $\boldsymbol{f}$ est d'après la relation (1),

$\boldsymbol{\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$. La matrice $\boldsymbol{\begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$ est celle d'une isométrie vectorielle négative $\boldsymbol{\psi}$, c'est-à-dire une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite $\boldsymbol{(\Delta)}$.

Cette droite $\boldsymbol{(\Delta)}$ est l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$ invariants par $\boldsymbol{\psi}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\psi(\vec{u}) = \vec{u}}$.

$$\boldsymbol{\psi(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x - y = 0}$$

L'axe (D) de la similitude $\boldsymbol{f}$ est donc la droite passant par $\boldsymbol{I}$ et de direction $\boldsymbol{(\Delta)}$.

Alors une équation de (D) est de la forme $\boldsymbol{2x - y + c = 0}$.

Or $\boldsymbol{I \in (D) \Leftrightarrow 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3}$.

$\boldsymbol{f}$ est donc une similitude indirecte de centre I$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, de rapport 5 et d'axe (D)

d'équation $\boldsymbol{2x - y - 3 = 0}$.

- Une autre méthode pour déterminer l'axe (D) de $\boldsymbol{f}$ est de chercher l'ensemble des points M du plan tels que $\boldsymbol{\overrightarrow{IM'} = 5\overrightarrow{IM}}$.

Enoncé 9

Mêmes questions qu'à l'exercice 3 avec $\boldsymbol{z' = i\bar{z} + 1}$

Solution

$\boldsymbol{f}$ est une similitude indirecte de rapport $|\boldsymbol{i}| = \mathbf{1}$; donc une isométrie affine négative, c'est-à-dire un antidéplacement, composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite (D) et une translation de vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}$ (non nul ou nul).

Expression analytique de $\boldsymbol{f}$

Posons $\boldsymbol{z = x + iy}$ et $\boldsymbol{z' = x' + iy'}$.

$\boldsymbol{z' = i\bar{z} + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = y + 1} \\ \boldsymbol{y' = x} \end{cases}$ (1)

Le système $\begin{cases} \boldsymbol{x_0 = y_0 + 1} \\ \boldsymbol{y_0 = x_0} \end{cases}$ n'a pas de solution. Donc $\boldsymbol{f}$ n'admet pas de point invariant.

Cherchons l'axe (D) de $\boldsymbol{f}$.

La matrice de l'endomorphisme $\boldsymbol{\varphi}$ associé à $\boldsymbol{f}$ est d'après la relation (1), $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

C'est la matrice d'une symétrie vectorielle négative par rapport à une droite $(\boldsymbol{\Delta})$, ensemble des vecteurs $\vec{\boldsymbol{v}}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ invariants par $\boldsymbol{\varphi}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{v}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{y_1 = x_1}$.

La droite (D) cherchée est l'ensemble des points M$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ tels que $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} \in (\boldsymbol{D})$.

D'après la relation (1), $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}}$ a pour coordonnées $\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = x' - x = y + 1 - x} \\ \boldsymbol{y_1 = y' - y = x - y} \end{cases}$

L'équation cartésienne de (D) est donc : $\boldsymbol{x - y = y + 1 - x \Leftrightarrow 2x - 2y - 1 = 0}$

(D) : $\boldsymbol{2x - 2y - 1 = 0}$.(2)

Le vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}$ de la translation est le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}}$, M étant un point de (D).

Les coordonnées du vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}$ sont, compte tenu de la relation (2) : $\boldsymbol{x_1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}}$ et $\boldsymbol{y_1 = \frac{1}{2}}$.

On en déduit que $\boldsymbol{f}$ est la composée d'une symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation $\boldsymbol{2x - 2y - 1 = 0}$ et de la translation de vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, vecteur directeur de (D).

Ces deux applications sont permutables.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 3 PREMIER TRIMESTRE

CALCULS BARYCENTRIQUES

Exercice 1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

a) Le barycentre de n points du plan existe toujours et est unique.

b) Le barycentre de n points pondérés distincts A et B appartient à la droite (AB).

Exercice 2

Soient A, B, C et D, quatre points du plan, distincts deux à deux.

Monter que ABCD est un parallélogramme si et seulement si A est le barycentre des points pondérés (B,1) , (C,1) et (D, 1).

Exercice 3

Soient ABCD, un quadrilatère du plan. Notona I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. Fixons un réel $\boldsymbol{t} > -\mathbf{1}$ et soeint les points K et L vérifiant les relations $\overrightarrow{\boldsymbol{KA}} = -\boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{KB}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{LC}} = -\boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{LD}}$.

Notons également M le milieu de [LK].

a) Justifier existence du barycentre G des points (A,1), (B,1), (C,1) et (D, $\boldsymbol{t}$).
b) En regroupant les points de différentes façons, montrer que le point G appartient aux droites (IJ) et (KL).
c) Montrer que G coïncide avec M.
d) Le plan est reporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}$). Exprimer les coordonnées de M en fonction de $\boldsymbol{t}$ et en considérant les points A(0,0), B(2,−1), C(3,3) et D(1,2). Faire une figure représentant les points A, B, C, D, I, J, K et M.

Exercice 4

Soient A et B deux points distincts, I le milieu de [AB].

Soit (d), la médiatrice de [AB]. Soit ($\boldsymbol{\mathcal{C}}$) le cercle de centre A et de rayon AI et ($\boldsymbol{\mathcal{C}}'$)le cercle de diamètre [AB]. A tout point M, on associe le point M', barycentre de (A,$-\mathbf{1}$) et (M, 2).Démontrer le lieu géométrique de M' lorsque M décrit :

a) la droite (AB)
b) la droite (d)
le cercle ($\boldsymbol{\mathcal{C}}$)
c) le cercle ($\boldsymbol{\mathcal{C}}'$).

Exercice 5

Soit, dans l'espace E, quatre points A, B, C et D distincts deux à deux.

a) Montrer que ABCD est un parallélogramme si et seulement si, D est le brycentre du système $\{(\boldsymbol{A},\mathbf{1}),(\boldsymbol{B},-\mathbf{1}),(\boldsymbol{C},\mathbf{1})\}$.
b) On suppose que ABCD est parallélogramme. Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que :
$\|\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}-\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}+\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}\|=\boldsymbol{BD}$.
c) On suppose maintenant que ABCD est un rectangle. Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tells que:
$\boldsymbol{MA}^2-\boldsymbol{BM}^2+\boldsymbol{MC}^2=\boldsymbol{BD}$.

Exercice 6

On considère le triangle ABC du plan.

1) Déterminer et construire le point G, barycentre de $\{(\boldsymbol{A},\mathbf{1}),(\boldsymbol{B},-\mathbf{1}),(\boldsymbol{C},\mathbf{1})\}$

2) Déterminer et construire le point G', barycentre de $\{(\boldsymbol{A},\mathbf{1}),(\boldsymbol{B},\mathbf{5}),(\boldsymbol{C},-\mathbf{2})\}$

3) Soit J, le milieu de [AB].

Exprimer $\overrightarrow{\boldsymbol{GG'}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{JG'}}$ en fonction de $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ puis en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).

4) Montrer que le barycentre $\{(\boldsymbol{B},\mathbf{2}),(\boldsymbol{C},-\mathbf{1})\}$ appartient à (GG').

5) Soit D un point quelconque du plan.

Soit O le milieu de [CD] et K le milieu de [OA].

a) Déterminer 3 réels a, b et c tells que K soit le barycentre du système $\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{D},\boldsymbol{d}),(\boldsymbol{C},\boldsymbol{c})\}$.
b) Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
c) Déterminer les reels a' et c' tells que X soit barycentre du sytème $\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{a}'),(\boldsymbol{C},\boldsymbol{c}')\}$.

Exercice 7

Soit ABC un triangle. On définit les points H, K, L et G par:

H est la longueur du système $\{(\boldsymbol{A},\mathbf{3}),(\boldsymbol{B},\mathbf{2}))\}$

K=bar$\{(\boldsymbol{B},\mathbf{2}),(\boldsymbol{C},-\mathbf{1})\}$; $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{Bar}\{(\boldsymbol{A},\mathbf{3}),(\boldsymbol{C},-\mathbf{1})\}$

$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{Bar}\{(\boldsymbol{H},\mathbf{5}),(\boldsymbol{B},\mathbf{5}),(\boldsymbol{C},-\mathbf{1})\}$.

a) Démontrer que : $3\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}+\mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{GB}}-\overrightarrow{\boldsymbol{GC}}=\vec{\mathbf{0}}$
b) En déduire que :

1) G est le milieu du segment [BL]
2) G est le barycentre des points A et K affectés de coefficients que l'on déterminera.

Exercice 8

ABCD est un rectangle tel que AB = 6.

a) Déterminer et construire l'ensemble $\boldsymbol{\Gamma_1}$ des points M du plan tels que $\|\mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\| = \|\mathbf{5}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\|$.

Démontrer que [BC] appartient à $\boldsymbol{\Gamma_1}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $\boldsymbol{\Gamma_2}$ des points M du plan tels que $\|\mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\| = \mathbf{2}\boldsymbol{AB}$.

Démontrer que le point B appartient à $\boldsymbol{\Gamma_2}$.

Exercice 9

Dans un repère orthonormé, on considère les points A$(-\mathbf{1}, \mathbf{2})$, B(3, 1) et C(2,4).

Calculer les coordonnées du barycentre G du système $\{(\boldsymbol{A}, \mathbf{2}), (\boldsymbol{B}, -\mathbf{1}), (\boldsymbol{C}, \mathbf{3})\}$.

Exercice 10

Soit ABCD un parallélogramme et I le milieu de [AB].

Les droites (BD) et (CI) se coupent en un point coté G.

a) Montrer que $\overrightarrow{\boldsymbol{GA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{GB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{GC}} = \vec{\mathbf{0}}$

b-1) Construire le barycentre K du système de points pondérés (A,1), (B,1) et (C,$-\mathbf{1}$).

b-2) Montrer que K est aussi le barycentre du système de points pondérés (G,3) et (C,$-\mathbf{2}$).

c-1) Déduire de la relation (1) que A est le barycentre des points pondérés (D,1), (G,3) et (C,$-\mathbf{2}$).

c-2) Montrer que A est le milieu du segment [DK].

d) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$\|\overrightarrow{\boldsymbol{MD}} + \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{MG}} - \mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}\| = \|\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\|$.

e-1) Pour quelle(s) valeur(s) du réel $\boldsymbol{m}$ le barycentre $\boldsymbol{I_m}$ du système (D, $\boldsymbol{m}$), (G,3) et (C$-\mathbf{2}$) existe-t-il ?

e-2) Lorsque $\boldsymbol{I_m}$ existe, montrer que $\overrightarrow{\boldsymbol{DI_m}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{m}}\overrightarrow{\boldsymbol{DK}}$

e-3) Etudier les variations de la fonction : $\boldsymbol{x} \longmapsto \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{x}}$ et dresser son tableau de variation (on précisera ses limites aux bornes de son domaine de définition sans justification).

e-4) En déduire le lieu géométrique du point $\boldsymbol{I_m}$ lorsque le réel $\boldsymbol{m}$ décrit l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{-\mathbf{1}\}$.

EXERCICES TYPES DE LA COMPETENCE DE BASE 3 DU PREMIER TRIMESTRE ET SOLUTIONS

Enoncé 1

Considérons le système des points pondérés suivant :

$$\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{A}, \mathbf{1}), (\boldsymbol{B}, -\mathbf{3}), (\boldsymbol{C}, \mathbf{4}), (\boldsymbol{D}, \mathbf{1})\}.$$

a) Déterminer le poids total de ce système S.

On a : $\mathbf{1} + (-\mathbf{3}) + \mathbf{4} + \mathbf{1} = \mathbf{3}$

Donc S a pour poids total $+\mathbf{3}$

b) Exprimer la fonction vectorielle de Leibniz associée à S

Solution

Considérons le système des points pondérés suivant :

$$\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{A}, \mathbf{1}), (\boldsymbol{B}, -\mathbf{3}), (\boldsymbol{C}, \mathbf{4}), (\boldsymbol{D}, \mathbf{1})\}.$$

a) Déterminons le poids total de ce système S.

On a : $\mathbf{1} + (-\mathbf{3}) + \mathbf{4} + \mathbf{1} = \mathbf{3}$

Donc S a pour poids total $+\mathbf{3}$

b) Exprimons la fonction vectorielle de Leibniz associée à S

On a : $\vec{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{M}) = \mathbf{1}.\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} - \mathbf{3}.\overrightarrow{\boldsymbol{MB}} + \mathbf{4}.\overrightarrow{\boldsymbol{MC}} + \mathbf{1}.\overrightarrow{\boldsymbol{MD}} = \overrightarrow{\boldsymbol{MA}} - \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}} + \mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{MC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MD}}$

Comme le poids $\boldsymbol{S} \neq \mathbf{0}$ alors $\vec{\boldsymbol{f}}$ est une bijestion.

Fixons le point O du plan (ou de l'espace).

On a alors : $\vec{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{M}) = \overrightarrow{\boldsymbol{MA}} - \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}} + \mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{MC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MD}}$

$= (\overrightarrow{\boldsymbol{MO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA}}) - \mathbf{3}(\overrightarrow{\boldsymbol{MO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}) + \mathbf{4}(\overrightarrow{\boldsymbol{MO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OC}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{MO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OD}})$

$= \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{M0}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} - \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} + \mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OD}}$

Donc $\vec{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{M}) = \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{MO}} + \vec{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{O})$

On a donc $\vec{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{MO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} - \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} + \mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OD}} = \vec{\mathbf{0}}$

D'où $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} - \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} + \mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OD}})$

Le point M du plan (ou de l'espace) tel que $\vec{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathbf{0}}$ est déterminé par l'égalité : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} - \mathbf{3}\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} + \mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OD}})$

Enoncé 2

On considère le système$\{(\boldsymbol{A},-\mathbf{2});(\boldsymbol{B},\mathbf{5}\}$.

Construire le point G, barycentre de $(\boldsymbol{A},-\mathbf{2})\ \boldsymbol{et}(\boldsymbol{B},\mathbf{5})$puis determiner dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{o}\ \vec{\boldsymbol{\imath}}\vec{\boldsymbol{\jmath}})$ le coordonnées du point G sachant que A $\left(\frac{-\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)\boldsymbol{et}\ \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$.

Solution

On considère le système$\{(\boldsymbol{A},-\mathbf{2});(\boldsymbol{B},\mathbf{5}\}$.

Construisons le point G, barycentre de $(\boldsymbol{A},-\mathbf{2})\ \boldsymbol{et}(\boldsymbol{B},\mathbf{5})$ puis determinons dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{o},\ \vec{\boldsymbol{\imath}},\vec{\boldsymbol{\jmath}})$ le coordonnées du point G sachant que A $\left(\frac{-\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)\boldsymbol{et}\ \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$.

On sait que G = bar $\{(\boldsymbol{A},-\mathbf{2}),(\boldsymbol{B},\mathbf{5})\}$ donc -2$\overrightarrow{\boldsymbol{GA}}$+5$\overrightarrow{\boldsymbol{GB}}$=$\vec{\mathbf{0}}$

Par application de la relation de Chasles, en fixant le point A ,on a :$-2\overrightarrow{\boldsymbol{GA}}+5(\overrightarrow{\boldsymbol{GA}}+\overrightarrow{\boldsymbol{AB}})$=$\vec{\mathbf{0}}$ ↔$3\overrightarrow{\boldsymbol{GA}}+5\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ d'où $\overrightarrow{\boldsymbol{AG}}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

On construit donc le point G.

Déterminons les coordonnées du barycentre G des point pondérés $(\boldsymbol{A},-\mathbf{2})\ \boldsymbol{et}\ (\boldsymbol{B},\mathbf{5})$.

On sait que si G est barycentre de $(\boldsymbol{A},-\mathbf{2})\ \boldsymbol{et}(\boldsymbol{B}\ ,\mathbf{5})$ alors

$\boldsymbol{x_c}=\frac{\alpha x_{A+\beta x_B}}{\alpha+\beta}=\frac{-2(-1)+5(2)}{-2+5}=\frac{12}{3}=\mathbf{1}$ et

$\boldsymbol{y_g}=\frac{\alpha y_{A+\beta y_B}}{\alpha+\beta}=\frac{-2(4)+5(3)}{-2+5}=\frac{-8+5}{+3}=\frac{7}{3}$.

Donc G $\left(\mathbf{4};\frac{7}{3}\right)$.

Enoncé 3

Soit $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ deux nombres réels non nuls. On donne dans espace affine euclidien quatre points A, B, C et D deux à deux distincts.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\boldsymbol{\alpha}(\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{MB}})=\ \boldsymbol{\beta}(\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}.\overrightarrow{\boldsymbol{MD}})$.

Solution

Soit I le milieu de $[\boldsymbol{AB}]$ et J, le milieu de $[\boldsymbol{CD}]$. On a :

$\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}=\ \boldsymbol{MI^2}-\boldsymbol{IA^2}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}.\overrightarrow{\boldsymbol{MD}}=\ \boldsymbol{MJ^2}-\boldsymbol{JC^2}$

Ainsi, $\boldsymbol{\alpha}(\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{MB}})=\ \boldsymbol{\beta}(\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}.\overrightarrow{\boldsymbol{MD}})$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha MI^2}-\ \boldsymbol{\beta MJ^2}=\ \boldsymbol{\alpha IA^2}-\ \boldsymbol{\beta JC^2}$.

Deux cas sont à distinguer : $\boldsymbol{\alpha - \beta = 0}$ et $\boldsymbol{\alpha - \beta \neq 0}$

Premier cas : $\boldsymbol{\alpha - \beta = 0}$

$\boldsymbol{MI^2 - MJ^2 = IA^2 - JC^2}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{\boldsymbol{MI}}.\overrightarrow{\boldsymbol{IJ}} - \boldsymbol{IJ^2} = \boldsymbol{IA^2 - JC^2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{MI}}.\overrightarrow{\boldsymbol{IJ}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{JC^2 - IA^2 - IJ^2})$

Donc :

- Si I $\neq \boldsymbol{J}$, (E) est le plan orthogonal à (IJ) et passant par le point H de (IJ) tel que :

$\overrightarrow{\boldsymbol{HI}}.\overrightarrow{\boldsymbol{IJ}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{JC^2 - IA^2 - IJ^2}$.

- Si I = J, on a: IA = JC. Si cette condition est réalisée, (E) est l'espace tout entier ou l'ensemble vide.

Deuxième cas : $\boldsymbol{\alpha - \beta \neq 0}$

Soit G, le barycentre des points I et J affectés des coefficients respectifs $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{-\beta}$. La formule de Leibniz donne : $(\boldsymbol{\alpha - \beta})\boldsymbol{MG^2} + \boldsymbol{\alpha GI^2} - \boldsymbol{\beta GJ^2} = 0$

$(\boldsymbol{\alpha - \beta})\boldsymbol{MG^2} + \boldsymbol{\alpha IA^2} - \boldsymbol{\beta JC^2} = 0$

$\boldsymbol{MG^2} = \frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{\alpha - \beta})}[\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{IA^2 - IG^2}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{JG^2 - JC^2})\ ]$

Posons $\boldsymbol{k} = = \frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{\alpha - \beta})}[\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{IA^2 - IG^2}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{JG^2 - JC^2})\ ]$.

Alors, (E) est la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\boldsymbol{k}}$ si $\boldsymbol{k > 0}$ et (E) est l'ensemble vide si $\boldsymbol{k < 0}$.

Enoncé 4

Dans le plan, on considère un carré ABCD tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$.

Soit O le centre du carré ; I et J les respectifs de $[\boldsymbol{AB}]$ et $[\boldsymbol{CD}]$.

1) On considère $\boldsymbol{G_1}$ le barycenter du système $\{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{1});\ (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{-3});\ (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{1});\ (\boldsymbol{D}, \boldsymbol{-3})\}$. Déterminer $\boldsymbol{G_1}$.
2) a) On considère $\boldsymbol{G_2}$, le barycentre du système $\{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{1});\ (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{1});\ (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{-3});\ (\boldsymbol{D}, \boldsymbol{-3})\}$. Déterminer $\boldsymbol{G_2}$ et le placer.

b)Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}^2 + \overrightarrow{\boldsymbol{MA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{MB}} - \boldsymbol{3}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{MC}} - \boldsymbol{3}\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}.\overrightarrow{\boldsymbol{MD}} = \boldsymbol{0}$$

Construire cet ensemble.

c) Soit f, l'application du plan sur lui-même qui, à tout point M fait correspondre le point M' défini par : $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{MA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{MB}} - \boldsymbol{3}\overrightarrow{\boldsymbol{MC}} - \boldsymbol{3}\overrightarrow{\boldsymbol{MD}}$. Reconnaitre et en donner ses éléments caractéristiques.

EVALUATION

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + y + z = -2 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $\boldsymbol{F}$ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $\boldsymbol{M}$ d'affixe $\boldsymbol{z}$, associe le point $\boldsymbol{M}'$ d'affixe $\boldsymbol{z}'$ définie par :

$$z' = 2z + 3 - 4i$$

1) A est le point d'affixe $-2 + i$
   a) Déterminer l'affixe du point $A' = F(A)$
   b) Placer les points A et A' dans le plan muni du repère $(O;\ \overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$
2) Montrer que :
   a) L'application $\boldsymbol{F}$ admet un unique point invariant $\boldsymbol{\Omega}$ dont on déterminera l'affixe $\boldsymbol{\omega}$.
   b) Démontrer que pour tout point $M(z)$ dont l'image par F est $M'(z')$, on a : $z' - \omega = 2(z - \omega)\ (1)$
   c) Traduire vectoriellement la relation (1)
   d) Reconnaitre l'application $\boldsymbol{f}$
3) Soit $\boldsymbol{z}$ un nombre complexe tel que : $|z + 2 - i| = 1$.
   a) Déterminer l'ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$ des points M d'affixe $\boldsymbol{z}$ vérifiant $|z + 2 - i| = 1$.
   b) Quelle est l'image $\boldsymbol{\Gamma}'$ de $\boldsymbol{\Gamma}$ par $\boldsymbol{F}$?
   c) Tracer sur la figure précédente les ensembles $\boldsymbol{\Gamma}$ et $\boldsymbol{\Gamma}'$.

Exercice 3

Dans le plan (P), construire un triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH], telle que AH = BC= 4cm.

a) Construire, en justifiant, le point G, barycentre du systèle de points pondérés $\{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$.

b) M est un point quelconque de (P). Montrer que le vecteur $\vec{V} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur de norme 8.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tells que $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\vec{V}\|$.

d) On considère le système de points pondérés $\{(A, 2), (B, n), (C, n)\}$ où n est un entire naturel fixé.

1) Montrer que le barycentre $\boldsymbol{G_n}$ de ce système existe quelque soit la valeur de $\boldsymbol{n}$.

2) Montrer que, pour tout entire naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{G_n}$ appartient à [AH].

3) Soit $\boldsymbol{\Gamma_n}$ l'ensemble des points M du plan tells que $\|\boldsymbol{2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}}\| = \boldsymbol{n}\|\vec{\boldsymbol{V}}\|$. Montrer que $\boldsymbol{\Gamma_n}$ est un cercle contenant le point A, don't on précisera le centre et le rayon.

4) Déterminer la distance de A$\boldsymbol{G_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

e) Quel est le comportement de $\boldsymbol{G_n}$?

Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice

- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

Conseils et orientation de l'enseignant

- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

Evaluation de la compétence

Deuxième trimestre

Programmation horaire du 2e trimestre

2e Trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée du chapitre	Nombres d'heures du trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
Du 02 Janvier au 31 Mars 13 semaines	CB1	3	**Fonction logarithme**	10H	4H	2H ou 4H 2H ou 4H	14H	65H en TD 104H en TC
		4	**Fonction exponentielle népérienne et fonction puissance**	10H	4H		14H	
		5	**Suites numériques**	10H	4H		14H	
	CB2	4	**Structure algébrique**	10H	4H		14H	
		5	**Dénombrement et Probabilités**	10H	4H		14H	
	CB3	2	**Transformations du plan et applications affines**	10H	4H		14H	
		3	**Coniques**	12H	4H		16H	

FICHE DE PROGRESSION

Trimestre	Période	Contenus		
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité	CB3 : Géométrie
2	2 Janvier au 10 Février	- Fonction logarithme népérien - Fonction exponentielle népérienne	- Structure algébrique	- Transformations du plan et applications affines
	11Février au 31Mars	- Suites numériques	- Dénombrement et Probabilités	- Coniques

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Terminale S Deuxième trimestre

Compétence de Base 1

Terminale S–CB1 : **L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les fonctions logarithme, les fonctions exponentielles les suites numériques.**		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
– **Fonction logarithme**	– **Définir la fonction logarithme.** – **Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme.** – **Résoudre des équations et des inéquations avec ln.** – **Utiliser les limites de référence.** – **Construire le tableau de variation de la fonction logarithme.** – **Représenter graphiquement la fonction logarithme avec les tangentes aux points d'abscisses 1 et e.** – **Calculer la dérivée des fonctions du type ln0u.** – **Utiliser les fonctions logarithmes de base $a, a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.** – **Etudier, sur des exemples, les fonctions faisant intervenir la fonction logarithme et les représenter graphiquement.** – **Définir une fonction exponentielle.** – **Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.** – **Résoudre des équations et des inéquations avec exponentielle.**	– **Définition de la fonction logarithme.** – **Utilisation des propriétés algébriques de la fonction logarithme.** – **Résolution des équations et des inéquations avec ln.** – **Utilisation des limites de référence.** – **Construction du tableau de variation de la fonction logarithme.** – **Représentation graphique de la fonction logarithme avec les tangentes aux points d'abscisses 1 et e.** – **Calcul de la dérivée des fonctions du type lnou.** – **Utilisation des fonctions logarithmes de base $a, a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.** – **Etude, sur des exemples, des fonctions faisant intervenir la fonction logarithme et construction de leurs courbes représentatives.** – **Définition d'une fonction exponentielle.** – **Utilisation des propriétés algébriques de la fonction exponentielle.** – **Résolution des équations et des inéquations avec**

	– Fonction exponentielle népérienne et fonction puissance – Suites numériques	– Utiliser les limites de référence. – Construire le tableau de variation de la fonction exponentielle. – Représenter graphiquement la fonction exponentielle avec les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. – Calculer la dérivée des fonctions du type expou. – Etudier, sur des exemples, les fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle et les représenter graphiquement. – Etudier les fonctions puissances $x \mapsto a^x (a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$, $x \mapsto x^\alpha$ et les représenter graphiquement – Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer. – Etudier les variations d'une suite numérique (suites récurrentes et suites définies de façon explicite). – Etudier les suites arithmétiques et géométriques. – Calculer la somme de n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique. – Etudier la convergence des suites numériques. – Représenter graphiquement les termes d'une suite numérique et conjecturer son sens de variations et sa convergence.	exponentielle. – Utilisation des limites de référence. – Construction du tableau de variation de la fonction exponentielle. – Représentation graphique de la fonction exponentielle en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. – Calcul de la dérivée des fonctions du type expou. – Etude, sur des exemples, des fonctions faisant intervenir la fonction exponentielle et construction de leurs courbes représentatives. – Etude des fonctions puissances $x \mapsto a^x (a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$, $x \mapsto x^\alpha$ et leur représentation graphique – Utilisation du raisonnement par récurrence pour démontrer. – Etude des variations d'une suite numérique (suites récurrentes et suites définies de façon explicite). – Etude des suites arithmétiques et géométriques. – Calcul de la somme de n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique. – Etude de la convergence des suites numériques. – Représentation graphique des termes d'une suite numérique et conjecture de son sens de variations et de sa convergence.

Compétence de Base 2

Terminale S –CB2 : **L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les structures algébriques et les probabilités.**		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
- Structures algébriques ➢ **Groupes** ➢ **Anneaux** ➢ **corps**	- **Montrer qu'une partie d'un ensemble est stable par une loi de composition interne.** - **Définir un sous-groupe et démontrer qu'une partie non vide d'un ensemble est un sous-groupe.** - **Définir un anneau.** - **Démontrer qu'un ensemble muni de deux lois est un anneau.** - **Effectuer des calculs dans un anneau.** - **Définir un corps.** - **Démontrer qu'un ensemble muni de deux lois est un corps.**	- **Preuve de la stabilité d'une partie d'un ensemble par une loi de composition interne.** - **Définition d'un sous-groupe.** - **Démonstration de la structure de sous-groupe d'une partie non vide d'un ensemble.** - **Définition d'un anneau.** - **Démonstration de la structure d'anneau d'un ensemble muni de deux lois.** - **Calculs dans un anneau.** - **Définition d'un corps.** - **Démonstration de la structure de corps d'un ensemble muni de deux lois.**

	- Probabilités ➢ Dénombrement (rappel) ➢ Calcul de probabilité	- Dénombrer un ensemble fini. - Utiliser la formule du binôme de Newton. - Définir une probabilité. - Calculer la probabilité d'un évènement. - Calculer les probabilités conditionnelles et définir les évènements indépendants. - Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire. - Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire. - Calculer la probabilité d'un évènement en utilisant la loi binomiale.	- Dénombrement d'un ensemble fini. - Utilisation de la formule du binôme de Newton. - Définition d'une probabilité. - Calcul de la probabilité d'un évènement. - Calcul des probabilités conditionnelles et définition des évènements indépendants. - Définition de la loi de probabilité d'une variable aléatoire. - Calcul de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart type d'une variable aléatoire. - Calcul de la probabilité d'un évènement en utilisant la loi binomiale.

Compétence de Base 3

Terminale S –CB3 : **L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les transformations du plan, les applications affines et les coniques.**		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
- Transformations du plan et applications affines	- **Décomposer des isométries.** - **Décomposer une isométrie en un produit de deux transformations.** - **Définir une symétrie glissée.** - **Caractériser géométriquement une symétrie glissée.** - **Déterminer géométriquement la nature et les éléments caractéristiques d'une isométrie connaissant ses points invariants.** - **Classifier les isométries.** - **Déterminer l'expression analytique d'une transformation.** - **Définir une application affine.** - **Utiliser les théorèmes de la composée des applications affines.** - **Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une application affine définie par son expression analytique.** - **Déterminer les images d'une droite, d'un cercle, … à l'aide de l'expression analytique d'une application**	- **Décomposition des isométries.** - **Décomposition d'une isométrie en un produit de deux transformations.** - **Définition d'une symétrie glissée.** - **Caractérisation géométrique d'une symétrie glissée.** - **Détermination géométrique de la nature et des éléments caractéristiques d'une isométrie connaissant ses points invariants.** - **Classification des isométries.** - **Détermination de l'expression analytique d'une transformation.** - **Définition d'une application affine :** **.à l'aide de trois points et leurs images ;** **.à l'aide d'une application linéaire associée, d'un point et de son image.** - **Utilisation des théorèmes de la composée des applications affines.** - **Détermination de la nature et des éléments caractéristiques d'une application affine définie par son expression analytique.**

		affine. - Déterminer géométriquement une application affine et construire l'image d'une figure simple par cette application. - Utiliser les propriétés de conservation des applications affines pour démontrer un alignement de points, un parallélisme, ...dans la résolution de problèmes de construction et de lieux géométriques des applications $f: E \to \mathbb{R}$ $M \to f(M) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i MA_i^2\right)$; $f(M) = \frac{MA}{MB}$; $f(M) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)$.	- Détermination des images d'une droite, d'un cercle, ... à l'aide de l'expression analytique d'une application affine. - Détermination géométrique d'une application affine et construction de l'image d'une figure simple par cette application. - Utilisation des propriétés de conservation des applications affines pour démontrer un alignement de points, un parallélisme, ...dans la résolution de problèmes de construction et de lieux géométriques des applications $f: E \to \mathbb{R}$ $M \to f(M) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i MA_i^2\right)$; $f(M) = \frac{MA}{MB}$; $f(M) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)$.
		- Définir une conique. - Reconnaitre une conique à partir de son équation. - Construire une conique à partir de sa définition. - Déterminer les équations paramétriques d'une conique. - Déterminer les équations de tangentes. - Déterminer les éléments caractéristiques d'une conique connaissant son équation. - Déterminer l'image d'une ellipse par une affinité.	- Définition d'une conique. - Reconnaissance d'une conique à partir de l'une de ses équations. - Construction d'une conique à partir de sa définition. - Détermination des équations paramétriques d'une conique. - Détermination des équations de tangentes. - Détermination des éléments caractéristiques d'une conique connaissant son équation.

	Coniques	- Régionner un plan à partir d'une conique. - Donner une définition bifocale d'une conique à centre. - Déterminer l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes	- Détermination de l'image d'une ellipse par une affinité. - Régionnement d'un plan à partir d'une conique. - Définition bifocale d'une conique à centre. - Détermination de l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES DESTINEES A L'ELEVE

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçon : Fonction logarithme

SEQUENCE 1

Définition et propriété

Objectifs

- Définir la fonction logarithme népérien ;

-Enoncer les propriétés caractéristiques

Définition et propriété

Définition

On appelle fonction logarithme népérien, la primitive de la fonction $(\frac{1}{x})$*, définie continue et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*, et qui s'annule pour* $\boldsymbol{x = 1}$.

On la note $\boldsymbol{log x}$ $(\boldsymbol{ou\ ln x})$.

Donc $(\boldsymbol{ln x})' = \frac{1}{x}$ *sur* $]\mathbf{0}; +\infty[$.

Propriétés de la fonction $\mathbf{ln}$.

Propriétés caractéristiques

- L'ensemble de définition de la fonction $\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$ est : $\boldsymbol{D_{ln}} =]\mathbf{0};\ +\infty[$.
- $\boldsymbol{ln 1 = 0}; \mathbf{ln}'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x}$
- Soit $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

– $\mathbf{ln}[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})]$ est définie $\Leftrightarrow \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$;

– $\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})|$ est définie $\Leftrightarrow \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$.

Exemples

1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{ln}(-\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5})$.

$\boldsymbol{f}$ est définie $\Leftrightarrow -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5} > \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{5} > \mathbf{2}\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < \frac{5}{2}, \boldsymbol{x} \in]-\infty; \frac{5}{2}[$

$\boldsymbol{D_f} =]-\infty; \frac{5}{2}[$.

2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{ln}\,|-\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}|$

$\boldsymbol{f}$ est définie $\Leftrightarrow -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{2}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \neq \frac{5}{2}$

$\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{5}{2}\}$, soit $\boldsymbol{D_f} =]-\infty; \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$

De même, si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \mathbf{2} - \mathbf{ln}(\frac{x-1}{x})$, $\boldsymbol{f}$ est définie $\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > \mathbf{0}$ **et** $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Déterminons l'ensemble de définition de $\boldsymbol{f}$ dans un tableau de signes de $\frac{x-1}{x}$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$		$-$		$+$

$\boldsymbol{f}$ *est définie* $\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0$ *et* $x \neq 0$, *donc.* $D_f =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

SEQUENCE 2

Propriétés algébriques de ln

Objectif

Enoncer les propriétés algébriques de la fonction $\boldsymbol{ln}$

Propriétés algébriques

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$ *et* n *un entier naturel.*

- $\ln(a \times b) = lna + lnb$.

  Exemple : $\ln(6) = \ln(2 \times 3) = ln2 + ln3$.

- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$ car $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna + ln\frac{1}{b} = lna + ln1 - lnb = lna - lnb$,

  Donc, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$.

  En particulier,

  $ln\frac{1}{a} = ln1 - lna = 0 - lna$, donc $ln\frac{1}{a} = -lna$.

- $lna^n = nlna$ $(n \in \mathbb{N})$.

  Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $lna^n = nlna$.

– La proposition est vraie pour $n = 0$. En effet, on a :

  $lna^0 = ln1 = 0$ ou encore $lna^0 = 0lna = 0$, $a > 0$. Vraie.

– Supposons que la proposition est vraie pour un entier naturel k arbitraire, on a :

  $lna^k = klna$ Vraie.

– Démontrons que la proposition est aussi vraie pour $k + 1$.

On a : $\boldsymbol{lna^{k+1} = \ln(a^k \times a) = \ln a^k + lna = klna + lna = (k+1)lna}$.

$\boldsymbol{lna^{k+1} = \ln(a^k \times a)}$

La proposition est vraie pour $\boldsymbol{k+1}$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{lna^n = nlna}$.

Exemples

$\boldsymbol{1)\ ln\sqrt{a} = lna^{\frac{1}{2}}}$.

$\boldsymbol{2)\ ln\sqrt[3]{5} = ln5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}ln5}$.

Remarque :

1) La fonction logarithme népérien est un isomorphisme du groupe multiplicatif des réels positifs $(\mathbb{R}_+^*,\times)$sur le groupe additif des réels $(\mathbb{R},+)$.
2) Le calcul des images de certains nombres réels par le logarithme népérien donne par exemple des valeurs approchées :
$\boldsymbol{ln2 \approx 0,693}$; $\boldsymbol{ln3 \approx 1,098}$; $\boldsymbol{ln5 \approx 1,609}$; $\boldsymbol{ln7 =\approx 1,946}$; $\boldsymbol{ln11 \approx 2,398}$; $\boldsymbol{ln13 \approx 2,565}$. ;
3) Il existe un nombre réel $\boldsymbol{x}$ compris entre 2 et 3 tel que $\boldsymbol{lnx = 1}$. Ce nombre est noté e et appelé base du logarithme népérien : $\boldsymbol{lne = 1}$ et e$\approx \boldsymbol{2,718281828}$.
4) $\boldsymbol{lne^x = xlne = x}$, car $\boldsymbol{lne = 1}$.

$\boldsymbol{e^{lnx} = x}$ donc $\boldsymbol{lne^x = e^{lnx} = x}$.

SEQUENCE 3

Equations et inéquations faisant intervenir $\boldsymbol{ln}$

Objectif

Résoudre les équations comportant $\boldsymbol{ln}$

Propriétés

Soient a et b deux réels strictement positifs

$\boldsymbol{lna = lnb \Leftrightarrow a = b}$;

Exemples

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :

$(\boldsymbol{E_1})$: $\boldsymbol{ln(-2x+3) = ln(x+4)}$

$(\boldsymbol{E_2})$: $\boldsymbol{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1}$

$(\boldsymbol{E_3})$: $\boldsymbol{(lnx)^2 - 6(lnx) + 5 = 0}$

Solution

$(\boldsymbol{E_1})$: $\boldsymbol{ln(-2x+3) = ln(x+4)}$

Posons les contraintes sur l'inconnue $\boldsymbol{x}$:

$(\boldsymbol{E_1})$ ne peut être résolue que si $\boldsymbol{-2x+3>0}$ $\boldsymbol{et\, x+4>0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}\, et -4<x}$.

$\boldsymbol{x \in]-\infty; \frac{3}{2}[\ et\, x \in]-4; +\infty[}$

Ainsi, le domaine de validité de $(\boldsymbol{E_1})$ est : $\boldsymbol{D_v =]-4; \frac{3}{2}[}$.

Résolution de $(\boldsymbol{E_1})$.

$(\boldsymbol{E_1})$: $\boldsymbol{ln(-2x+3) = l\,n(x+4) \Leftrightarrow -2x+3 = x+4 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}}$

, soit S=$\{-\frac{1}{3}\}$

$(\boldsymbol{E_2})$: $\boldsymbol{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1}$

Contraintes sur x.

$\boldsymbol{\frac{x+1}{x-1} > 0}$et $\boldsymbol{x \neq 1}$

Dans le tableau de signes, on a **:**

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$\boldsymbol{-1}$		$\boldsymbol{1}$	$+\infty$
$\boldsymbol{x+1}$	$-$	0	$+$		$+$
$\boldsymbol{x-1}$	$-$		$-$	0	$+$
$\boldsymbol{\frac{x+1}{x-1}}$	$+$	|	$-$	||	$+$

Donc, $\boldsymbol{D_v =]-\infty; -1[\cup]1;\ +\infty[}$.

Résolution de $(\boldsymbol{E_2})$:

On sait que lne=1, donc $\boldsymbol{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = ln\mathrm{e} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = \mathrm{e}}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow x+1 = \mathrm{e}(x-1) \Leftrightarrow x = \frac{-\mathrm{e}-1}{1-\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}}$.

Pour $\mathbf{e} \approx \mathbf{2,718}$, on a : $\boldsymbol{x} = \frac{2,718+1}{2,718-1} = \mathbf{2,164}\ et\ \mathbf{2,164} \in \boldsymbol{D_v}$, alors $\boldsymbol{S} = \{\frac{e+1}{e-1}\}$

$(\boldsymbol{E_3})$: $(\boldsymbol{lnx})^2 - \mathbf{6}(\boldsymbol{lnx}) + \mathbf{5} = \mathbf{0}$

Posons les contraintes sur l'inconnue x :

$(\boldsymbol{E_3})$ ne peut être résolue que si $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, donc $\boldsymbol{D_v} =]\mathbf{0}; +\infty[$.

Résolution :

Posons $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{lnx}$; l'équation devient
$\boldsymbol{X^2} - \mathbf{6}\boldsymbol{X} + \mathbf{5} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\boldsymbol{X} - \mathbf{1})(\boldsymbol{X} - \mathbf{5}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\boldsymbol{lnx} - \mathbf{1})(\boldsymbol{lnx} - \mathbf{5}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{lnx} - \mathbf{1} = \mathbf{0}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{lnx} - \mathbf{5} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{lnx} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{lnx} = \mathbf{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{e^{lnx}} = \boldsymbol{e^1}$ ou $\boldsymbol{e^{lnx}} = \boldsymbol{e^5}$.
Comme $\boldsymbol{e^{lnx}} = \boldsymbol{x}$, alors $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$ ou $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e^5}$, soit S={ $\boldsymbol{e}$; $\boldsymbol{e^5}$}

SEQUENCE 4

Inéquations faisant intervenir $\boldsymbol{ln}$.

Objectif

Résoudre les inéquations comportant ln

Propriété

$\boldsymbol{lna} \leq \boldsymbol{lnb} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$;
Exemple
Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations :
$(\boldsymbol{I_1})$: $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) > \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x} + \mathbf{4})$
$(\boldsymbol{I_2})$: $\mathbf{ln}(\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) < \mathbf{ln}(\mathbf{3} - \boldsymbol{x})$
$(\boldsymbol{I_3})$: $\mathbf{ln}(\mathbf{5}\boldsymbol{x^2} + \mathbf{9}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) \geq \mathbf{0}$
Solution
$(\boldsymbol{I_1})$: $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) > \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x} + \mathbf{4})$

Posons les contraintes sur l'inconnue x :

$(\boldsymbol{I_1})$ ne peut être résolue que si $-\boldsymbol{x} + \mathbf{3} > \mathbf{0}\ et\ \boldsymbol{x} + \mathbf{4} > \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < \mathbf{3}\ et - \mathbf{4} < \boldsymbol{x}$.

$\boldsymbol{x} \in]-\infty;\ \mathbf{3}[\ et\ \boldsymbol{x} \in]-\mathbf{4}; +\infty[$.

Ainsi, le domaine de validité de $(\boldsymbol{I_1})$ est : $\boldsymbol{D_v} =]-\mathbf{4}; \mathbf{3}[$.

Résolution de $(\boldsymbol{I_1})$.

$(\boldsymbol{I_1})$: $\boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) > \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x} + \mathbf{4}) \Leftrightarrow -\boldsymbol{x} + \mathbf{3} > \boldsymbol{x} + \mathbf{4} \Leftrightarrow \mathbf{2}\boldsymbol{x} < -\mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < -\frac{1}{2}$,

$soit\ \boldsymbol{x} \in]-\infty;\ -\frac{1}{2}[$

$\boldsymbol{D_v} =]-\mathbf{4}; \mathbf{3}[\ et\ \boldsymbol{x} \in]-\infty;\ -\frac{1}{2}[\ alors\ \boldsymbol{S} =]-\mathbf{4}; -\frac{1}{2}[$.

$(\boldsymbol{I_2})$: $\mathbf{ln}(\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) < \mathbf{ln}(\mathbf{3} - \boldsymbol{x})$

Posons les contraintes sur l'inconnue x :

(I_2) ne peut être résolue que si $x-1>0$ *et* $3-x>0 \Leftrightarrow x>1$ *et* $x<3$.

$x \in]1;+\infty[$ *et* $x \in]-\infty;3[$.

Ainsi, le domaine de validité de (I_2) est : $D_v =]1;3[$.

Résolution de (I_2).

(I_2): $\ln(x-1) < \ln(3-x) \Leftrightarrow x-1<3-x \Leftrightarrow 2x<4 \Leftrightarrow x<2$, soit $x \in]-\infty;2[$.

$D_v =]1;3[$ *et* $x \in]-\infty;2[$, alors $S =]1;2[$.

(I_3): $\ln(x^2+9x-1) \geq 0$

Posons les contraintes sur l'inconnue x :

(I_3) ne peut être résolue que si $5x^2+9x-1>0$.

$$5x^2+9x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-9-\sqrt{101}}{10} \\ x_1 = \dfrac{-9+\sqrt{101}}{10} \end{cases}$$

$x \in]-\infty; \frac{-9-\sqrt{101}}{10}[\cup]\frac{-9+\sqrt{101}}{10};+\infty[$.

Ainsi, le domaine de validité de (I_3) est : $D_v =]-\infty; \frac{-9-\sqrt{101}}{10}[\cup]\frac{-9+\sqrt{101}}{10};+\infty[$.

Résolution de (I_3).

(I_3): $\ln(x^2+9x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x^2+9x-1) \geq ln1 \Leftrightarrow x^2+9x-1 \geq 1$

$\Leftrightarrow x^2+9x-2 \geq 0$

$$x^2+9x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-9-\sqrt{121}}{10} = \dfrac{-20}{10} = -2 \\ x_1 = \dfrac{-9+\sqrt{121}}{10} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$5x^2+9x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 5(x+2)\left(x-\frac{1}{5}\right) = (x+2)(5x-1) \geq 0$$

Dans le tableau de signes, on a :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$(x+2)(5x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boldsymbol{S'} =]-\infty; -\mathbf{2}[\cup]\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}};\ +\infty[$

Alors $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S'} \cap \boldsymbol{D_v}$

SEQUENCE 5

Etude de la fonction logarithme népérien

Objectif

Etudier les limites de la fonction logarithme népérien

Etude de la fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est définie dans $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{ln}: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{soit\ ln}:]\mathbf{0};\ +\infty[\longrightarrow]-\infty;\ +\infty[$.

Limites aux bornes 0 et $+\infty$

Soit $\boldsymbol{f(x)} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^>} f(x) = \lim\limits_{x\to0^>} \ln x = -\infty$

Démonstration

Posons : $X = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{X}$

Si $x \to 0^>, X \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^>} \ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(\frac{1}{X}) = \lim\limits_{X\to+\infty} (\ln 1 - \ln X) = \lim\limits_{X\to+\infty} (-\ln X) = -\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to0^>} \ln(x) = -\infty$

La droite d'équation $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ est asymptote verticale à la courbe de $\boldsymbol{f}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors la courbe de $\boldsymbol{f}$ admet une branche infinie en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ (Forme indéterminée).

$D_{\ln x} =]0;+\infty[\Rightarrow 0 \prec \ln x \prec x$

$\Leftrightarrow 0 \prec \ln\sqrt{x} \prec \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \prec \ln x^{\frac{1}{2}} \prec \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 0 \prec \frac{1}{2}\ln x \prec \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \prec \ln x \prec 2\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 0 \prec \frac{\ln x}{x} \prec \frac{2\sqrt{x}}{x} \Leftrightarrow 0 \prec \frac{\ln x}{x} \prec \frac{2}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ **, soit** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

La courbe de $\boldsymbol{f}$ admet une branche parabolique de direction celle de (OI).

Limite en 0

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0\times(-\infty)$ (Forme indéterminée)

Levons l'indétermination.

Posons : $X = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{X}$

Si $x \to 0^>, X \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^>} x\ln x = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\frac{1}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}(\ln 1 - \ln X) = \lim\limits_{X\to+\infty}(-\frac{\ln X}{X}) = 0$ car $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0^>} x\ln x = 0$

En 1 :

$\lim\limits_{x\to 0} \ln\frac{(1+x)}{x} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée)

Posons $\boldsymbol{f(x) = \ln(1+x)}$, $\boldsymbol{x_0 = 0}$.

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{1+x}}$

En utilisant la formule de la dérivation, on a :

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

$\boldsymbol{f(x_0) = 0}$ et $\boldsymbol{f'(x_0) = 1}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-0}{x-0}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln\frac{(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

Démonstration

Posons $f(x)=\ln x$, $x_0=1$.

$f(x_0)=f(1)=0$

$f'(x)=\frac{1}{x}$; $f'^{(x_0)}=\frac{1}{x_0}=\frac{1}{1}=1$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-0}{x-1}=f'(1)=1$ **donc**, $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

SEQUENCE 6

Etude la fonction logarithme népérien

Objectif :

Etudier et représenter la fonction logarithme népérien

Etude de la dérivabilité

$f(x)=lnx$. **f est définie, continue et dérivable sur $]0;\ +\infty[$ de fonction dérivée**

$f'(x)=\frac{1}{x}$.

$\forall x\in\ ]0;\ +\infty[,\ [f'(x)>0$, **$f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.**

$\lim_{x\to 0^>}\ln(x)=-\infty$ **et** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

La courbe de f coupe l'axe (OI) au point A. Cherchons les coordonnées de A en résolvant l'équation

$f(x)=0$.

$f(x)=0\Leftrightarrow lnx=0\Leftrightarrow lnx=ln1\Rightarrow x=1$, A(1; 0).

Tangentes particulières

- Tangente au point B(e ; 1).

$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(e)=\frac{1}{e}$; $f(e)=lne=1$

Equations de la tangente en $\boldsymbol{e}$.

$$(\boldsymbol{T}): \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{e})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}) + \mathbf{1} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}}$$

Alors $(\boldsymbol{T_1}): \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}}$

– Tangente au point A(1 ; 0).

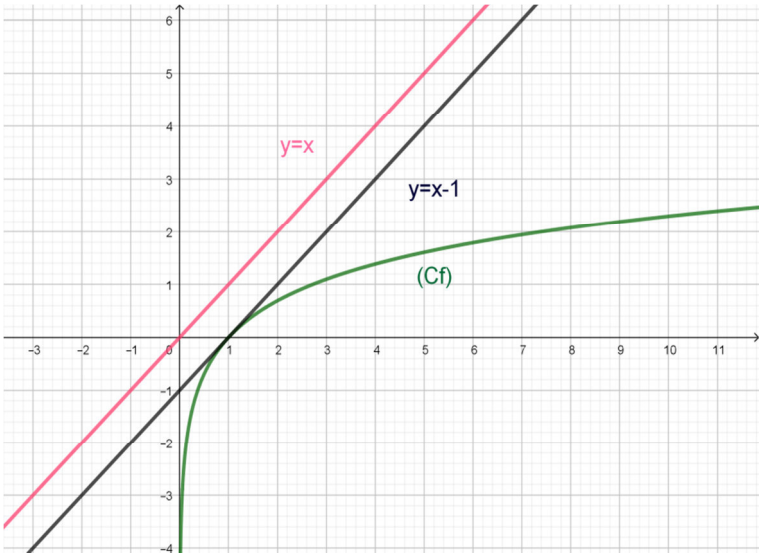
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}'(\mathbf{1})(\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) + \boldsymbol{f}(\mathbf{1}); \boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}'(\mathbf{1})(\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) + \boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}(\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) + \mathbf{0} = \boldsymbol{x} - \mathbf{1}$$

Alors $(\boldsymbol{T_2}) : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbf{1}$

Tableau de variation

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0}$		$\mathbf{1}$		$\boldsymbol{e}$		$+\infty$
$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$	‖	$+$	$\mathbf{1}$	$+$	$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}$	$+$	
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	‖ $-\infty$	↗	$\mathbf{0}$	↗	$\mathbf{1}$	↗	$+\infty$



SEQUENCE 7

Dérivée et primitives de $\boldsymbol{ln}$

Objectifs

- Calculer la dérivée de $\boldsymbol{ln}$

- Calculer les primitives de $\boldsymbol{ln}$

Dérivée de la fonction ln|U(x)|

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et ne s'annulant pas sur I.

La fonction $f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln|U(x)| \end{array}$ **est dérivable sur I et pour tout x de I,** $\boldsymbol{f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}}$

Remarque :

- $\forall \boldsymbol{x \in I, U(x) > 0 et\ donc}: \boldsymbol{|U(x)| = U(x); ln' U(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}}$.
- $\forall \boldsymbol{x \in I, U(x) < 0 et\ donc}: \boldsymbol{|U(x)| = -U(x); ln' U(x) = -U'(x) \times \frac{1}{-U(x)} = \frac{U'(x)}{U(x)}}$.

En particulier :

Soit U et V deux fonctions dérivables sur un intervalle I et ne s'annulant en aucun point de I.

La dérivée de $\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln|U(x) \times V(x)| \end{array}$ est $\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)} + \frac{V'(x)}{V(x)}. \end{array}$

Propriété

Si U est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I,

alors $\boldsymbol{(ln° |U(x)|)' = \frac{U'(x)}{U(x)}}$

U étant une fonction numérique, $\boldsymbol{ln° |U(x)| = \frac{1}{2} \ln[U(x)]^2}$

Exemples

1) $\boldsymbol{f(x) = ln|5x - 1| = \frac{1}{2} \ln(5x - 1)^2}$

$\boldsymbol{U(x) = (5x - 1)^2 \Longrightarrow U'(x) = 2(5)(5x - 1)}$

$$\boldsymbol{f'^{(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 5(5x - 1)}{(5x - 1)^2} = \frac{5}{5x - 1}}$$

2) $\boldsymbol{g(x) = ln|5x^2 - 3x - 2| = \frac{1}{2} \ln(5x^2 - 3x - 2)^2}$

$\boldsymbol{U(x) = (5x^2 - 3x - 2)^2 \Longrightarrow U'(x) = 2(10x - 3)(5x^2 - 3x - 2)}$

$$\boldsymbol{g'^{(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{2(10x - 3)(5x^2 - 3x - 2)}{(5x^2 - 3x - 2)^2} = \frac{10x - 3}{5x^2 - 3x - 2}}$$

Les primitives de $\frac{U'(x)}{U(x)}$

U étant une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur l'intervalle I.

Une primitive sur I de U est la fonction : $\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})|$+C (C$\in \boldsymbol{R}$).

Donc $\boldsymbol{U} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{U'(x)}}{\boldsymbol{U(x)}} \overset{\boldsymbol{Primitive}}{\longrightarrow} \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})|$.

- $(\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})|)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{ln}|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})| = \mathbf{ln}[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})]\ \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$.
- $(\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})|)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{ln}|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})| = \mathbf{ln}[-\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})]\ \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$.

Exemples

1) Déterminons une primitive sur]-1 ; 1[de la fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2-\mathbf{1}}$

$\boldsymbol{f}$est une fonction ratonnelle ; elle est continue sur $\boldsymbol{D_f}$.

$\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} - \{-\mathbf{1}; \mathbf{1}\}$ admet des primitives en particulier sur]-1 ; 1[.

Posons $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1} \Longrightarrow \boldsymbol{U'}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{U'}(\boldsymbol{x})$

En établissant le tableau de signe de $\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}$, on a :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$-\mathbf{1}$		$\mathbf{1}$		$+\infty$
$\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Sur]-1 ; 1[, $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{une\ primitive\ de}\ \frac{\boldsymbol{U'(x)}}{\boldsymbol{U(x)}}$ sur]-1 ; 1[

est : $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}[-\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})]$+ C (C$\in \boldsymbol{R}$) $\Longrightarrow\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}[-(\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1})]$+ C

$\Longrightarrow\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}(\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^2)$+ C (C$\in \boldsymbol{R}$).

2) Trouvons une primitive de la fonction $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}^2-\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}}{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}} \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}}{(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})}$$

$\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{est\ définie}\ \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in]-\infty; \mathbf{1}[\cup]\mathbf{2};\ +\infty[$

Tableau de signe

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Posons $U(x) = x^2 - 3x + 2$

$\forall x \in]-\infty; 1[\cup]2;\ +\infty[, U(x) > 0$ et $F(x) = ln(x^2 - 3x + 2) + C$ (C$\in R$).

$\forall x \in]1; 2[, U(x) < 0$ et $F(x) = ln(-x^2 + 3x - 2) + C$ (C$\in R$).

SEQUENCE 8

Le logarithme de base **a** ($a \in \mathbb{R}_+^*/a \neq 1$).

Objectif

Définir et étudier la fonction logarithme de base a

Le logarithme de base a

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1 ($a \in \mathbb{R}_+^*/a \neq 1$).

La fonction logarithme de base a, notée $log_a^x = \frac{1}{lna} lnx$

Ainsi, $a^x = m \Leftrightarrow lna^x = lnm \Leftrightarrow xlna = lnm$

$\Rightarrow x = \frac{lnm}{lna} = \frac{1}{lna} \times lnm = log_a^m$

Donc log_a^x est la fonction logarithme de base 10 (logarithme décimal).

$$log_e^x = \frac{lnx}{lne} = \frac{1}{lne} \times lnx \Rightarrow log_e^x = lnx$$

log_e^x est le logarithme népérien.

Propriétés caractéristiques

$log^1 = 0$ et $log^{10} = \frac{1}{ln10} \times ln10 \Rightarrow \frac{1}{lne} \times lnx \Rightarrow log^{10} = 1$

Les propriétés caractéristiques et algébriques appliquées au logarithme népérien sont également valable pour le fonction logarithme de base *a*.

Exemple d'étude de la fonction logarithme décimal

Soit la fonction : $f(x) = log_{10}^x = \frac{1}{ln10} lnx$.

f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \frac{ln'x}{ln10} = \frac{1}{ln10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{xln10}$.

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^*$, $\boldsymbol{f'(x) > 0}$. la fonction $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Calcul des limites en 0 et en $+\infty$.**

$$\lim_{x \to 0^>} f(x) = \lim_{x \to 0^>} \left(\frac{1}{\ln 10} \times \ln x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^>} f(x) = -\infty$$

La droite *x=0* est l'asymptote à *(C_f)*

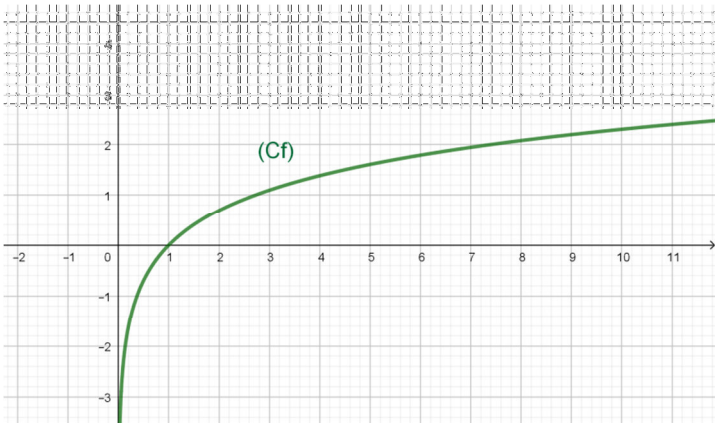
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln 10} \times \ln x\right) = \frac{+\infty}{\ln 10} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \textbf{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln 10} \times \frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Donc la courbe (C_f) de f admet une branche parabolique de direction (OI). Puisque $\boldsymbol{log^1 = 0}$ et $\boldsymbol{log^{10} = 1}$, on en déduit le tableau de variation suivant

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0}$		$\mathbf{1}$		$\mathbf{10}$		$+\infty$
$\boldsymbol{log'x}$	‖	$-$		$+$		$+$	
$\boldsymbol{log_{10}^x}$	‖ $-\infty$	↗	$\mathbf{0}$	↗	$\mathbf{1}$	↗	$+\infty$



SEQUENCE 9

Leçon : Fonction exponentielle népérienne

Définition et propriétés

Objectif

Définir la fonction exponentielle népérienne

Définition

Il existe une unique fonction **f** dérivable sur $\mathbb{R}$ telle $\mathbf{f'} = \mathbf{f}$ et $\mathbf{f(0)} = \mathbf{1}$.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle notée **exp**.

Elle est la réciproque de la fonction logarithme népérien.
Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*_+$.
La fonction exponentielle est donc une bijection $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*_+$.
Propriété
Propriétés caractéristiques

- $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $exp\, \boldsymbol{x} > \mathbf{0} \implies \boldsymbol{e^x} > \mathbf{0}$;
- $\boldsymbol{e^0} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{e^1} = \boldsymbol{e}$;
- $\boldsymbol{lne^x} = \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{ln}\mathrm{e} \implies \boldsymbol{lne^x} = \boldsymbol{x} \implies \boldsymbol{e^{lne^x}} = \boldsymbol{x}$;
- $exp(1) = \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{et}\ e \approx 2{,}71828$;

$$exp\,(\sqrt{\mathbf{3}}\,) = \boldsymbol{e^{\sqrt{3}}} \approx 5{,}62325$$

- $\forall(\boldsymbol{a}, \mathrm{b}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ \boldsymbol{on\ a}$: $\boldsymbol{e^{a+b}} = \boldsymbol{e^a} \times \boldsymbol{e^b}$

Démonstration

$\boldsymbol{e^{a+b}} = \boldsymbol{e^a} \times \boldsymbol{e^b} \Leftrightarrow \boldsymbol{ln}\left(\boldsymbol{e^{a+b}}\right) = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{e^a} \times \boldsymbol{e^b}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\ \boldsymbol{ln}\mathrm{e} = \boldsymbol{lne^a} + \boldsymbol{lne^b}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathrm{a}\ \boldsymbol{ln}\mathrm{e} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{ln}\mathrm{e}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

a. Propriété algébrique
$\forall(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall\, \mathbf{r} \in \mathbb{Q}$, **on a:**

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$;
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$;
- $\forall$ x$\in \mathbb{R}, e^x > 0$;
- $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$;
- $(e^a)^r = e^{r.a}$.

SEQUENCE 10

Equations comportant la fonction exponentielle

Objectif

Résoudre les équations comportant la fonction exponentielle

Exemples de résolution des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes:

1. $3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} = 0$;
2. $e^{x-1} = 2$;
3. $e^{\cos x} = \sqrt{e}$;
4. $2e^{2(x+1)} - 7e^{x+1} + 3 = 0$

Solution

1. $3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} = 0 <=> 3(e^x)^2 + 5e^x - 2 = 0$

Posons X=e^x, l'équation devient $3X^2 + 5X - 2 = 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$;$X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$ => $X_1 = -2$; $X_2 = \frac{1}{3}$ <=> $\begin{cases} e^x = -2 \\ e^x = \frac{1}{3} \end{cases}$

$e^x = -2$ Solution impossible ; $e^x = \frac{1}{3}$ <=> $ln e^x = ln\frac{1}{3}$ <=> x=- $ln3$

$S = \{-ln3\}$

2. $e^{x-1} = 2 <=> ln\, e^{x-1} = ln2 <=> x - 1 = ln2 <=> x = 1 + ln2$

$S = \{1 + \ln 2\}$

3. $e^{\cos x} = \sqrt{e} <=> ln e^{\cos x} = ln\sqrt{e} <=> cosx = \ln e^{\frac{1}{2}} <=> cosx = 1/2 <=> cosx = cos\frac{\pi}{3}$

$<=> x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou x= $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (k$\in Z$)

$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z\right\}$

4. $2e^{2(x+1)} - 7e^{x+1} + 3 = 0$

On pose Y=$\boldsymbol{e^{x+1}}$, l'équation devient

$2Y^2 -7Y+3=0$; $\Delta=(-7)^2 -4\times \mathbf{2} \times \mathbf{3}=49-24=25=5^2$ $\Delta=25=5^2$

Y1 $=\frac{7-5}{4}$ et Y2$=\frac{7+5}{4}$; Y1 $=\frac{1}{2}$ et Y2$=\mathbf{3}$ or on a : Y=$\boldsymbol{e^{x+1}}$

$$=> \begin{cases} e^{x+1} = Y1 \\ e^{x+1} = Y2 \end{cases} <=> \begin{cases} e^{x+1} = \frac{1}{2} \\ e^{x+1} = 3 \end{cases} <=> \begin{cases} \ln e^{x+1} = ln\frac{1}{2} \\ lne^{x+1} = ln3 \end{cases} <=> \begin{cases} x1 + 1 = ln\frac{1}{2} \\ x2 + 1 = ln3 \end{cases} <=>$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 - ln2 \\ x_2 = -1 + ln3 \end{cases}$$

$$S = \{-1 - ln2 ; -1 + ln3\}$$

SEQUENCE 11

Inéquations comportant la fonction exponentielle

Objectif

Résoudre les inéquations comportant la fonction exponentielle

Exemples de résolution des inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ **les inéquations suivantes**:

1. $e^{x-1} > 4$;
2. $2e^{2x}+5e^{x} -3\leq 0$
3. $\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3} > 0$

Solution

1. $e^{x-1} > 4 \Leftrightarrow x -1> \ln 4 \Leftrightarrow x - 1 > 2ln2 \Leftrightarrow x > 1 + 2ln2$

   S=$]1 + 2ln2; +\infty[$
2. $2e^{2x}+5e^{x} -3\leq 0$

   On pose X = e^x, $X> 0$; $2X^2 +5X-3\leq 0$; $\Delta=49$

   $X_1 = -3$ et $X_1 = \frac{1}{2}$, $\begin{cases} X1 = -3 \\ X2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x1 = -3 \\ x2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{donc}$ $\begin{cases} e^{x1} \geq -3 \\ e^{x2} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

   $e^{x2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x2 \leq -\ln 2$; S=$]-\infty; -\ln 2]$
3. $\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3} > 0$ $D_i= \mathbb{R}/\{ln3\}$

   $\frac{2e^{x}+1}{e^{x}-3} > 0 \Leftrightarrow e^{x} - 3 > 0$ donc $x > \ln 3$

   S=$]ln3; +\infty]$

SEQUENCE 12

Etude de la fonction exponentielle népérienne

Objectif

Etudier la fonction exponentielle népérienne

Etude des limites sur $\mathbb{R}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) $= \boldsymbol{e^x}$. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Limites aux bornes de D_f :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

La droite d'équation y=0 est l'asymptote horizontale à la courbe de f

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{lne^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{X}{lnX} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{lnX}{X}} = \frac{1}{+\infty} = +\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ)

Etude de la variation de f

- Sens de variation de f

  f(x)= $\boldsymbol{e^x}$ => f '(x)= $\boldsymbol{e^x}$

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{lR}, \boldsymbol{e^x} > \boldsymbol{0}$; $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, f '(x) $> \boldsymbol{0}$

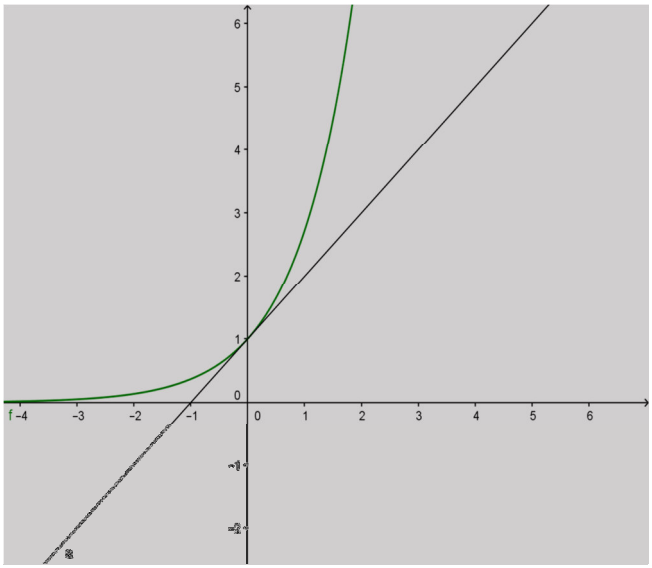
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(C_f) coupe l'axe (OJ) car $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f(0)=1 ; f '(0)=1 ; f(1)

Tableau de variation

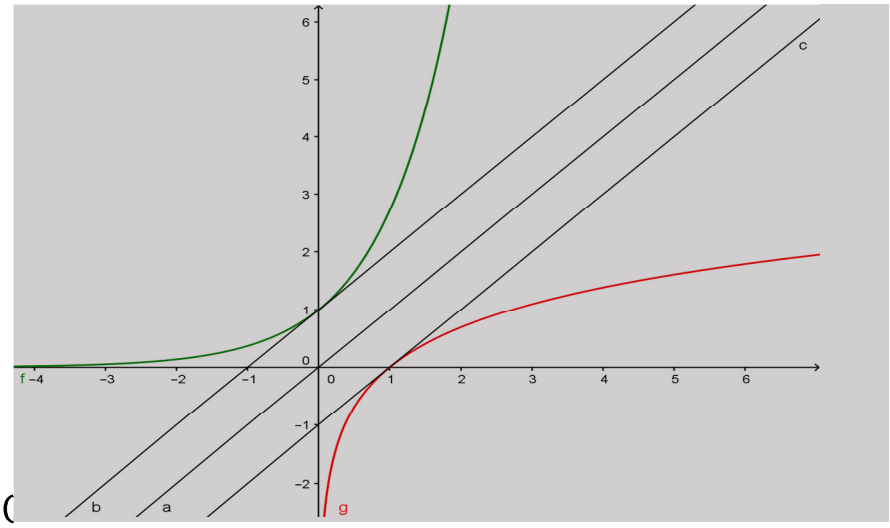
x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
f(x)	+		+		+	
f'(x)	0 ↗	1	↗	e	↗	$+\infty$



N.B : la courbe représentative de la fonction e^x et la courbe représentative de la fonction lnx sont symétriques par rapport à la première bissectrice (***la droite*** (Δ) d'équation y=x)

L'équation de la tangente à la courbe (C'f) est la droite (Δ') $\boldsymbol{d'}$é$\boldsymbol{quation\ \ y = x - 1}$

Une équation de la tangente à(Cf) est la droite d'équation y=x+1.



(

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

Démonstration

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} (e^x\, lne^x) = =0$

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\ \exp'(0)=1$$

SEQUENCE 13

Primitives de la fonction u'(x) $e^{u(x)}$

Objectifs

- Calculer les primitives de la fonction $u'(x)\ e^{u(x)}$
- Définir la fonction exponentielle de base a

Primitives de la fonction $u'(x)\ e^{u(x)}$
U est une fonction dérivable sur I. la fonction
$u'(x)\ e^{u(x)}$ ***admet pour primitive sur I, la fonction*** $e^{u(x)}$ +c (c∈ ℝ)

Exemple

Soit $f(x)\ =\ xe^{-x^2}$. Trouvons F(x)

f est sous la forme f(x)= $u'(x)\ e^{u(x)}$ $avec\ u(x)=-x^2$ => $u'(x)$= -2x

F(x)=$-\frac{1}{2}e^{-x^2}\ +c$

Fonction exponentielle de base a : a^x ($a>0$)
Définition

Soit a un nombre réel strictement positif.

- Pour tout nombre réel x, on a : $a^x=e^{x\ln a}$.
- On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction : $x \longmapsto a^x$

Exemples

1) e^x est la fonction exponentielle de base e
2) 10^x est la fonction exponentielle de base 10 qui est la réciproque de la fonction $\log_{10}$ (logarithme décimal).
3) La fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante.

Propriétés
∀ a ∈lR^*_+ et ∀ x ∈ lR, on a:
$\ln a^x\ =x\ln a$, on en déduit les propriétés suivantes :

∀(a,b) ∈lR^*_+ et ∀x ∈ ℝ,∀y ∈ ℝ ,on a :

$a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$;
$a^{-y}\ =1/a^y$
$a^{x+y}=a^x\,.\,a^y$
$(a.b)^x=a^x\,b^x$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{a^y}$

SEQUENCE 14

Etude de la fonction $f_a : x \longmapsto a^x$

Objectif

Etudier la fonction f_a

Etude de la fonction $f_a : x \longmapsto a^x$

Soit (C_a) la courbe représentative de $f_a(x) = a^x$ / $a > 0$ et $a \neq 1$.

f_a est définie $\forall x \in \mathbb{R}$, donc :

$D_{fa} = \mathbb{R}$.

Etude des variations de f_a

$\forall x \in \mathbb{R}$, **on a** : $f_a(x) = a^x \Rightarrow f_a(x) = e^{x\ln a} \Rightarrow f_a(x) = e^{u(x)}$

f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $fa'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} \Longrightarrow f_a'(x) = \ln a\, e^{x\ln a} = (\ln a.)\, a^x$

$f_a'(x) = (\ln a)\, a^x$

le signe de f_a' dépend de $\ln a$

or $a \neq 1$; il y a donc 2 cas à considérer :

$0 < a < 1$ et $a > 1$

- 1er cas, $0 < a < 1$

On a $\forall x \in lR$, $f_a'(x) < 0$, donc f_a est décroissante sur lR

Limites aux bornes de D_{f_a} :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est l'asymptote horizontale à (C_a) en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = +\infty$

La courbe (C_a) admet une branche infinie en $-\infty$

$f_a(0) = 1$ et $f_a(1) = a$

Recherche de la branche infinie en $-\infty$

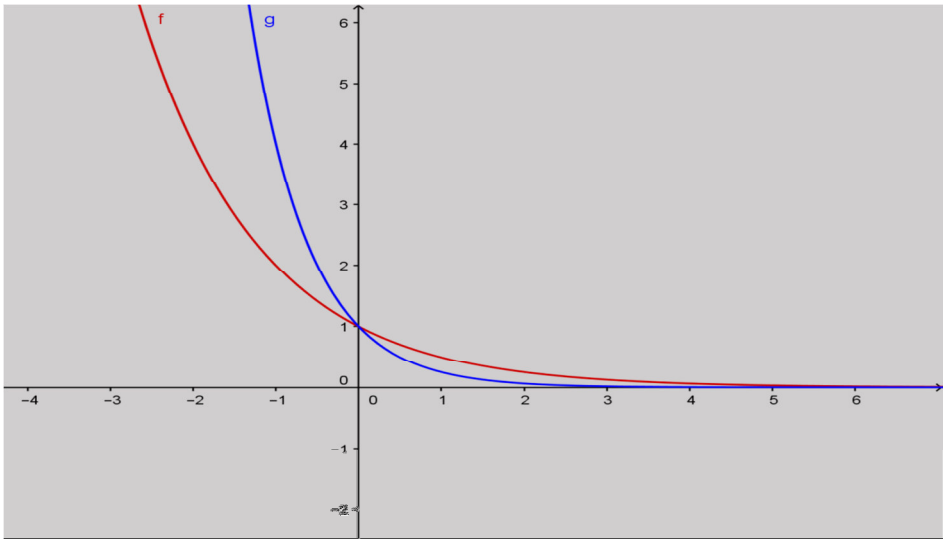
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{fa'(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x\ln a}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln a \frac{e^{x\ln a}}{\ln a x} = \mp\infty$

(C_a) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ)

X	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_a'(x)$	+		+	+

$f_a(x)$	$+\infty$		1		a		0
		↘		→		↘	

$\mathbf{f_{1/2}\,(x)}$ **et** $\mathbf{f_{1/4}\,(x)}$



SEQUENCE 15

Etude de la fonction $\boldsymbol{f_a : x \longmapsto a^x}$ (: $\boldsymbol{a > 1}$)

Objectif

Etudier la fonction $\boldsymbol{f_a}$

2e cas : a> **1**

On a $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f_a}'(x) < \mathbf{0}$, donc f_a est croissante sur $\mathbb{R}$

Limites aux bornes de $\mathbf{D_{fa}}$

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = 0$$

La droite d'équation y = 0 est l'asymptote horizontale à (C_a) en -∞

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = +\infty$$

La courbe (C_a) admet une branche infinie en $-\infty$

$\boldsymbol{f_a}(\mathbf{0})$=1 et $\boldsymbol{f_a}(\mathbf{1})$=a

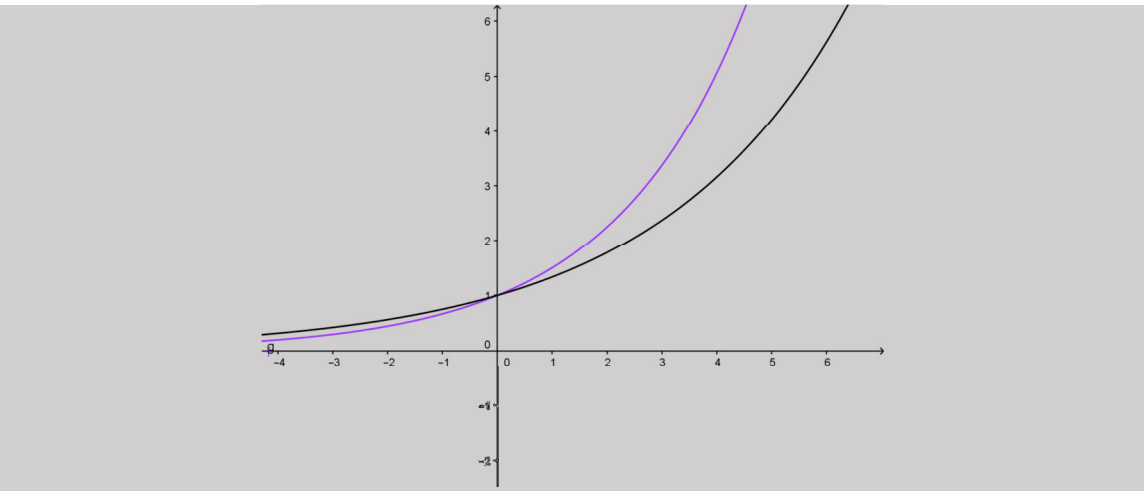
Recherche de la branche infinie en+∞

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_a'(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln a}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln a \frac{e^{x\ln a}}{\ln a x} = +\infty$$

(C_a) admet en -∞ une branche parabolique de direction celle de (OJ)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_a'(x)$	+	+	+	
$f_a(x)$	0 ↗	1 ↗	a ↗	$+\infty$

$$\mathbf{f_{3/2}\,(x)\ \ et\ \ de\ \ f_{4/3}\,(x)}$$



Suivant les deux cas étudiés on a la représentation suivante

$$\mathbf{f_{1/2}\,(x)\ \ et\ \ de\ \ f_2\,(x)}$$

Leçon : Suites numériques

SEQUENCE 16

Définition d'une suite numérique

Objectif

Définir une suite numérique.

Etude globale d'une suite numérique

Définition d'une suite numérique

On appelle suite numérique, toute fonction $\begin{array}{l} \boldsymbol{u}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \boldsymbol{n} \longmapsto \boldsymbol{u}(\boldsymbol{n}) \end{array}$

On la note généralement$(\boldsymbol{u_n})$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{n})$ sera noté $\boldsymbol{u_n}$ et est appelé terme général de la suite $(\boldsymbol{u_n})$.

Lorsque $\boldsymbol{n}$ varie, les nombres réels $\boldsymbol{u_0}$; $\boldsymbol{u_1}$; $\boldsymbol{u_2}$; … ;$\boldsymbol{u_n}$ sont appelés termes de cette suite.

- Une suite peut être définie par une *formule explicite* de type fonctionnel qui permet de calculer les termes de la suite $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$ telle que :
  $\boldsymbol{u}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $\quad \boldsymbol{n} \longrightarrow \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{3n + 2}$

- Une suite peut-être définie par son *premier terme* et une *formule de récurrence* telle que : $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 1} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3} \end{cases}$; $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Cette formule permet de calculer un terme en fonction du précèdent

SEQUENCE 17

Suite minorée, majorée, bornée

Objectif

Définir une suite minorée, suite majorée et suite bornée

Définition

Soit$(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}}$, une suite numérique.

- $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}}$, est dite minorée, s'il existe un nombre réel $\boldsymbol{m}$ tel que : pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boxed{\boldsymbol{m \leq u_n}}$;
- $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}}$, est dite majorée, s'il existe un nombre réel M tel que : pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boxed{\boldsymbol{u_n \leq M}}$;
- $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}}$, est dite bornée, si elle est à la fois minorée et bornée i.e : $\boxed{\boldsymbol{m \leq u_n \leq M}}$.

Les nombres réels $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{M}$ sont respectivement appelés minorant et majorant de$(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}}$.

Théorème

En général, pour démontrer qu'une suite $(\boldsymbol{u_n})$ est bornée, l'un des procédés ci-dessous est utile.

- Encadrer le terme général de la suite $(\boldsymbol{u_n})$ par deux nombres réels.
- Etudier la fonction $\boldsymbol{f}$ lorsque $(\boldsymbol{u_n})$ est du type $\boldsymbol{u_n = f(n)}$.
- Faire un raisonnement par récurrence.

SEQUENCE 18

Limite, convergence et divergence d'une suite numérique

Objectif

Calculer la limite d'une suite et définir une suite convergente ou une suite divergente

Calcul de limites

Propriété

Soit$(\boldsymbol{u_n})$, une suite définie par : $\boldsymbol{u_n = f(n)}$ où $\boldsymbol{f}$est une fonction numérique. Si $\boldsymbol{f}$ a une limite en $+\infty$, alors $(\boldsymbol{u_n})$ a une limite et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. La réciproque est fausse.

Convergence et divergence d'une suite

Une suite $(\boldsymbol{u_n})$ est dite *convergente* lorsqu'elle admet une limite finie $(\boldsymbol{l})$ lorsque $\boldsymbol{n} \to +\infty$.
Une suite $(\boldsymbol{u_n})$ est dite *divergente* lorsqu'elle admet une limite infinie (∞) lorsque $\boldsymbol{n} \to +\infty$.
Convergence d'une Suite arithmétique et géométrique.
Théorème

1) Soit $(\boldsymbol{u_n})_{n,}\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r}$, $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boxed{\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}}$
   - Si $\boldsymbol{r > 0}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (nr) = +\infty$; $(\boldsymbol{u_n})_{n,}$est divergente ;
   - Si $\boldsymbol{r = o}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$ la suite $(\boldsymbol{u_n})$ converge donc vers $\boldsymbol{u_0}$;
   - Si $\boldsymbol{r < 0}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (nr) = -\infty$, $(\boldsymbol{u_n})_{n,}$est divergente ;
2) Soit$(\boldsymbol{u_n})_{n,}\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ et de 1er terme $\boldsymbol{u_0} \neq \boldsymbol{0}$, $\boxed{\boldsymbol{u_n = u_0 q^n}}$
   - Si $|\boldsymbol{q}| > \boldsymbol{1}$, alors la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est divergente.
   - Si $|\boldsymbol{q}| < \boldsymbol{1}$, alors la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est convergente.
   - Si $|\boldsymbol{q}| = \boldsymbol{1}$, alors la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est stationnaire$(\boldsymbol{u_n = u_0})$

Propriétés de comparaison

On considère les suites$(\boldsymbol{u_n})$,$(\boldsymbol{v_n})$ et$(\boldsymbol{w_n})$ et $\boldsymbol{l}$ un nombre réel.

- Si $(\boldsymbol{u_n})$ et $(\boldsymbol{v_n})$ sont convergentes et si à partir d'un certain indice $(\boldsymbol{rang})$, $\boldsymbol{u_n \leq v_n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$;
- Si à partir d'un certain rang, $\boldsymbol{u_n \geq v_n\ et} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- Si à partir d'un certain rang, $\boldsymbol{v_n \leq u_n \leq w_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \boldsymbol{l}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boldsymbol{l}$;
- Si à partir d'un certain rang, $\boldsymbol{u_n \leq v_n\ et} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$;
- Si la suite $(\boldsymbol{v_n})$ est telle qu'à partir d'un certain rang partir, on ait :

$$|\boldsymbol{u_n - l}| < \boldsymbol{v_n\ et} \lim_{n\to+\infty} v_n = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{alors} \lim_{n\to+\infty} u_n = \boldsymbol{l}$$

II.3.3- Convergence d'une suite monotone

- Toute suite croissante et majorée est convergent ;
- Toute suite décroissante et minorée est convergente ;
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$

SEQUENCE 19

Sens de variation d'une suite numérique

Objectif

Etudier le sens de variation d'une suite numérique.

Propriétés

Soit$(\boldsymbol{u_n})$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, une suite numérique. $\boldsymbol{si}\ \forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$:

- $\boldsymbol{u_n} \leq \boldsymbol{u_{n+1}}$, alors la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est croissante ;
- $\boldsymbol{u_n} \geq \boldsymbol{u_{n+1}}$, alors la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est décroissante ;
- $\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{u_{n+1}}$, alors la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est constante.

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique, l'une de méthodes suivantes est admise.

- Comparer $\boldsymbol{u}_{\mathrm{n}}$ et $\boldsymbol{u_{n+1}}$, ceci revient à étudier le signe de : $\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n}$
- Comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{1}$ pour une suite à terme positif.

Exemples

1) On donne la suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par : $\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{2n} - \boldsymbol{3}$

Etudions le sens de variation de $(\boldsymbol{u_n})$.

On a : $\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n} = [\boldsymbol{2(n+1)} - \boldsymbol{3}\ ] - (\boldsymbol{2n} - \boldsymbol{3}\ )$

$= \boldsymbol{2n} + \boldsymbol{2} - \boldsymbol{3} - \boldsymbol{2n} + \boldsymbol{3}$

$\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{2} > \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{u_{n+1}} > \boldsymbol{u_n}$, donc $(\boldsymbol{u_n})$

est une suite croissante car, pour tout $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{u_n} \geq \boldsymbol{u_{n+1}}$.

2) On donne la suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par : $\boldsymbol{u_n} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2n}}$

Etudions le sens de variation de $(\boldsymbol{u_n})$.

$(\boldsymbol{u_n})$ est une suite à terme positif, donc comparons $\frac{\boldsymbol{u_{n+1}}}{\boldsymbol{u_n}}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{1}$:

On a : $\frac{\boldsymbol{u_{n+1}}}{\boldsymbol{u_n}} = \frac{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2(n+1)}}}{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2n}}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2n+2}} \times \boldsymbol{2n} = \frac{\boldsymbol{2n+2-2}}{\boldsymbol{2n+2}} = \boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2n+2}} < \boldsymbol{1}$

$\frac{\boldsymbol{u_{n+1}}}{\boldsymbol{u_n}} < \boldsymbol{1}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{u_{n+1}} < \boldsymbol{u_n}$donc $(\boldsymbol{u_n})$ est une suite décroissante.

3) On donne la suite $(\boldsymbol{v_n})$ définie par : $\begin{cases} \boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{v_{n+1}} = \boldsymbol{v_n} - \boldsymbol{5} \end{cases}$.

Etudions le sens de variation de $(\boldsymbol{v_n})$.

On a : $\boldsymbol{v_{n+1}} - \boldsymbol{v_n} = (\boldsymbol{v_n} - \boldsymbol{5}) - \boldsymbol{v_n} = -\boldsymbol{5} < \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{v_{n+1}} < \boldsymbol{v_n}$, donc $(\boldsymbol{v_n})$ est une suite décroissante.

Remarque

- Une suite $(\boldsymbol{u_n})$ est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante ;
- Une suite $(\boldsymbol{u_n})$ est dite stationnaire, si elle est constante à un certain rang.

SEQUENCE 20

Suites arithmétiques

Objectif

Définir et étudier une suite arithmétique.

Définition

Une suite $(\boldsymbol{u_n})$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe un nombre réel $\boldsymbol{r}$ appelé *raison* tel que pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$; on a : $\boxed{\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}}$ (Formule de récurrence)

D'une façon générale, pour tous entiers naturels $\boldsymbol{n}$ ***et*** $\boldsymbol{p}$, on a :
$\boxed{\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}}$ (Formule explicite)

Si $\boldsymbol{p = 0}$, alors $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$

Si $\boldsymbol{p = 1}$, alors $\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r}$

Si $\boldsymbol{p = 2}$, alors $\boldsymbol{u_n = u_2 + (n-2)r}$

Remarque

Si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite tels que $\boldsymbol{b = \frac{a+c}{2}}$, alors b est la moyenne arithmétique de a et c.

NB

Pour démontrer qu'une suite est *arithmétique*, il suffit de prouver que la différence entre deux termes consécutifs est constante, i.e. : $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = r}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Exemples

1) Considérons la suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par : $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 1} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}} \end{cases}$.

On sait que $(\boldsymbol{u_n})$ est une suite arithmétique de premier terme $\boldsymbol{u_0 = 1}$ et de raison $\boldsymbol{r = \frac{1}{2}}$ donc on peut exprimer le terme général $\boldsymbol{u_n}$ de la suite en fonction de $\boldsymbol{n}$.

On obtient : $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr = 1 + \frac{1}{2}n}$.

2) Soit $(\boldsymbol{v_n})$ une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r = 2}$ et telle que $\boldsymbol{u_5 = 9}$.

Déterminons la formule explicite de $(\boldsymbol{v_n})$.

On sait que $\forall \boldsymbol{p \leq n},\ \boldsymbol{u_n = u_p + (n - p)r}$.

Ici on a $\boldsymbol{p = 5}$ et $\boldsymbol{u_5 = 9}$ et $\boldsymbol{r = 2}$ donc :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_n} &= \boldsymbol{u_p + (n - p)r} \\ &= \boldsymbol{u_5 + (n - 5) \times 2} \\ &= \boldsymbol{9 + (n - 5) \times 2} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{u_n = 2n - 1}$.

SEQUENCE 21

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Objectif

Déterminer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$\boxed{\boldsymbol{Somme\ S\ des\ termes\ consécutifs = nombre \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2}}}$$

Autrement dit, $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}}$, est une suite arithmétique, on a :

(1) $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boxed{\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + u_2\ \ldots + u_{n-1} = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}}}$

(2) $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boxed{\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + u_2\ \ldots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}}}$

(3) $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\boldsymbol{S_n = u_1 + u_2 +\ \ldots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}}}$

En particulier : $\boldsymbol{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(1+n)}{2}}$.

Exemple

On considère la suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par : $\boldsymbol{u_0 = 1}$ et $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 1}$.

Calculons la somme $\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$.

On sait que $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 1} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 1} \end{cases}$

La suite $\boldsymbol{u_n}$ est arithmétique de premier terme $\boldsymbol{u_0 = 1}$ et de raison $\boldsymbol{r = 1}$ donc de façon explicite, $\boldsymbol{u_n = 1 + n}$.

$\boldsymbol{u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = 3,\ u_3 = 4,\ \ldots, u_{n-1} = n}$ et $\boldsymbol{u_n = n + 1}$.

Donc $\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n + 1)}$.

$\boldsymbol{S_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}}$ car $\boldsymbol{S_n}$ a $\boldsymbol{(n + 1)}$ termes, or $\boldsymbol{u_0 = 1}$ et $\boldsymbol{u_n = n + 1}$

donc $\boxed{S_n = (n+1) \times \frac{1+(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2).}{2}}$

SEQUENCE 22

Suites géométriques

Objectif

Définir et étudier une suite géométrique.

Définition

Une suite (u_n) est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel q appelé raison tel que pour tout nombre entier naturel n; on a : $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$ (I) Formule de récurrence

D'une façon générale, pour tous entiers naturels n *et* p, on a : $\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}$ (II)

Formule explicite

Si $p = 0$, alors : $u_n = u_0 q^n$

Si $p = 1$, alors : $u_n = u_1 q^{n-1}$

Si $p = 2$, alors : $u_n = u_2 q^{n-2}$

Remarque

Si a et b sont deux termes consécutifs d'une suite géométrique, alors b= aq, où q est la raison de cette suite.

NB

Pour démontrer qu'une suite est *géométrique*, il suffit de prouver que le quotient de deux termes consécutifs est constant, i.e. : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, $(q \in \mathbb{N})$

Exemple

Soit (u_n) une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

Comme $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$, on a donc $q = 2$ puisque $u_{n+1} = qu_n$.

(u_n) est donc une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q = 2$.

Séquence 23

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Objectif

Déterminer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

$(u_n)_n$, est une suite géométrique de raison q.

(1) Si $q \neq 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{u_0 + u_1 + u_2 \ \ldots + u_{n-1} = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}}$

(2) Si $q \neq 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + \ \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

(3) Si $q \neq 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\boxed{u_1 + u_2 + \ \ldots + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}}$

Exemples

1) On considère la suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par : $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 1} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n} \end{cases}$.

Déterminons la formule explicite de $(\boldsymbol{u_n})$.

$(\boldsymbol{u_n})$ est définie par une relation de récurrence $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n}$ et par la donnée $\boldsymbol{u_0 = 1}$ donc d'après la définition, $(\boldsymbol{u_n})$ est une suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{u_0 = 1}$ et de raison $\boldsymbol{q = \frac{2}{3}}$.

Donc on peut exprimer $(\boldsymbol{u_n})$ de façon explicite par : $\boldsymbol{u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

2) On donne une suite $(\boldsymbol{v_n})$ géométrique de raison $\boldsymbol{q = 3}$ et telle que $\boldsymbol{v_4 = 81}$.

Exprimons le terme général $\boldsymbol{v_n}$ par une formule explicite.

$\boldsymbol{v_n}$ est déterminée par sa raison $\boldsymbol{q = 3}$ et un terme de rang 4.

On applique donc la formule (II).

On a : $\boldsymbol{v_n = v_p \times q^{n-p}}$ pour tout $\boldsymbol{p \leq n}$.

Ainsi : $\boldsymbol{v_n = v_4 \times q^{n-4}}$

$\boldsymbol{= 81 \times 3^{n-4}}$

$\boldsymbol{= 81 \times 3^n . 3^{-4}}$

$\boldsymbol{= \frac{81}{3^4} \times 3^n}$

Donc $\boldsymbol{v_n = 3^n}$

SEQUENCE 24

Limite d'une suite numérique et image d'une suite par une fonction

Objectif

Déterminer la limite d'une suite numérique et calculer l'image d'une suite par une fonction

Exemples de calcul de limites

Déterminons la limite de la suite $(\boldsymbol{u_n})$ dans les cas suivants :

a) $\boldsymbol{u_n = \frac{n+2}{n}}$.

On a : $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n}\right) = 1}$

Donc $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$. Dans ce cas, on dit que la suite $(\boldsymbol{u_n})$ converge vers 1.

b) $\boldsymbol{v_n = \frac{n^2+2n+3}{n-2}}$.

On a : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2n+3}{n-2}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Il s'ensuit que (v_n) est une suite divergente.

Remarque

- Une suite (u_n) est dite *convergente* lorsqu'elle admet une limite finie (l) lorsque $n \to +\infty$
- Une suite (u_n) est dite *divergente* lorsqu'elle admet une limite infinie (∞) lorsque $n \to +\infty$ ou lorsqu'elle n'admet pas une limite.

Image d'une suite par une fonction

Propriété

Soit f une fonction, Df son domaine de définition et (u_n) une suite d'éléments de Df.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to a} f(x) = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

Autre propriété

Soit g une fonction continue sur un intervalle k, (u_n)une suite à valeurs dans K définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$

Si (u_n) est convergente, alors sa limite est une solution de l'équation $g(x) = x$.

NB : Si $g(x) = x$ n'admet pas de solution, alors (u_n) est divergente.

Si(u_n) converge vers l et si f est continue en l, alors : $f(l) = l$.

Suites adjacentes

Définition

Soit(u_n) une suite croisante et (v_n) une Suite décroissante. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacente si : $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Leçon : Structures de groupes et de sous-groupes

SEQUENCE 25 :

Objectif

Montrer qu'une partie d'un ensemble est stable par une loi de composition interne

Structures de groupes

Définition
Soit A un ensemble non vide.
On appelle loi de composition interne sur A, une application de $\boldsymbol{A \times A\ dans\ A}$. On dit encore que cette application est une opération dans A.
Remarque
Il est important de comprendre le schéma permettant de définir une loi de composition interne dans un ensemble donné E.
Ainsi si on considère deux entiers $\boldsymbol{x\ et\ y}$ et qu'on les compose par l'addition, on obtient un résultat $\boldsymbol{x+y}$ qui est un entier.
Si $\boldsymbol{A\ et\ B}$ sont 2 sous-ensembles de $\boldsymbol{E\ \ alors\ \ A \cap B}$ est un sous ensemble de E .
De même si $\boldsymbol{f\ et\ g}$ sont 2 applications affines du plan et qu'on les compose par la loi ° , on constate que $\boldsymbol{f \circ g}$ est une application affine du plan.
En fait ces 3 situations présentent le même schéma: on prend 2 objets de même nature et on construit un nouvel objet de même nature que les 2 objets de départ.
Exemples

1) Dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ $\boldsymbol{ou}$ $\mathbb{C}$, l'addition et la multiplication sont des lois de composition interne
2) Dans $\mathbb{N}$ la soustraction n'est pas une loi de composition interne.
3) Si E est un ensemble non vide, la composition des applications de E dans E est une loi interne.
4) E étant un ensemble donné, l'intersection et la réunion sont des lois de composition interne dans $\boldsymbol{\mathcal{P}(E)}$.

SEQUENCE 26

Objectif

Définir un groupe et démontrer qu'une partie non vide d'un ensemble est un groupe

Groupes (rappels)

Définition
Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition notée $*$.
Le couple $(\mathbf{G},*)$ est un groupe si et seulement si:

1. $*$ est associative : $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{G}, (\mathbf{x} * \mathbf{y}) * \mathbf{z} = \mathbf{x} * (\mathbf{y} * \mathbf{z})$

2. La loi $*$ possède un élément neutre dans G : $\exists\ \mathbf{e} \in \mathbf{G}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{G}$
   $\mathbf{x} * \mathbf{e} = \mathbf{x}$ **et** $\mathbf{e} * \mathbf{x} = \mathbf{x}$, on dit que **e** est un élément neutre pour $*$ dans G.
3. Tout élément de G possède une symétrie pour $*$ dans G : $\mathbf{x} \in \mathbf{G}$ admet un symétrique pour $* \Leftrightarrow \mathbf{x} * \mathbf{x}' = \mathbf{x}' * \mathbf{x} = \mathbf{e}$ .Si de plus $*$ est commutative $\mathbf{x} * \mathbf{x}' = \mathbf{e}$, alors $(\mathbf{G},*)$ est un groupe dit commutatif ou abélien.

Exemples

1) Les couples $(\mathbb{Z},+), (\mathbb{D},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{R},+)\boldsymbol{et}\ (\mathbb{C},+)$ sont des groupes commutatifs.
2) $(\mathbb{D}^*,\times), (\mathbb{Q}^*,\times), (\mathbb{R}^*,\times)\boldsymbol{et}\ (\mathbb{C}^*,\times)$ sont aussi des des groupes commutatifs.
   - Montrons que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif.
     On montre d'abord que la loi $\times$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{C}^*$. En effet, soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^*\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^*, \boldsymbol{on\ sait\ que}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{non\ tous\ nuls})$
     $\boldsymbol{et}\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{id}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{non\ tous\ nuls}\ )$
     On a:
     $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib})(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{id}) = (\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bd}) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc})$
     donc $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{iB} \in \mathbb{C}^*\ \boldsymbol{o}$ù $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bd}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc}$
     La loi $\times$ est bien une loi de composition interne dans $\mathbb{C}^*$ ou stable
   - Montrons que $*$ est associative ie $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^*, (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})$
     On a:$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = [(\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{db})\boldsymbol{e} - (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc})\boldsymbol{f}] + \boldsymbol{i}[(\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bd})\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{dc})\boldsymbol{e}]$
     $= [\boldsymbol{a}(\boldsymbol{ce} - \boldsymbol{df}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{de} + \boldsymbol{cf})] + \boldsymbol{i}[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{de} + \boldsymbol{cf}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ce} - \boldsymbol{df})] = \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})$
     Donc $\times$ est associative.
   - Montrons que la loi $\boldsymbol{c}$ possède un élément neutre pour $\mathbb{C}^*$
     On sait que $\mathbf{1} \in \mathbb{C}^*\ \boldsymbol{car}\ \mathbf{1} = \mathbf{1} + \boldsymbol{i}\mathbf{0}\ \boldsymbol{et}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^*, \boldsymbol{on\ a}$:
     $\boldsymbol{x} \times \mathbf{1} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}) \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib} = \boldsymbol{x}$
     Donc d est élément neutre pour la loi $\times\ \boldsymbol{dans}\ \mathbb{C}^*$
   - Montrons que tout élément de $\mathbb{C}^*$ possède un élément symétrique dans $\mathbb{C}^*$.
     Soit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi} \in \mathbb{C}^*$
     $\boldsymbol{x}$ admet un symétrique pour la loi $\times\ \boldsymbol{dans}\ \mathbb{C}\ \boldsymbol{si}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in\ \mathbb{C}^*, \exists \boldsymbol{x}' \in\ \mathbb{C}^*, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$
     Soit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib} \in \mathbb{C}^*$,on a :$\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{x} = \mathbf{1} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib})(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{ib}') = \mathbf{1}$
     $\Leftrightarrow \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{ib}' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{ib}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2} - \boldsymbol{i}\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$
     $\boldsymbol{d'ou}\ \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{ib}' = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2} + \boldsymbol{i}\frac{(-\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$
     $\boldsymbol{or}\ \ \boldsymbol{a}' = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{ib}} \in \mathbb{R}\ \ \boldsymbol{et}\ \ \boldsymbol{b}' = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2} \in \mathbb{R}\ \ \boldsymbol{donc}\ \ \boldsymbol{x}' \in \mathbb{C}^*$

     Tout complexe non nul $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$ possède un symétrique
     $\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2} + \boldsymbol{i}\frac{(-\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2} \in \mathbb{C}^*$
     Les propriétés vérifiées ci-dessus nous autorisent donc à affirmer que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe.
     De plus , on a : $\forall\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib} \in \mathbb{C}^*\ \forall\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{id}\ \in \mathbb{C}^*$ on a :

$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bd}) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc}) = (\boldsymbol{ca} - \boldsymbol{db}) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{da} + \boldsymbol{cb}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ donc $\times$ est commutative dans $\mathbb{C}^*$.
Il s'ensuit que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

SEQUENCE 27

Eléments particuliers et propriétés

Objectif

Montrer qu'un élément est neutre, absorbant par une loi de composition, symétrisables.

Eléments particuliers et propriétés

Elément neutre

Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E.
Soit $\mathbf{e}$, un élément de $\mathbf{E}$. e est élément neutre pour la loi $* \Leftrightarrow \mathbf{e} * \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{e} = \mathbf{x}$.
Théorème
Soit $(\boldsymbol{A}, *)$ un groupe.
Si $*$ admet un élément neutre dans A, alors celui-ci est unique.

Démonstration

Supposons que $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{e'}$ soient deux éléments neutres de A.

Alors $\boldsymbol{e'} * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{e'} = \boldsymbol{e'}$. Donc cet élément neutre est unique.

Exemples

1) Dans $\mathbb{C}$,0 est élément neutre pour l'addition alors que 1 est élément neutre pour la multiplication.
2) Dans $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})[\boldsymbol{l'ensembledes\ parties\ de\ E}]$,E est élément neutre pour la loi $\cap$

(Intersection) alors que $\emptyset$ est élément neutre pour la $\boldsymbol{loi}$ $\cup$ (réunion d'ensembles).

Elément absorbant

Définition

soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E.

Soit $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$, a est élément absorbant pour la loi $* \Leftrightarrow \mathbf{a} * \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Exemples

1) Dans$\mathbb{R}$,on sait que$\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{0} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Donc 0 est élément absorbant pour la multiplication dans $\mathbb{R}$

2) Dans $\mathbb{Z}$, l'élément 0 est aussi un élément absorbant pour la multiplication.
3) Dans$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$, l'ensemble E est absorbant pour la réunion $(\cup)$ $\boldsymbol{et}$ $\emptyset$ est absorbant pour la loi $\cap$ (intersection)

SEQUENCE 28

Eléments particuliers et propriétés

Objectif

Montrer qu'un élément est symétrisable, simplifiable par une loi de composition interne.

Eléments symétrisables

Lors que $\boldsymbol{x}$ admet un symétrique pour la loi $*$, on dit que $\boldsymbol{x}$ est symétrisable. On donne donc la définition suivante :

Définition

Soit E un ensemble non vide et $*$ une loi interne sur E possédant un élément neutre e.
Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$. $\mathbf{x}$ est symétrisable pour $*$ si et seulement si $\mathbf{x}$ admet un symétrique pour $*$.
NB : $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ étant deux éléments de (E, $*$), x est symétrique de y si et seulement

$$\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}$$

Théorème 1

Soit $\boldsymbol{x}$ un élément de E.
Si $*$ est associative, si $*$ possède un élément neutre e et si $\boldsymbol{x}$ admet un symétrique pour $*$ alors celui-ci est unique.

Démonstration

Soit $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$. Soit $\boldsymbol{x'} \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{x''}$ deux éléments symétriques de $\boldsymbol{x}$.
Alors : $\boldsymbol{x''} = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{x''} = (\boldsymbol{x'} * \boldsymbol{x}) * \boldsymbol{x''} = \boldsymbol{x'} * (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{x''}) = \boldsymbol{x'} * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{x'}$
D'où le résultat.

Théorème 2

Soit E un ensemble non vide puis $*$ une loi de composition interne sur E, associative et possédant un élément neutre e.
Soient $\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{x'}$ deux éléments de E.
Si $\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{y}$ est sont symétrisables alors $\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}$ est symetrisable et $(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y})' = \boldsymbol{y'} * \boldsymbol{x'}$

Démonstration

Soient $\boldsymbol{x'} \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{x'}$, deux éléments symétrisables de E.
Soient $\boldsymbol{x'} \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{y'}$ leurs symétriques respectifs.
On a $(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) * (\boldsymbol{y'} * \boldsymbol{x'}) = \boldsymbol{x} * (\boldsymbol{y} * \boldsymbol{y'}) * \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{e} * \boldsymbol{x'}$

$$= \boldsymbol{x} * \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{e}$$

De même :

$(\boldsymbol{y'} * \boldsymbol{x'}) * (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y'} * (\boldsymbol{x'} * \boldsymbol{x}) * \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y'} * \boldsymbol{e} * \boldsymbol{y}$

$$= \boldsymbol{y'} * \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}$$

Donc $\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}$ est symétrisable et son symétrique est y'$* \boldsymbol{x'}$

Exemple

1) Soit $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in \mathbb{C}$,l'opposé de $\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}\ \boldsymbol{est} - \boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2}$.
2) Dans $\mathbb{C}^*$, l'inverse de $\boldsymbol{z_1 X z_2}\ \boldsymbol{est}\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z_1}} \boldsymbol{X} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z_2}}$.

Dans l'ensemble des bijections d'un ensemble E lui-même, la réciproque $(\boldsymbol{gof})^{-1}$ de $\boldsymbol{gof\ est\ f^{-1}Og^{-1}}$.

Eléments simplifiables

Définition

Soit E un ensemble non vide et soit $*$ une loi de composition interne sur E. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$.

. On dit que $\mathbf{x}$ est simplifiable à gauche pour $* \Leftrightarrow \forall(\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbf{E^z}, \mathbf{y} * \mathbf{x} = \mathbf{z} * \mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$.

. $\mathbf{x}$ est simplifiable pour $*$ si et seulement si $\mathbf{x}$ est simplifiable à gauche et à droite.

Théorème

Si $*$ est associative et possède un élément neutre alors tout élément symétrisable est simplifiable.

Démonstration

Soit $\boldsymbol{x}$ un élément de E symétrisable pour $*$.

Soit $\boldsymbol{x'}$ son symétrique pour $*$. Pour$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{E^2}$,

$\boldsymbol{x} * \boldsymbol{z} \Longrightarrow \boldsymbol{x'} * (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x'} * (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{z})$

$$\Longrightarrow (\boldsymbol{x'} * \boldsymbol{x}) * \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x'} * \boldsymbol{x}) * \boldsymbol{z} \Longrightarrow \boldsymbol{e} * \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{z}$$

$\boldsymbol{D'o}$ù $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$

Exemples

1) Dans $\mathbb{R}$, tout élément est simplifiable pour l'addition car $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x''} \in \mathbb{R}$, on a : $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x''} \Longrightarrow \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x''}$.
2) Dans $\mathbb{C}$, les éléments simplifiables pour la multiplication sont les complexes non nuls car $\forall(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z'},\boldsymbol{z''}) \in \mathbb{C}^*\boldsymbol{X}\mathbb{C}\ \boldsymbol{X}\ \mathbb{C}$, on a $\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{z'} = \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{z'} \Longrightarrow \boldsymbol{z'} = \boldsymbol{z''}$.

SEQUENCE 29

Distributivité d'une loi par rapport à une autre

Objectifs

Définir la distributivité d'une loi par rapport à une autre

Définir la partie stable pour une loi

Distributivité d'une loi par rapport à une autre

Définition

Soit E un ensemble non vide et $*$ et T deux lois de composition internes sur E.

T est distributive par rapport à $* \Leftrightarrow \forall(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbf{E^3}$, on a:

$(\mathbf{y} * \mathbf{z})\ \mathbf{T}\ \mathbf{x} = (\mathbf{y}\ \ \mathbf{T}\ \mathbf{x}) * (\mathbf{z}\ \mathbf{T}\ \mathbf{x})$ et $\mathbf{xT}(\mathbf{y} * \mathbf{z}) = (\mathbf{x}\ \ \mathbf{T}\ \mathbf{y}) * (\mathbf{x}\ \mathbf{T}\ \mathbf{z})$

Remarque

Si T est commutative, une et une seule des deux égalités ci-dessus suffit.

Exemple

Dans $\mathbb{C}$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition

Car,$\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{C}^3$, on a $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z})$

Mais l'addition n'est pas distributive par rapport à la multiplication.

Sous-groupes

Partie stable pour une loi

Définition

Soient E un ensemble non vide puis $*$ une loi de composition interne sur E. Soit F une partie non vide de E ($F \subset E$)

F est stable pour $* \Leftrightarrow \forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{F^2}, \mathbf{x} * \mathbf{y} \in \mathbf{F}$

Exemples

1) Dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres pairs est stables pour l'addition car la somme des nombres pairs est un nombre pair.
2) Dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres pairs est stable pour la multiplication.(montrez-le)
3) Dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres impairs est stables pour la multiplication mais pas pour l'addition (montrez-le).
4) Dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble$\cup$ des nombres complexes de module 1 est stable pour la multiplication

Loi induite

Définition

Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E.

Soit F une partie non vide de E, stable pour $*$.

L'application : $\begin{matrix} \mathbf{FXF} \longrightarrow \mathbf{F} \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{x} * \mathbf{y} \end{matrix}$ **est appelée loi induite par $*$ sur F**.

SEQUENCE 30

Sous-groupes

Objectif

Définir un sous-groupe et démontrer qu'une partie non vide d'un ensemble est un sous-groupe

Définition

Soient,$(\mathbf{G},*)$un groupe puis H une partie de G.

H est un sous-groupe de $(\mathbf{G},*)$ si et seulement si H est non vide, stable pour $*$ et ,muni de la loi induite, est un groupe.

L'utilisation de cette définition pour montrer que $(\boldsymbol{H},*)$ est un sous-groupe de $(\boldsymbol{G},*)$ suppose qu'il faille dans un 1er temps montrer la stabilité de H pour la loi induite$*$ et dans un 2e temps vérifier toutes les propriétés permettant d'inférer que H est un sous-groupe (associativité, élément neutre, élément symétrique).

Cette démarche qui reste bien efficace est toutefois assez longue à mettre en œuvre.

En fait certaines propriétés, du fait que H est une partie non vide de G et stable pour la loi $*$, sont automatiques, par exemple l'associativité.

Nous basant sur cette réalité, nous allons donc caractériser les sous-groupes à partir de certaines propriétés qui se vérifient automatiquement aussi bien pour la loi de composition interne dans le groupe (ici G) que dans la partie stable du groupe (ici H).

Caractérisations d'un sous-groupe

On admet les deux théorèmes suivants

Théorème1

Soient,$(\boldsymbol{G},\ *)$ un groupe et H une partie non vide de G.

H est un sous-groupe de $(\boldsymbol{G},\ *) \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{1})\ \boldsymbol{e} \in \boldsymbol{H} \\ (\mathbf{2})\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H} \\ (\mathbf{3})\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}, \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{H} \end{cases}$

Théorème2

Soient $(\boldsymbol{G},*)$ un groupe et H une partie de G

H est un sous-groupe de $(\boldsymbol{G},*) \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{1})\ \ \boldsymbol{e} \in \boldsymbol{H} \\ (\mathbf{2})\ \ \forall(\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{y}) \in\ \boldsymbol{H}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{H} \end{cases}$

Ces deux théorèmes sont des outils très pratiques pour démontrer qu'une partie stable d'un groupe est un sous-groupe. Il est donc indispensable de les retenir et de savoir les appliquer dans des situations appropriées.

Dans la pratique, il est fréquent de rencontrer des situations où la loi de composition interne induite sur H est l'addition $(+)$ ou la multiplication $(\times)$.

Dans ces cas, on peut redonner ces caractérisations du sous-groupe de façon explicite sous les formes suivantes :

■H est un sous-groupe de (G, X)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{1}) : \boldsymbol{H} \neq \emptyset \\ (\mathbf{2}) : \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{xXy} \in \boldsymbol{H} \\ (\mathbf{3}) : \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}, \boldsymbol{x}^{-\mathbf{1}} \in\ \ \boldsymbol{H} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{1}) : \boldsymbol{H} \neq \emptyset \\ (\mathbf{2}) : \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{xXy}^{-\mathbf{1}} \in \boldsymbol{H} \end{cases}$$

Exemple

On considère l'ensemble P des nombres entiers relatifs pairs.

Montrer que P est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

On sait que $\mathrm{P} = \{\mathbf{2}\boldsymbol{k}\ /\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}$. Donc $\boldsymbol{P}\ \subset \mathbb{Z}$ car tous les entiers rélatifs pairs sont avant tout des entiers relatifs donc $\boldsymbol{P}\ \neq \emptyset$.

D'autre part, P étant stable pour l'addition des entiers relatifs puisque la somme de 2entiers pairs est un entier pair, montrons que $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{P^2},\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}$.

On sait que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{2k}\ \boldsymbol{o}\text{ù}\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$ et $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{2k'}\boldsymbol{o}\text{ù}\boldsymbol{k'} \in \mathbb{Z}$.

Donc : $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{2k}-\boldsymbol{2k'} = \boldsymbol{2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})$ or la soustraction est une loi interne dans $\mathbb{Z}$

donc $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{donc}\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}$

On a vérifié que : $\begin{cases} \boldsymbol{P} \neq \emptyset \\ \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{P^2}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P} \end{cases}$ donc P est un sous –groupe de $(\mathbb{Z},+)$

Intersection des sous-groupes
Théorème
Si H et K sont des sous-groupes de$(\boldsymbol{G},\ *)$.
En d'autres termes une intersection de sous-groupe est un sous-groupe.

Démonstration
Soient H et K deux sous-groupes. D'après la caractérisation de sous-groupes, H et K contiennent l'élément neutre $\boldsymbol{e\ de\ G}$ et donc $\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{K} \neq \emptyset$.
D'autre part,$\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{G}$
Soit $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{K}$.
$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{K^2} \Longrightarrow \left((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{H^2}\right)\ \boldsymbol{et}\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{K^2}$
$\Longrightarrow \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y^{-1}} \in \boldsymbol{H}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y^{-1}} \in \boldsymbol{K}$
$\boldsymbol{Donc}\ \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y^{-1}} \in \boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{K}$
Donc $\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{K}$ est un sous-groupe de $(\boldsymbol{G},*)$

SEQUENCE 31

Structure d'anneaux

Objectif

Démontrer qu'un ensemble muni de deux lois est un anneau

Définition

Soit A un ensemble non vide, ayant au moins deux éléments, muni de deux lois de composition interne notée $*$ **et T**

$(\mathbf{A},*,\mathbf{T})$ Est un anneau $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{1}).\ (\mathbf{A},\ *)\ \textbf{est un groupe commutatif} \\ \mathbf{2}).\ \mathbf{a}).\ \textbf{T est associative} \\ \quad \mathbf{b}).\ \textbf{T possède un élément neutre dans A} \\ \mathbf{3}).\ \textbf{T est distributive par rapport à}\ * \end{cases}$

Si de plus, la loi T est commutative, on dit que $(\mathbf{A},*,\mathbf{T})$ est un anneau commutatif.

Exemples

1) $(\mathbb{Z},+,\ \times)$ est un anneau commutatif.
2) $(\mathbb{Q},+,\ \times),(\mathbb{R},+,\ \times),(\mathbb{C},+,\ \times)$ sont des anneaux.

Anneaux et divisibilité

Définition

Soit $(\mathbf{A}, +, \ .)$ un anneau commutatif.

1. On dit que $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ est inversible s'il admet un symétrique pour la loi.
2. On dit que a divise b s'il existe $\mathbf{c} \in \mathbf{A}$ tel que $\mathbf{b} = \mathbf{c}\,\mathbf{a}$. On note $\mathbf{a} \,/\, \mathbf{b}$.
3. On dit que a est diviseur de 0 s'il existe $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{ab} = \mathbf{0}$.
4. Un anneau est dit intègre s'il ne contient pas de diviseurs de 0 autre que 0 lui-même.

Propriétés

Dans un anneau commutatif $(\mathbf{A}, +, \ .)$:

0 n'est jamais inversible

. Si $\mathbf{x}$ est inversible, alors ce n'est pas un diviseur de 0.

.Si $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ \mathbf{y} \in \mathbf{A}$ intègre avec $y \neq \mathbf{0}$ **et** $\mathbf{x_1 y} = \mathbf{x_2 y}$, **alors** $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_2}$.

On dit qu'on peut simplifier par $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

Exemples

1) $\mathbb{z}$ est un anneau intègre et ses éléments inversibles sont 1 et -1

2) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ***et*** $\mathbb{C}$ sont des anneaux intègres dont tous les éléments non nuls sont inversibles.

SEQUENCE 32

Structure d'anneaux

Objectif

Définir le groupe des inversibles d'un anneau

Groupe des inversible d'un anneau

Théorème

Soit $(\boldsymbol{A}, +, \ \times)$ un anneau. On note $\boldsymbol{A}^*$ l'ensemble des éléments de A qui sont inversibles, c'est-à-dire $(\boldsymbol{A}^*, \ \times)$ est un groupe.

Démonstration

Montrons que $(\boldsymbol{A}^*, \ \times)$ est un groupe sachant que $\boldsymbol{A}^*$ est l'ensemble des inversibles de A.

On sait que $\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}} \in \boldsymbol{A}$ car $\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$ est inversible d'inverse lui-même. Donc, en particulier $\boldsymbol{A}^* \neq \emptyset$

Montrons que $\times$ est interne sur $\boldsymbol{A}^*$.

- Soit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}^*$.
  $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}^* \boldsymbol{et}\ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})^{-1} = \boldsymbol{y}^{-1} \times \boldsymbol{x}^{-1}$ donc X est une loi de composition interne sur $\boldsymbol{A}^*$
- D'autre part, on montre que $\times$ est associative dans A donc $\times$ est associative dans $\boldsymbol{A}^*$

- Enfin, montrons que tout élément de $\boldsymbol{A}^*$ admet un symétrique pour $*$ dans $\boldsymbol{A}^*$
  On sait que si $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{x}^{-1} \in \boldsymbol{A}^*$ $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{x}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{x}$.
  Donc tout élément de $\boldsymbol{A}^*$ admet un symétrique pour $\times$ dans $\boldsymbol{A}^*$

Exemple
On sait que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau et $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}$ qui sont inversibles.
Donc $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe.

SEQUENCE 33

Calculs dans un anneau

Objectif

Effectuer des calculs dans un anneau

Théorème 1

Soit $(\boldsymbol{A}, +, *)$ un anneau, et on note $\mathbf{0}_{\boldsymbol{A}}$ l'élément neutre de A pour la loi $+$.

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{x} * \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$

L'élément neutre pour l'addition est toujours absorbant pour la multiplication.
Démonstration
Soit $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{x} * \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}) * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} * \boldsymbol{x} + \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} * \boldsymbol{x}$ est distributive sur la loi $+$.
Or, on sait que $(\boldsymbol{A}, +)$ est un groupe et dans un groupe, tout élément est simplifiable.
Donc : $\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} * \boldsymbol{x} + \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} * \boldsymbol{x} + \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} \Longrightarrow \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$
De même, on a : $\boldsymbol{x} * \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$
Théorème 2
Soit $(\boldsymbol{A}, +, .)$ un anneau
$\forall (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{A}^2, (-\boldsymbol{a}).\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}.(-\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})$
Démonstration
Soit $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{A}^2$
$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}).\boldsymbol{b} = \big(\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})\big).\boldsymbol{b} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}.\boldsymbol{b} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$
$\boldsymbol{donc}\ (-\boldsymbol{a}).\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})$
$\boldsymbol{de\ meme}: \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.(-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}.\big(\boldsymbol{b} + -(-\boldsymbol{b})\big) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{A}}$
$\boldsymbol{donc}\ \boldsymbol{a}.(-\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})$
Théorème 3
Soit $(\boldsymbol{A}, +, *)$ un anneau. Soient $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{b}$ deux éléments de A.
Si a et b commutent, on a :
$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}} \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}}.\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}$ (formule de binôme de Newton)
$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}-1-\boldsymbol{k}}$
$\boldsymbol{sachant\ que}, \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{on\ a}: \boldsymbol{x}^0 = \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$

SEQUENCE 34

Structure de corps

Objectifs

Définir un corps

Démontrer qu'un ensemble muni de deux lois est un corps.

Définition

Soit $(\mathbf{K}, +, \times)$ un anneau.
$(\mathbf{K}, +, \times)$ est un corps si et seulement si tout élément non nul de K admet un inverse (pour la loi $\times$) dans K.

Le corps $\mathbf{K}$ est commutatif si et seulement si la loi $\times$ est commutative.

Exemple

On vérifie que $(\mathbb{Q}, +, .), (\mathbb{R}, +, .)\boldsymbol{et}\ (\mathbb{C}, +, .)$ sont des corps commutatifs.

Théorème

Dans un corps, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Démonstration
Soit $(\boldsymbol{K}, +, .)$ un corps.
Notons 0 (resp. 1) l'élément neutre pour la loi + (resp. la loi x)
Soit $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{K^2 tel\ que\ a.b = 0}$
Si $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{a}$ admet un inverse pour la loi . notée $\boldsymbol{a^{-1}}$
On a donc : $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{a^{-1}} \times \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a^{-1}} \times \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{1} \times \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$

SEQUENCE 35

Leçon : Dénombrement et probabilité
Dénombrement des ensembles finis
Les outils de dénombrement
Objectif
Dénombrer les arrangements, les permutations et les combinaisons
p-listes d'ensembles finis ou arrangements avec remise
Propriété
Le nombre des p-listes (arrangements p à p des n éléments d'un ensemble avec remise) d'un ensemble ayant n éléments est $\mathbf{n^p}$.
C'est aussi le nombre des applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.
Les arrangements sans remise
Propriété
Le nombre total d'arrangements sans remise p à p des n éléments d'un ensemble A est noté $\boldsymbol{A_n^p}$.

$A_n^p = n\times(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$.

Les permutations

Une permutation des n éléments de l'ensemble A est un arrangement sans remise de tous les n éléments de A.

Le nombre total de ces permutations est $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$

Les combinaisons

A est un ensemble ayant n éléments et p un entier naturel tel que $p \leq n$.

Une combinaison de p éléments de A est un sous-ensemble de A qui possède p éléments.

Le nombre total des combinaisons de p éléments d'un ensemble A ayant n éléments noté C_n^p ***est :***

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés

n et p sont deux nombres entiers tels que $p \leq n$.

- $C_n^{n-p} = C_n^p$;
- *Si de plus* $0 < p < n$ *alors, on a :* $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Formule du binôme de Newton : propriété

Théorème

a et b sont deux nombres réels et n, un nombre entier naturel non nul. On a :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^p a^{n-p} b^p + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

En utilisant le symbole Σ, *on écrit :* $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p} b^p$.

SEQUENCE 36

Le calcul des probabilités

Objectif

Calculer la probabilité d'un évènement

Probabilité d'un évènement

Définition

E est une expérience aléatoire. Désignons par Ω l'univers associé à E.

On appelle probabilité sur l'univers Ω , une application P de l'ensemble des parties P (Ω) vers $[0; 1]$ *qui, à toute partie A de Ω, associe le nombre réel P(A).*

Le nombre réel P(A) vérifie :

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- *la probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui constituent A ;*
- $P(\Omega) = 1$;
- $P(\emptyset) = 0$;

Propriétés

- *P est une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux évènements de Ω, on a :*

- *Si* $A \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$, $P(A \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$;
- $P(A) + P(\overline{\boldsymbol{A}}) = \mathbf{1}$.

- $P(A \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) - P(A \cap \boldsymbol{B})$.
- *Si* $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots, \boldsymbol{A_p}$ *sont p évènements deux à deux disjoints alors,*

  $P(\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2} \cup \dots \cup \boldsymbol{A_p}) = P(\boldsymbol{A_1}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A_2}) + \dots + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A_p})$.

Equiprobabilité

Définition

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les évènements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité.

L'équiprobabilité est généralement suggérée par des expressions comme : « dé parfait » ; « dé parfaitement équilibré » ; « dé non pipé » ; « pièce parfaite » ; « boules indiscernables au toucher » ; « cartes bien battues » ; « tirage au hasard »…

Conséquences

Si $\Omega = \{\boldsymbol{a_1}; \boldsymbol{a_2}; \dots; \boldsymbol{a_n}\}$, *Card* $\Omega = n$.

S'il y a équiprobabilité, $P(\{\boldsymbol{a_1}\}) = P(\{\boldsymbol{a_2}\}) = \dots = P(\{\boldsymbol{a_n}\}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$

Propriété

P est une probabilité sur un univers Ω.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout évènement A, on a : $P(A) = \frac{\boldsymbol{Card\ A}}{\boldsymbol{Card}\ \Omega}$.

Remarque

Les éventualités de l'évènement A sont appelées les cas favorables à A et celles de l'univers Ω sont les cas possibles.

On écrit alors $P(A) = \frac{\textbf{nombre de cas favorables à A}}{\textbf{nombre de cas possibles}}$

SEQUENCE 37

Evènements indépendants – expériences aléatoires indépendantes

Objectifs

- Définir des évènements indépendants et calculer leur probabilité

- Calculer la probabilité conditionnelle d'un évènement

Définition

P est une probabilité définie sur un univers Ω.

Deux évènements A et B de l'univers Ω sont indépendants si $P(A \cap \mathbf{B}) = P(A) \times P(B)$.

Propriété

Si n expériences aléatoires sont indépendantes alors, pour tous les évènements $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \dots, \mathbf{A_n}$ de chacun des univers associés à ces épreuves, on a:

$P(\mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_2} \cap \ldots \cap \mathbf{A_n}) = P(\mathbf{A_1}) \times \mathbf{P}(\mathbf{A_2}) \times \ldots \times \mathbf{P}(\mathbf{A_n})$

Probabilité conditionnelle

Définition et propriété

Ω est un univers associé à une expérience aléatoire.

Désignons par A et B deux évènements du même univers Ω de probabilité non nulle.

La probabilité de A sachant que B est réalisé, notée P(A/B) ou encore $\boldsymbol{P_B(A)}$ est définie par :

P(A/B) = $\frac{\boldsymbol{P(A \cap B)}}{\boldsymbol{P(B)}}$.

Si on connait la probabilité conditionnelle de A/B et la probabilité de B, alors on peut calculer la probabilité de (A∩ $\boldsymbol{B}$) et P(A∩ $\boldsymbol{B}$) = P(A/B) × P(B).

Formule des probabilités totales

Propriété

$\boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2}, \ldots, \boldsymbol{B_n}$ *sont n évènements formant une partition de l'univers Ω associé à une expérience aléatoire.*

- *Pour tout évènement A, P(A) = P(A∩* $\boldsymbol{B_1}$*) + P(A∩* $\boldsymbol{B_2}$*) + … + P(A∩* $\boldsymbol{B_n}$*).*
- *Pour tout i (1 ≤ i ≤ n), P(A∩* $\boldsymbol{B_i}$*) =* $\boldsymbol{P_{B_i}}$*(A) × P(*$\boldsymbol{B_i}$*).*

SEQUENCE 38

Schéma de Bernoulli

Objectif

Définir une épreuve de Bernoulli et calculer la probabilité dans le cas d'une épreuve de Bernoulli

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues (éventualités) possibles généralement notées S pour « Succès » et E pour « Echec ».
La répétition n fois, de façon indépendante, d'une épreuve de Bernoulli est appelée schéma de Bernoulli.

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves où pour chaque épreuve la probabilité du Succès est p (et celle de Echec 1 – p).
On dit que le schéma de Bernoulli est de paramètres n et p.
La probabilité d'obtenir exactement k Succès (0 ≤ k ≤ n) au cours de ces n épreuves est :

$p(k) = \mathbf{C_n^k} \times \mathbf{p^k}(\mathbf{1} - \mathbf{p})^{\mathbf{n-k}}$.

SEQUENCE 39

Variables aléatoires

Objectif

Définir une variable aléatoire et établir sa loi de probabilité
Définition
On appelle variable aléatoire X sur un univers Ω associé à une expérience aléatoire toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.
Une variable aléatoire est généralement désignée par une lettre majuscule X, Y, Z,…
Notation et vocabulaire

- Lorsque la variable aléatoire X prend les valeurs réelles $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}$, on dit que l'univers image de Ω par X est : $X(\Omega) = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}\}$.
- $(X = \mathbf{x_i})$ désigne l'évènement « X prend la valeur $\mathbf{x_i}$) où $1 \leq i \leq n$.
- $(X < \alpha)$ désigne l'évènement « X prend une valeur strictement inférieur à α).

Loi de probabilité d'une variable aléatoire
Définition
Lorsqu'à chaque valeur $\mathbf{x_i}$ ($\mathbf{x_i} \in X(\Omega) = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}\}$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité $\mathbf{p_i}$ de l'évènement $(X = \mathbf{x_i})$ $(1 \leq i \leq n)$, on dit qu'on a défini une loi de probabilité de la variable aléatoire X.

SEQUENCE 40

Fonction de répartition d'une variable aléatoire
Objectif
Définir et construire la fonction de répartition d'une variable aléatoire
Déterminer et calculer les caractéristiques d'une variable aléatoire
Définition de la fonction de répartition
X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.
La fonction de répartition de la variable aléatoire X est l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[\mathbf{0}; \mathbf{1}]$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.
Caractéristiques d'une variable aléatoire
Espérance mathématique d'une variable aléatoire
Définition
Désignons par X une variable aléatoire prenant les valeurs $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}$ ayant les probabilités respectives $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \dots, \mathbf{p_n}$.
On appelle espérance mathématique de X le nombre réel noté E(X) tel que :
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i}\mathbf{p_i}$.

Variance et écart type d'une variable aléatoire
Définition
Désignons par X une variable aléatoire prenant les valeurs $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}$ ayant les probabilités respectives $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \dots, \mathbf{p_n}$.

- On appelle variance de X le nombre réel noté V(X) tel que :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x_i} - \mathbf{E(X)})^2 \mathbf{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i}\mathbf{x_i}^2 - [\mathbf{E(X)}]^2.$$

– On appelle écart type de X le nombre réel noté $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})$tel que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})=\sqrt{\mathbf{V}(\mathbf{X})}$.

Propriété
X étant une variable aléatoire, V(X)= $\mathrm{E}(\mathbf{X}^2)-[\mathbf{E}(\mathbf{X})]^2$.
Cette propriété est connue sous le nom de « Formule de König ».

Caractéristiques d'une loi binomiale
Définition
Considérons un schéma de Bernoulli à n épreuves où pour chaque épreuve, la probabilité de succès est p (celle de l'échec 1 – p).
On lui associe la variable aléatoire notée X désignant le nombre de succès.
L'univers image de X est $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{0};\mathbf{1};\mathbf{2};\dots;\mathbf{n}\}$.
L'application $k \longmapsto \mathbf{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}$ de $\{\mathbf{0};\mathbf{1};\mathbf{2};\dots;\mathbf{n}\}$ vers $[\mathbf{0};\mathbf{1}]$ est appelée loi binomiale de paramètres n et p.
Propriété
X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p, on a : E(X) = np ; V(X) = np(1 – p) et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})=\sqrt{\mathbf{V}(\mathbf{X})}=\sqrt{\mathbf{np(1-p)}}$.

Leçons de la compétence de base 3 du deuxième trimestre

Leçon : Transformations du plan et applications affines

SEQUENCE 41

Composition des isométries par deux symétries d'axes parallèles

Objectifs

Composer une isométrie par deux symétries d'axes parallèles

Composition de deux symétries d'axes parallèles

Activité1
(Δ) et (Δ') sont deux droites parallèles. Construire deux points M_1 et M' tels que
$M_1=S_\Delta(M)$ et
$M'=S_{\Delta'}(M_1)$. O et O' sont deux points respectifs de (Δ) et (Δ') tels que la distance de (Δ) à (Δ') soit égale à OO'. Comparer $\overrightarrow{\mathbf{MM'}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{OO'}}$
Par quelle transformation est-on passé de M à M' ?

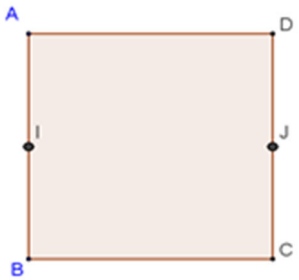
Remarques

- $S_\Delta 0 S_\Delta$=Id

- $S_{\Delta'}$ 0 S_{Δ} et S_{Δ}0 $S_{\Delta'}$ sont réciproques

Toute translation peut donc s'écrire d'une infinité de façons comme composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.

Exemple



Déterminons $S_{(DC)}$ o $S_{(AB)}$ puis $S_{(BC)}$ o $S_{(IJ)}$

SEQUENCE 42

Composition des isométries par deux symétries d'axes sécants

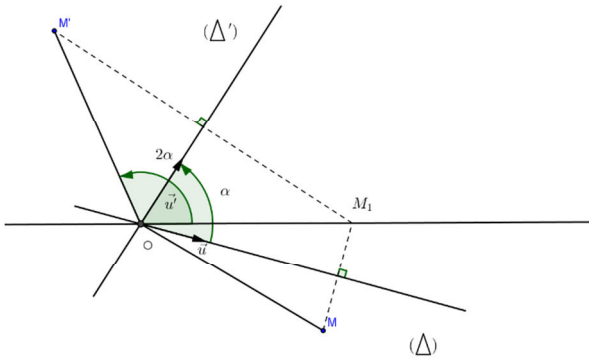
Objectif

Composer une isométrie par deux symétries d'axes sécants

Composition de deux symétries d'axes sécants

Propriété

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O de vecteur directeur respectif $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{u'}}$. La composée $S_{\Delta'}$O S_{Δ} des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u'}})$



Exemple

Dans l'exemple précédent, déterminons $S_{(AC)}$ o $S_{(AB)}$, $S_{(DC)}$ o $S_{(AC)}$ et $S_{(BD)}$ o $S_{(AC)}$

SEQUENCE 43

Décomposition de translation et de rotation

Objectifs

Décomposer une translation et une rotation ;

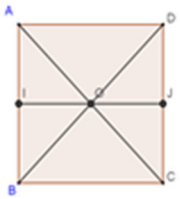
Définir une symétrie glissée.

Décomposition de translation et de rotation

Propriétés

- Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ non nul. Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\vec{\mathbf{u}}$, il existe une droite et une seule (Δ') telle que $S_{\Delta'} O\, S_{\Delta} = t_{\vec{u}}$
- Soit $r_{(O,\boldsymbol{\alpha})}$ une rotation de centre O et d'angle $\boldsymbol{\alpha}$. Pour toute droite (Δ) passant par O, il existe une droite et une seule (Δ') telle que $S_{\Delta'} O\, S_{\Delta} = r_{(O,\boldsymbol{\alpha})}$

Exemple



Complétons : $t_{\overrightarrow{AB}} = S(\ )\, o\, S(\ ) = S(\ )\, o\, S(\ )$? $r_{(B,\frac{\pi}{2})} = S(\ )\, o\, S(\ ) = S(\ )\, o\, S(\ )$?

$r_{(B,-\frac{\pi}{2})} = S(\ )\, o\, S(\ ) = S(\ )\, o\, S(\ )$?

SEQUENCE 44

Composition de rotations et de translations

Objectif

Composer la rotation et la translation

Composition de rotations

Propriété

Soit r et r' deux rotations d'angles respectifs α et α' :

- Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}' \neq \widehat{0}$ alors r'o r est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$
- $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}' = \widehat{0}$ alors r'o r est une translation

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et B' milieu de [**AC**]

Déterminons $r(C, \frac{\pi}{3})$ o $r(C, -\frac{\pi}{3})$; $r(B, \frac{2\pi}{3})$ o $r(C, \frac{2\pi}{3})$ et $r(A, \frac{2\pi}{3})$ o $r(B, \frac{\pi}{3})$.

Composition d'une rotation et d'une translation

Propriété

Soit r une rotation d'angle $\boldsymbol{\alpha}$ non nul et t une translation. t o r est une rotation d'angle $\boldsymbol{\alpha}$.

Remarque

r o t est aussi une rotation d'angle $\boldsymbol{\alpha}$ mais en général t o r $\neq$ r o t

SEQUENCE 45

Symétrie glissée

Objectif

Définir la symétrie glissée.

Composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation

Définition

Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{\mathbf{u}}$. On appelle symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ la composée de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{\mathbf{u}}$

Propriété

Soit (Δ) une droite et $\vec{\mathbf{u}}$ un vecteur non nul :

- si $\vec{\mathbf{u}}$ est normal à (Δ), alors $t_{\vec{u}}$ os_{Δ} est une symétrie orthogonale

- si $\vec{\mathbf{u}}$ n'est pas normal à (Δ), alors $t_{\vec{u}}$ os_{Δ} est une symétrie glissée

Propriété

Toute isométrie est une translation, une rotation, une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.

SEQUENCE 46

Classification des isométries

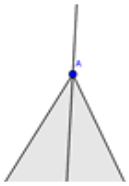
Objectif

Classer les isométries

Utilisation des points invariants

Remarques

1. Soit $\boldsymbol{f}$ une isométrie qui laisse invariant un point A alors que si M' est l'image de M par $\boldsymbol{f}$ alors $\boldsymbol{AM} = \boldsymbol{AM'}$ donc A est sur la médiatrice du segment [MM'].



2. Si $\boldsymbol{f}$ est une isométrie qui laisse invariants deux points distincts A et B, alors tout point de la droite (AB) est invariant car en effet, si M' est l'image de M par $\boldsymbol{f}$, AN=AN' et BN=BN' signifie que N' est sur le cercle de centre A et de rayon AN mais aussi sur le cercle de centre B et de rayon BN

NB : Si N est sur (AB), ces deux cercles n'ont que le point N en commun (ils sont tangents en N) donc N=N' et N est invariant.

Isométrie laissant invariant au moins trois points
Propriété

Une isométrie qui laisse invariant au moins trois points est l'application identique

Démonstration
Soit f une isométrie laissant invariant au moins trois points non alignés A, B et C.
On a f(A)=A, f(B)=B et f(C)=C
Supposons qu'il existe un point M distinct de son image M'.
Les points A, B et C appartiennent tous à la médiatrice du segment [**MM'**] ce qui est impossible car ces points ne sont pas alignés.
Ainsi tout point est invariant et f est l'application identique du plan.

SEQUENCE 47

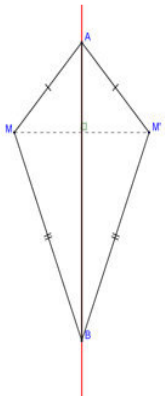
Classification des isométries

Objectif

Classer les isométries

Utilisation des points invariants
Isométrie laissant invariant deux points
Propriété
Une isométrie qui laisse invariant deux points distincts A et B et qui n'est pas l'application identique est la symétrie d'axe (AB).
Démonstration

f est une isométrie laissant invariant deux points distincts A et B et f n'est pas l'identité.
Tout point de la droite (AB) est invariant par f
Soit M un point n'appartenant pas à la droite (AB),si M est invariant alors f admet trois points invariant et f serait l'application identique
Ainsi tout point M n'appartenant pas à (AB) est distinct de son image M' et d'après les remarques 1 et 2 de II.1,(AB) est la médiatrice du segment [**MM'**] et f est la symétrie d'axe (AB).



SEQUENCE 48

Classification des isométries

Objectifs

Classer les isométries (Utilisation des points invariants)

- **Définir un déplacement et un antidéplacement**

Isométrie laissant invariant 1 point
Propriété
Toute isométrie du plan qui laisse invariant un point A est une rotation de centre A
Démonstration.

Soit f une isométrie qui laisse invariant un seul point A.

Choisissons un point B distinct de A tel que f(B)=B'

Nous venons de remarquer que A se trouve sur la droite (D) médiatrice du segment[**BB'**].

Désignons par s la symétrie d'axe (D) et notons g l'isométrie sof

On a g(A)=s[**f**(**A**)]=s(A)=A car A est sur la droite (D)

et g(B)=s[**f**(**B**)]=s(B')=B donc g est soit l'identité, soit la symétrie d'axe (AB)

Par ailleurs si sof = g alors s^{-1}osof = s^{-1}og soit f = sog car s^{-1}=s

- Si g est l'application identique f=s impossible car s a une infinité de points invariants alors que f n'en a que un.
- g est donc la symétrie d'axe (AB) car (AB) et (D) sont sécantes en A et la composée de deux symétries orthogonales d'axe sécants est une rotation.

Déplacement, antidéplacement
Définition
Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés.
Un antidéplacement est une isométrie qui transforme l'angle orienté en son opposé.
Exemple
La rotation et la translation sont des déplacements
La symétrie orthogonale et la symétrie glissée sont des antidéplacements

SEQUENCE 49

Propriétés des isométries

Objectif

Utiliser les propriétés de conservation des applications affines pour démontrer un alignement de points, un parallélisme, …dans la résolution de problèmes de construction et de lieux géométriques des applications.

Propriétés des isométries
Image d'un cercle
L'image d'un cercle de centre O par une isométrie f, est le cercle de même rayon et de centre f(O).

En effet l'ensemble des points M du plan tel que OM = r est le cercle de centre O et de rayon l'image de ce cercle par f sera le cercle de centre f(O) et de rayon f(r) avec f(r)=r car f est une isométrie.

Isométrie et produit scalaire
Théorème

Une isométrie conserve le produit scalaire, ce qui signifie que :

pour tous points A, B, C d'images respectives A', B' et C', on a

$\overrightarrow{\mathbf{A'B'}}.\ \overrightarrow{\mathbf{A'C'}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}.\ \overrightarrow{\mathbf{AC}}$

Démonstration

f est une isométrie transformant les points A, B, C en A', B' et C'.

Puisque $\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}} - \overrightarrow{\mathbf{AB}}$, on a : $BC^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{\mathbf{AB}} . \overrightarrow{\mathbf{AC}} + AB^2$

De même, $B'C'^2 = A'C'^2 - 2\overrightarrow{\mathbf{A'B'}} . \overrightarrow{\mathbf{A'C'}} + A'B'^2$

Puisque BC=B'C', AC=A'C' et AB=A'B' on obtient $\overrightarrow{\mathbf{A'B'}}.\ \overrightarrow{\mathbf{A'C'}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}.\ \overrightarrow{\mathbf{AC}}$

Conséquence : si le repère $(O; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ est orthonormé, son image par une isométrie f est aussi un repère orthonormé .

Si un point M est de coordonnées (x,y) dans $(O; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ son image M' par f a aussi pour coordonnées (x,y) dans le repère $f((O; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}))$.

SEQUENCE 50

Propriétés des isométries

Objectif

Utiliser les propriétés de conservation des applications affines pour démontrer un alignement de points, un parallélisme, …dans la résolution de problèmes de construction et de lieux géométriques des applications.

Propriétés des isométries
Isométrie et barycentre
Théorème
Une isométrie conserve le barycentre
Démonstration
Soit $(A_i, \boldsymbol{\alpha_i})$ un ensemble des points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i} \neq 0$

Les coordonnées de G barycentre du système $(A_i, \boldsymbol{\alpha_i})$ dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\mathbf{OI}}, \overrightarrow{\mathbf{OJ}})$ sont :$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$; $y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$ où (x_i, y_i) sont les coordonnées des points A_i

Notons $(A'_i, \boldsymbol{\alpha_i})$, image de $(A_i, \boldsymbol{\alpha_i})$par f, G' image de G par f et $(O'; \overrightarrow{\mathbf{O'I'}}, \overrightarrow{\mathbf{O'J'}})$ image du repère $(O; \overrightarrow{\mathbf{OI}}, \overrightarrow{\mathbf{OJ}})$ par f.

D'après la conséquence du théorème de conservation du produit scalaire, les coordonnées des points A'_i dans le repère $(O'; \overrightarrow{\mathbf{O'I'}}, \overrightarrow{\mathbf{O'J'}})$ sont (x_i, y_i) et celles de G' sont (x,y) et G' est le barycentre du système $(A'_i, \boldsymbol{\alpha_i})$

Isométrie et droite
Théorème

Une isométrie transforme une droite en une droite.

En effet, une droite étant l'ensemble de barycentre de deux points, et on vient de montrer que l'isométrie conserve le barycentre donc l'image d'une droite est une droite.

Isométrie et équipollence.
Théorème

Une isométrie conserve l'équipollence

En effet si quatre points A, B, C et D sont tels que $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{CD}}$ et posons A', B', C' et D' images respectives de A, B, C et D par l'isométrie f .

Si I est le milieu des diagonales du parallélogramme ABDC, alors son image I' par f est aussi milieu des diagonales du parallélogramme A'B'D'C' et que $\overrightarrow{\mathbf{A'B'}} = \overrightarrow{\mathbf{C'D'}}$

SEQUENCE 51

Propriétés des isométries

Objectif

Utiliser les propriétés de conservation des applications affines pour démontrer un alignement de points, un parallélisme, …dans la résolution de problèmes de construction et de lieux géométriques des applications.

Isométrie et parallélisme
Théorème
Une isométrie conserve le parallélisme.

En effet, puisqu'une isométrie transforme une droite en une droite et qu'elle conserve l'équipollence, elle conserve le parallélisme

Isométrie et orthogonalité
Théorème

Une isométrie conserve l'orthogonalité.

En effet, puisqu'une isométrie transforme une droite en une droite et qu'elle conserve le produit scalaire, elle conserve l'orthogonalité.

Isométrie et aire
Théorème

On admet qu'une isométrie conserve l'aire.

SEQUENCE 52

Expression analytique d'une isométrie

Objectif

Déterminer l'expression analytique d'une isométrie

Introduction
Nous avons établi dans des classes antérieures l'expression analytique de certaines transformations du plan comme la translation, l'homothétie, la symétrie centrale…
Nous nous intéressons ici à deux isométries à savoir rotation et symétrie orthogonale.
Expression analytique d'une rotation
Exemple
Le plan est muni du repère orthogonalité $(O; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$

Soit f une rotation de centre A (1,-1) et d'angle $\frac{\pi}{3}$, déterminons une expression analytique de f. Nous allons utiliser la forme complexe de f

Posons M(x,y) et son image M'(x',y') par f. Si M est l'image du complexe z=x+iy et M' celle du complexe z'=x'+iy' et $\boldsymbol{\omega}$ le complexe affixe de A.

On a $z' - \boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}^{i\frac{\pi}{3}}(z - \boldsymbol{\omega})$

En utilisant les formes algébriques on a :

$x'+iy'-(1-i) = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(x+iy-(1-i)) \Leftrightarrow x'+iy'-1+i = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}iy - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + i\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x'} = \frac{1}{2}\mathbf{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\ \mathbf{y'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{1} \end{cases}$$

Remarques

- Etant donnée une rotation d'angle $\boldsymbol{\theta}$, son expression analytique est de la forme

$\begin{cases} \mathbf{x'} = \mathbf{x}\cos\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}\sin\boldsymbol{\theta} + \mathbf{a} \\ \mathbf{y'} = \mathbf{x}\sin\boldsymbol{\theta} + \mathbf{y}\cos\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b} \end{cases}$ Où a et b sont des réels à déterminer en utilisant le fait que le centre de la rotation soit invariant.

- Lorsque le complexe affixe du centre de la rotation a un module $\boldsymbol{\rho}$, il faut le prendre en compte dans l'expression analytique.

SEQUENCE 53

Expression analytique d'une isométrie

Objectif

Déterminer l'expression analytique d'une isométrie

Expression analytique d'une symétrie orthogonale
Exemple
Soit (D) la droite d'équation x-y-1=0
Déterminons l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe (D)
Notons s cette symétrie .Si M'(x',y') est l'image de M(x,y) par s alors $\overrightarrow{\mathbf{MM'}} \perp \vec{\mathbf{u}}$, où $\vec{\mathbf{u}}$ est un vecteur directeur de (D)et K milieu de [**MM'**] appartient à (D).

$M' = s(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{MM'}}.\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K} \epsilon (\mathbf{D}) \end{cases}$

$\overrightarrow{\mathbf{MM'}}(x'-x, y'-y)$ $K(\frac{x+x'}{2} ; \frac{y+y'}{2})$ et $\vec{\mathbf{u}}(1,1)$

$M' = s(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x'} - \mathbf{x} + \mathbf{y'} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \frac{x+x'}{2} - \frac{y+y'}{2} - \mathbf{1} = \mathbf{0} \end{cases}$ et on a $\begin{cases} \mathbf{x'} = \mathbf{y} + \mathbf{1} \\ \mathbf{y'} = \mathbf{x} - \mathbf{1} \end{cases}$

Remarque : en prenant $\vec{\mathbf{n}}$ comme vecteur normal à (D) on écrit :

Si M'(x', y') est l'image de M(x, y) par s alors $\overrightarrow{\mathbf{MM'}}$**est** colinéaire à $\vec{\mathbf{n}}$ et K milieu de [**MM'**] appartient à (D).

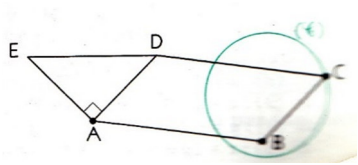
$M' = s(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{det}(\overrightarrow{\mathbf{MM'}}; \vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{K} \epsilon (\mathbf{D}) \end{cases}$

SEQUENCE 54

Utilisation des isométries

Objectif

Utiliser les isométries pour déterminer des lieux géométriques et pour démontrer
Recherche de lieu géométrique
Exemple
ABCD est un parallélogramme dont les points A et B sont fixes. C décrit un cercle $(\mathcal{C})$. On construit le triangle rectangle isocèle ADE de sommet A.



Désignons par t la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$ et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer le lieu des points E.

L'image de C par t est D et l'image de D par r est E donc l'image de C par rot est E donc l'image du cercle $(\mathcal{C})$ passant par rot est le cercle $(\mathcal{C}')$ de même rayon que $(\mathcal{C})$ passant par E car rot est une rotation .

Le lieu de E est $(\mathcal{C}')$.

SEQUENCE 55

Applications affines

Objectif

Définir une application linéaire et une application affine

Application linéaire

Définition
Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan (P) et $\boldsymbol{\varphi}$ une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$. $\boldsymbol{\varphi}$ est dite application linéaire lorsque : $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2$, $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = \boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{v}})$ et $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^*$
$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{k}\vec{\mathbf{u}}) = \mathrm{k}\, \boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{u}})$

Remarque
Les deux propriétés peuvent se résumer en une seule :
$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{V}^2, \forall\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^2\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}\vec{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\beta}\vec{\mathbf{v}}) = \boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{v}})$
Application affine
Propriétés
Une application affine f est bijective lorsque l'image d'un repère par f est un repère c'est-à-dire que les images de trois points non alignés sont trois points non alignés.

Définition
Une application affine bijective est appelée transformation affine.
Une application affine involutive est bijective.

Application linéaire associée à une application affine
Définition

Soit f une application affine. L'application linéaire $\boldsymbol{\varphi}$ qui, à tout vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ de représentant

(M, N) associe le vecteur $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{u}})$=f$\overrightarrow{\mathbf{(M)f(N)}}$ est appelée application linéaire associée à l'application affine f.

SEQUENCE 56

Détermination d'une application affine

Objectif

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une application affine définie par son expression analytique

Détermination par trois points ainsi que leurs images
Exemple
Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$. On donne A (3 ; 2), B (1 ; 1) et C (0 ; 1).
Soit A' (6 ; 6), B' (3 ; 3) et C' (2 ; 1) les images respectives de A B et C par l'application affine f.
Déterminons analytiquement cette application f
Soit M(x ; y) et M'(x' ; Y') image de M par f. Désignons par $\boldsymbol{\varphi}$ l'application linéaire associée à f.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{\mathbf{AB}}) = \overrightarrow{\mathbf{A'B'}} \\ \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{\mathbf{AC}}) = \overrightarrow{\mathbf{A'C'}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{i}}) - \boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{j}}) = -3\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}} \\ -3\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{i}}) - \boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{j}}) = -4\vec{\mathbf{i}} - 5\vec{\mathbf{j}} \end{cases}$$

On en déduit $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{i}}) = \vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}}$ et $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{j}}) = \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}$

Par ailleurs $\boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{\mathbf{AM}}) = \overrightarrow{\mathbf{A'M'}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}[(\mathbf{x}-3)\vec{\mathbf{i}} + (\mathbf{y}-2)\vec{\mathbf{j}}]$= (x'-6) $\vec{\mathbf{i}} + (\mathbf{y}' - 6)\vec{\mathbf{j}}$

Comme **$\boldsymbol{\varphi}$ est linéaire et en remplaçant $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{i}})$ et $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{j}})$** par leurs expressions on a :

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y} + 1 \\ \mathbf{y}' = 2\mathbf{x} - \mathbf{y} + 2 \end{cases}$$

Définition

Une application est dite affine si son expression analytique est de la forme

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{a'x} + \boldsymbol{b'y} + \boldsymbol{c'} \end{cases}$$ *a, b, c, a', b' et c' sont des réels.*

Détermination par une application linéaire associée et un couple de points

Exemple

Soit $\boldsymbol{\varphi}$ une application linéaire associée à une application affine f telle que : pour tout vecteur $\vec{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{2}\vec{\mathbf{u}}$. Soit K (1 ; 2) et K' (3 ;-1) son image par f. Déterminons l'expression analytique de f

Soit M(x ; y) un point et M'(x ' ; y') son image par f.

$\overrightarrow{\mathbf{K'M'}} = \mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{KM}}$

En remplaçant ces vecteurs par leurs coordonnées, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{x'} = \mathbf{2x} + \mathbf{1} \\ \mathbf{y'} = \mathbf{2y} - \mathbf{5} \end{cases}$$

SEQUENCE 57

Affinité du plan

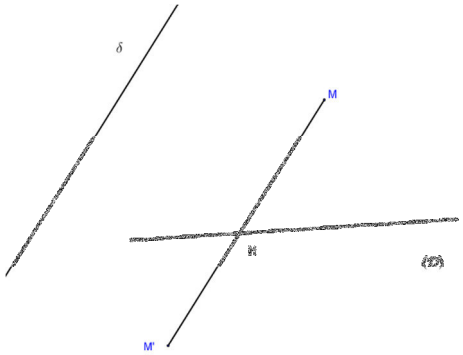
Objectif

Définir une affinité et déterminer son expression analytique.

Définition

Soit (D) une droite, $\boldsymbol{\delta}$ une direction de droite distincte de celle de (D) et k un réel.

On appelle affinité d'axe (D), de direction $\boldsymbol{\delta}$ et de rapport k l'application qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{\mathbf{HM'}} = \mathbf{k}\,\overrightarrow{\mathbf{HM}}$ où H est le projeté de M sur (D) suivant la direction de $\boldsymbol{\delta}$.



Remarques

Si la direction de (D) est orthogonale à celle de $\boldsymbol{\delta}$ l'affinité est dite orthogonale.

Si k = 0, $\overrightarrow{\mathbf{HM'}} = \vec{\mathbf{O}}$ et M'= H l'affinité est donc la projection sur (D) suivant la direction de $\boldsymbol{\delta}$

Si de plus la direction de $\boldsymbol{\delta}$ est orthogonale à celle de (D), la projection est dite orthogonale.

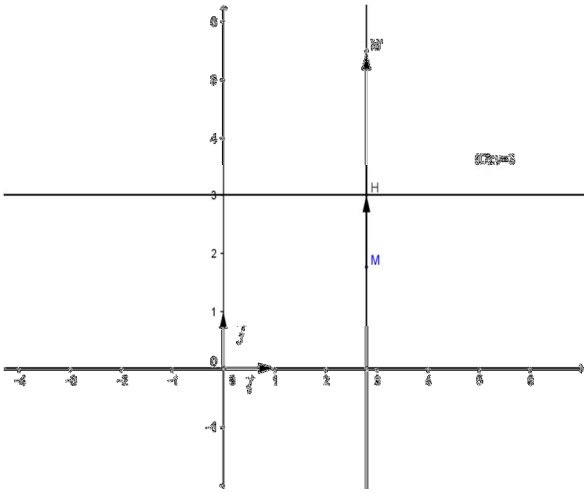
Si k =1, $\overrightarrow{\mathbf{HM'}} = \overrightarrow{\mathbf{HM}}$ et M = M'. L'affinité est donc l'application identique.

Si k = − 1 et si la direction de $\boldsymbol{\delta}$ est orthogonale à celle de (D), $\overrightarrow{\mathbf{HM'}} = -\overrightarrow{\mathbf{HM}}$, l'affinité est la symétrie orthogonale d'axe (D).

Exemple

Le plan est muni du repère orthonormé (O, $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$).

Déterminons l'expression analytique de l'affinité d'axe la droite d'équation y=3, de direction $\vec{\mathbf{j}}$ et de rapport -2.



Soit M′ $\binom{x'}{y'}$ image de M$\binom{x}{y}$ par l'affinité.

On doit avoir $\overrightarrow{\mathbf{HM'}} = -2\,\overrightarrow{\mathbf{HM}}$

H$\binom{x}{3}$ $\overrightarrow{\mathbf{HM'}}\binom{x'-x}{y'-3}$ et $\overrightarrow{\mathbf{HM}}\binom{0}{y-3}$

$$\overrightarrow{\mathbf{HM'}} = -2\,\overrightarrow{\mathbf{HM}} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' - 3 = -2(y-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -2y + 9 \end{cases}$$

Remarque

L'affinité est une application affine.

SEQUENCE 58

Leçon : coniques

Objectif

Définir analytiquement une conique

Définition analytique d'une conique

Etant donné un repère orthonormé, on appelle conique toute courbe plane qui peut être représentée par une équation cartésienne de la forme :

$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0}$ avec (A, B) $\neq$(0,0), C, D et E des réels quelconques.

Définitions par foyer, directrice et excentricité

(D) une droite, F un point n'appartenant pas à (D) et e un réel strictement positif.

L'ensemble des points M du plan tel que $\frac{\mathbf{MF}}{\mathbf{MH}} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D) et e$\in \mathbb{R}_*^+$ est une conique. F s'appelle le foyer, (D) s'appelle la directrice et e s'appelle l'excentricité de la conique.

La conique de directrice (D) de foyer F et d'excentricité e est appelée :

- parabole lorsque e = 1;
- ellipse lorsque 0<e <1;
- hyperbole lorsque e >1.

L'axe focal d'une conique est la droite passant par le foyer F et perpendiculaire à la directrice (D).
Propriétés de l'axe focal et du sommet d'une conique
L'axe focal d'une conique est un axe de symétrie de la conique.

Théorème
Soit (Γ) une conique d'excentricité e.

- Si e≠1, c'est-à-dire si la conique est une ellipse ou une hyperbole, l'axe focal rencontre la conique en deux points distincts ; ces points sont appelés les sommets de l'ellipse ou de l'hyperbole.
- Si e=1, c'est-à-dire si la conique est une parabole, l'axe focal rencontre la conique en un point ; ce point est appelé le sommet de la parabole.

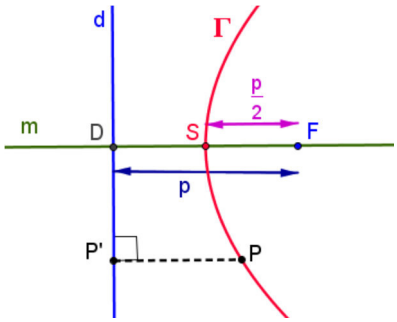
SEQUENCE 59

Equation réduite d'une conique

Objectif

Déterminer l'équation réduite d'une parabole (e = 1)
Equation réduite d'une parabole (e = 1)
Théorème
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'ensemble des points dont les coordonnées (x,y) sont telles que $\boldsymbol{x^2 = 2py}$ (avec $\boldsymbol{p} \neq 0$), est une parabole dont le foyer F est le point de coordonnées $(0\,;\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}})$ et la directrice, la droite d'équation $y = -\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}$
Le réel $|\mathbf{p}|$, distance du foyer à la directrice, est appelé le paramètre de la parabole.

Remarque
Un échange des axes de repère $(S, \vec{\jmath})$ en $(S, \vec{\imath})$ conduit à une équation réduite de la forme $y^2 = 2px$.
Dans ce cas, l'axe focal est la droite de repère $(S, \vec{\imath})$, le foyer est de coordonnées $(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\,;0)$,
$H(\frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\,;\mathbf{y})$ et la directrice est d'équation $\boldsymbol{x} = \frac{-\mathbf{p}}{\mathbf{2}}$.



SEQUENCE 60

Equation réduite d'une ellipse et d'une hyperbole

Objectif

Déterminer l'équation réduite d'une ellipse et d'une hyperbole
Définition (conique à centre)
Soit (Γ) une conique donnée.
L'équation précédente montre que si :

$M(x,y) \in (\Gamma) \Longrightarrow M'(-x;y) \in (\Gamma) \Longrightarrow M''(-x;-y) \in (\Gamma)$

Les ellipses et les hyperboles admettent donc, en plus de l'axe focal, un deuxième axe de symétrie : la médiatrice de $[S_1S_2]$; elles admettent aussi, le milieu O de $[S_1S_2]$ comme centre de symétrie. On dit que les ellipses et les hyperboles sont des coniques à centre.

Equation réduite de l'ellipse et de l'hyperbole.

Nous venons de voir que l'équation réduite de l'ellipse ou de l'hyperbole est

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$ avec $OS_1=a$, $OF=c$ et $c=ea$

Ellipse $(0<e<1)$

Comme $c=ea$, nous avons $c<a$; le foyer F appartient à $[S_1S_2]$.

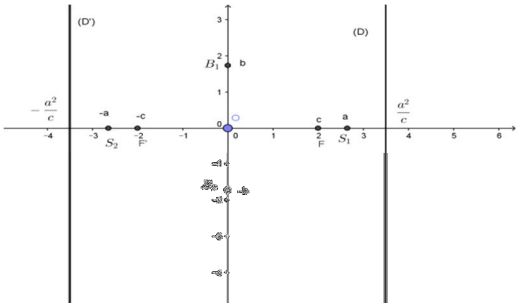
En posant $b=\sqrt{a^2-c^2}$, l'équation de l'ellipse dans un repère donné est:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Les points B(0,b) et B'(0; −b) sont les points de l'ellipse.

(BB') est appelée petit axe de l'ellipse.

(S_1,S_2) est appellee grand axe de l'ellipse avec $S_1(-a;0)$ et $S_2(a;0)$.



Hyperbole $(e>1)$

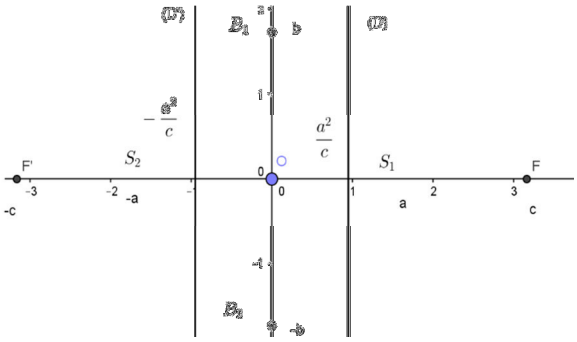
Comme $e=\frac{c}{a}$, nous avons $c>a$

Le foyer F est donc extérieur au segment$[S_1S_2]$ et $a^2-c^2<0$.

En posant $b=\sqrt{a^2-c^2}$, l'équation de l'hyperbole dans un repère donné est:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

L'hyperbole ne possède pas de point situé sur la médiatrice de$[S_1S_2]$.



Théorème

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé, a et b sont deux réels strictement positifs avec $a \neq b$

- *L'ensemble des points M(x, y) tels que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est une ellipse.*
- *L'ensemble des points M(x, y) tels que $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ est une hyperbole.*

SEQUENCE 61

Représentation graphique des coniques

Objectif

Représenter graphiquement une parabole et une éllipse

Représentation graphique d'une parabole

(D) :$\boldsymbol{x = -P/2}$

Parabole d'équation $\boldsymbol{y^2 = 2px}$ avec $\boldsymbol{p > 0}$

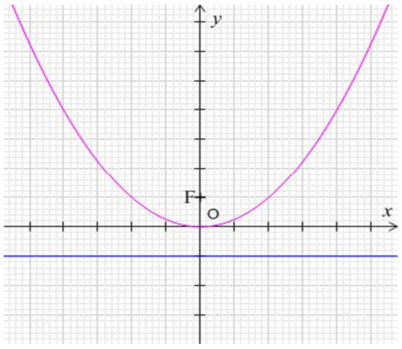
F(P/2;0)

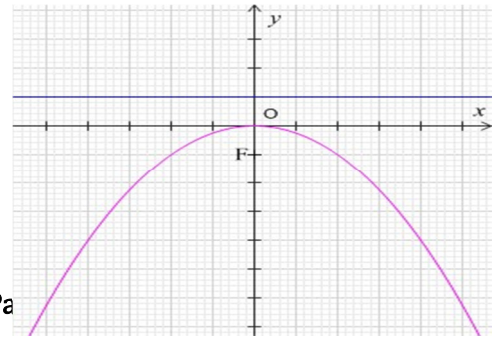
Paraboles d'axe *(Oy)*

(D):$\boldsymbol{x = -P/2}$

Parabole d'équation $\boldsymbol{y^2 = 2px}$ avec $\boldsymbol{p < 0}$

F(P/2;0)





Pa

Parabole d'équation x^2=2py avec p >0

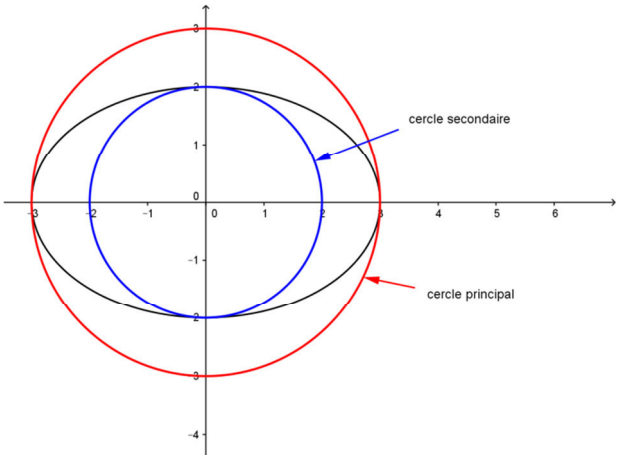
F (0 ; *p*/2) et directrice (D) : *y*=−*p*/2.

F (0 ; p/2) et directrice (D) : *y*=−*p*/2.

Représentation graphique d'une ellipse

Définitions

- *Dans le premier cas où le demi grand axe est a et le demi petit axe est b, le cercle de centre O et de rayon a est appelé cercle principal et celui de centre O et de rayon b est appelé cercle secondaire.*
- *Dans le second cas où le demi grand axe est b et le demi petit axe est a, le cercle de centre O et de rayon b est appelé cercle principal et celui de centre O et de rayon a est appelé cercle secondaire.*



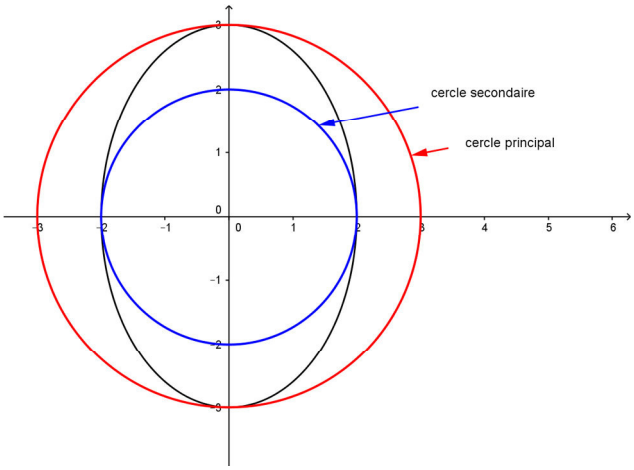
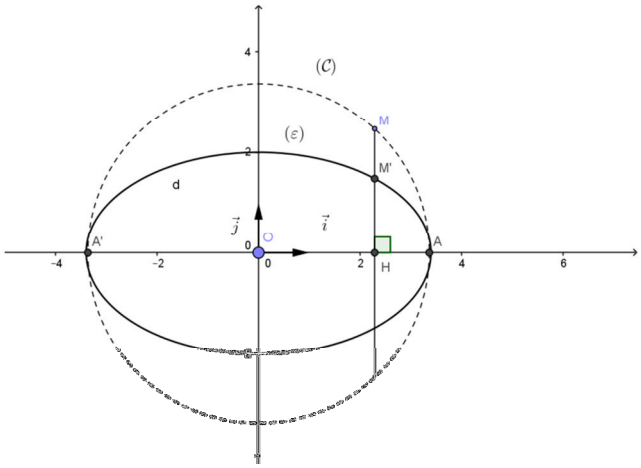


Image d'un cercle par une affinité orthogonale

Théorème

L'image d'un cercle par une affinité orthogonale dont l'axe est un diamètre est une ellipse.

Si $(\mathcal{C})$ *est le cercle de centre O et de rayon r et si l'affinité est de rapport k alors cette ellipse est d'équation* $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{k^2r^2}=1$



$(\mathcal{E})$ est l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport donné.

Le cercle $(\mathcal{C})$ s'appelle cercle principal.

SEQUENCE 62

Représentation graphique d'une hyperbole

Objectif

Représenter graphiquement une hyperbole

Hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Axe focal *(Ox)*

Hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Axe focal *(Oy),*

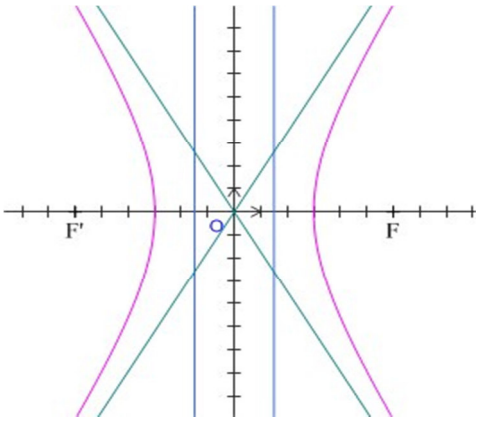
asymptotes $\boldsymbol{y} = \pm\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}$,

$\boldsymbol{c} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$,

foyers F(c,0) et F'$(-\boldsymbol{c}; \boldsymbol{0})$,

directrices : $\boldsymbol{x} = \pm\frac{\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{c}}$,

excentricité : $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$.



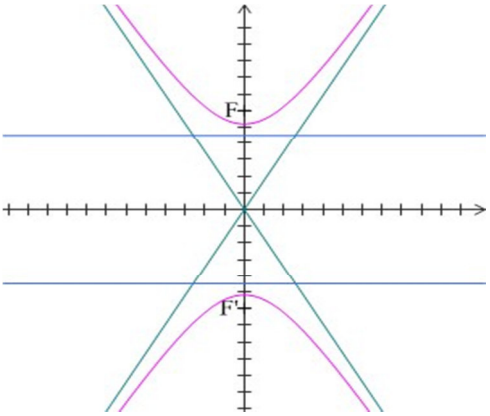
asymptotes $\boldsymbol{y} = \pm\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}$,

$\boldsymbol{c} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$,

foyers F(0, c) et F'$(\boldsymbol{0}; -\boldsymbol{c})$,

directrices : $\boldsymbol{y} = \pm\frac{\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{c}}$

excentricité : $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$.



Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

Théorème

Si $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs des deux asymptotes d'une hyperbole $(\mathcal{H})$, l'équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(O,\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}})$ est $\boldsymbol{XY} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$.

S'il existe des vecteurs $\vec{\boldsymbol{I}}$ et $\vec{\boldsymbol{J}}$ colinéaires respectivement aux vecteurs $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$ ($\vec{\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{\beta}\vec{\boldsymbol{v}}$) alors l'équation de $(\mathcal{H})$ est $\boldsymbol{XY} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4\alpha\beta}}$.

Régionnement d'un plan par une conique

Propriété

Soit $(\boldsymbol{\Gamma})$ *une conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.*

Pour tout point M du plan dont le projeté orthogonal sur (D) est H, on a :

M est extérieur à $(\boldsymbol{\Gamma})$ *si MF<* $\boldsymbol{eMH}$.

M est intérieur à () *si MF>* $\boldsymbol{eMH}$.

SEQUENCE 63

Equations **de la tangente en un point $\mathbf{M_0(x_0, y_0)}$ d'une conique**

Objectif

Déterminer l'équation de la tangente en un point $\mathbf{M_0(x_0, y_0)}$ d'une conique

Equations de la tangente en un point $\mathbf{M_0(x_0, y_0)}$ de la parabole

Théorèmes

- *Pour une parabole d'équation : $y^2 = 2px$, une équation de la tangente en $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ est $\boldsymbol{yy_0 = p(x + x_0)}$*
- *Pour une parabole d'équation $\boldsymbol{x^2 = 2py}$, une équation de la tangente en $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ est $\boldsymbol{x_0 = p(y + y_0)}$.*

Equations de la tangente en un point $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ de l'ellipse

Propriété

Soit ($\mathcal{E}$) une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et (T) la tangente en un point $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ de ($\mathcal{E}$)

(T) est d'équation $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

Equations de la tangente en un point $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ de l'hyperbole.

Propriété

Soit ($\mathcal{H}$) une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ et (T) la tangente en un point $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ de ($\mathcal{H}$).

(T) est d'équation $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

SEQUENCE 64

Représentation paramétrique d'une conique

Objectif

Donner une représentation paramétrique d'une conique

Paramétrage d'une parabole

Théorème

Un paramétrage d'une parabole d'équation $\boldsymbol{y^2 = 2px}$ est : $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Remarque

Un paramétrage d'une parabole d'équation $\boldsymbol{x^2 = 2py}$ est : $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Paramétrage d'un cercle

- *On rappelle qu'un paramétrage d'un cercle de centre O et de rayon r est :*
  $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in [-\pi; \pi[)$
- *Un paramétrage d'un cercle de centre* $\Omega(x_0; y_0)$ *et de rayon r est :*
  $\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in [-\pi; \pi[)$.

Paramétrage d'une ellipse

Théorème

- *Un paramétrage d'une ellipse de centre O et d'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *est :*
  $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in [-\pi; \pi[)$.
- *Un paramétrage d'une ellipse de centre* $\Omega(x_0; y_0)$ *donc d'équation* $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ *est :* $\begin{cases} x = x_0 + a\cos\theta \\ y = y_0 + b\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in [-\pi; \pi[)$.

Paramétrage d'une hyperbole.

Théorème

Un paramétrage d'une hyperbole de centre O et d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *est :*

$$\begin{cases} x = a(t+\frac{1}{4t}) \\ y = b(t-\frac{1}{4t}) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}^*)$$

SEQUENCE 65

Définition bifocale des ellipses et des hyperboles

Objectif

Donner une définition bifocale d'une ellipse et d'une conique

Théorème 1

Soit (ε) *une ellipse de foyers F et F', de grand axe* $[AA']$ *de centre O. Si on note a=OA, alors pour tout point M de l'ellipse, MF+MF'=2a*

Réciproquement, étant donné deux points F et F' tels que FF'=2c et un réel a tel que a>c.

L'ensemble des points M du plan tels que MF+MF'=2a est l'ellipse de foyers F et F' et dont la longueur du grand axe est égale à 2a.

Théorème 2

Soit $(\mathcal{H})$ *une hyperbole de sommets A et A', de centre O. Si on note a=OA, alors*

pour tout point M de l'hyperbole, $|\boldsymbol{MF} - \boldsymbol{MF'}| = 2a$

Réciproquement, étant donné deux points F et F' tels que FF'=2c et un réel a tel que

$0 < \boldsymbol{a} < c.$

L'ensemble des points M du plan tels que $|\boldsymbol{MF} - \boldsymbol{MF'}| = 2a$

est l'hyperbole de foyers F et F' et dont la distance entre les sommets est égale à 2a.

Exercice d'entrainement de la compétence de base 1 du deuxième trimestre

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes:

1) $\boldsymbol{2lnx = \ln(x+4) + ln2x}$
2) $\boldsymbol{e^{x^2} = 4}$ 3) $\boldsymbol{e^{2x} - 4e^x + 3 = 0}$ 4) $\boldsymbol{e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0}$
5) $\boldsymbol{e^x - 10e^{-x} = 3}$ 6) $\boldsymbol{3^{2x+2} + 26.3^x - 3 = 0}$

a) $\boldsymbol{lnx < 1}$; b) $\boldsymbol{\ln x \geq 2}$; c) $\boldsymbol{-1 \leq lnx \leq 2}$; d) $\boldsymbol{\frac{1}{2} \leq e^x \leq 2}$

$\boldsymbol{e}$) $\boldsymbol{(e^x + 1)(e^x - 4) \leq 0}$; f) $\boldsymbol{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq lnx}$.

Exercice 2

Trouver l'entier naturel $\boldsymbol{n}$ tel que :

a) $\boldsymbol{2^n \leq 100}$ b) $\boldsymbol{\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}}$ c) $\boldsymbol{0,2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n}$ d) $\boldsymbol{\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2}$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\boldsymbol{x^2 - 3x - 10 = 0}$.

En déduire la résolution des équations suivantes :

a) $\boldsymbol{9^x - 3^{x+1} - 10 = 0}$.
b) $\boldsymbol{4^x - 3x\,2^x - 10 = 0}$.
c) $\boldsymbol{(logx)^2 - 3(logx) - 10 = 0}$

2. Soit le polynôme $\boldsymbol{P(x) = X^3 - X^2 - 4X + 4}$.

a) Calculer $\boldsymbol{P(1)}$ et écrire $\boldsymbol{P(x)}$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

b) Résoudre $\boldsymbol{P(x) = 0}$.

En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de chacuen des équations suivantes :

. $\boldsymbol{(lnx)^3 - (lnx)^2 - 4(lnx) + 4 = 0}$

. $\boldsymbol{e^{3x} - e^{2x} - 4^x + 4 = 0}$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} 3e^x - 4e^y = -6 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} e^x + 2e^y = 1 \\ -3e^x + e^y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3\ln(x+y) - \ln(x+4) = -ln8 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} e^{2x} - 4e^x + 3 > 0 \\ 2e^{2x} - 11e^x + 5 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \ln(3x+4y) - ln7 = \ln(2-5x) + ln5 \\ e^{x-2} \times e^{y+3} = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2lnx + lny = 7 \\ 3lnx - 5lny = 4 \end{cases}$.

Exercice 5

1. Développer l'expression $A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$.

2. Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x^3 + 2) = \ln(2x^2 + x)$

b) $\ln(|x|^3 + 2) = \ln(2x^2 + |x|)$

c) $ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = \ln(x^2 - 2x + 1)$

d) $\ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = 2\ln(1-x)$.

Exercice 6

Déterminer l'ensemble de définition de f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{e^x+2}{e^x-2}$; 2) $f(x) = \frac{5}{e^x-1}$; 3) $f(x) = \frac{3x}{e^x+1}$; 4) $f(x) = \ln(e^x - 2)$

5) $f(x) = \ln(e^x + 3)$; 6) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$;7) $f(x) = \sqrt{e^x - 3}$;

8) $f(x) = x + e^{ln\left(\frac{3}{x^2-4}\right)}$; 9) $f(x) = e^x(e^x - 2)$; 10) $f(x) = e^x + ln|x|$;

11) $f(x) = ln|x+1| - ln|x-1|$.

Exercice 7

Déterminer les limites de la fonction f :

1) $f(x) = x - lnx$ en $+\infty$;

2) $f(x) = x + 1 + \frac{ln}{x}$ en $+\infty$ et en 0 ;

3) $f(x) = \frac{1}{x} + lnx$ en 0 ;

4) $f(x) = x + xln\left(1 + \frac{1}{v}\right)$ en $+\infty$

5) $f(x) = \ln(e^4 + 2)$ en $-\infty$ et ou en $+\infty$

6) $f(x) = ln\left(\frac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$ en 0, $-\infty$ et en $+\infty$

7) $f(x) = xln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ en 0, $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 8

Etudier le signe de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = lnx(lnx + 1)$ **b)** $f(x) = 2lnx(1 - x)$ **c)** $f(x) = x^2 ln(x + 1)$.

Exercice 9

1) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.
   a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier son sens de variation.
   b) Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de $f$et en déduire son signe pour tout $x \in]0, +\infty[$.
   d) Le plan étant rapporté à un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, $(unite: 2cm)$. Tracer la courbe (C_f) représentative de f.
2) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = xln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.
   a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g. Déduire de la partie 1, le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.
   b) Vérifier que $g(x) = h \circ k$, avec h et k les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = \frac{ln(x+1)}{x}$ et $k(x) = \frac{1}{x}$.
   c) En déduire la limite de g en $+\infty$ et en 0.
   d) Dresser le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$.
3) Soit α un nombre réel strictement supérieur à1. On note $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 du domaine « ensemble des points$M$ du plan dont les coordonnées vérifient : $1 \leq x \leq \alpha$ et $0 \leq y \leq f(x)$ ».
   a) Calculer $A(\alpha)$ en fonction deα.
   b) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Exercice 11

1) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par $f(x) = 1 + ln(1 + x)$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(0; \vec{i}; \vec{j})$. On note (D)la droite d'équation$y = x$.
   a) Étudier le sens de variation de la fonction f.
   b) Déterminer les limites de $f$aux bornes de son ensemble de définition
2) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   a) Déterminer$\lim_{x \to -1} g(x)$.
   b) Determiner$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
   c) Étudier le sens de variation de la fonction, puis dresser le tableau de variation de la fonction$g$.
   d) Montrer que sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ d'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions$\alpha et \beta$, avec αnégative et $\beta \in [2; 3]$.
   e) A l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe (C_f) et de la droite (D).

Exercice 11

$\boldsymbol{f(x) = -\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$ et $\boldsymbol{(C_f)}$ sa courbe représentative.

1) a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Justifier que$\boldsymbol{(C_f)}$admet une asymptote verticale à préciser.
2) Étudier les variations de f.
3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x}$ est asymptote oblique à la courbe$\boldsymbol{(C_f)}$.
   b) Étudier la position de $\boldsymbol{(C_f)}$ par rapport à(Δ).
4) Tracer $\boldsymbol{(C_f)}$ et ses asymptotes dans un même repère.
5) Démontrer que F est la primitive de la fonction f définie sur $]\mathbf{1}; +\infty[$ par :

$\boldsymbol{F(x) = -\frac{x^2}{4} + (x-1)\,\mathbf{ln}(x-1) - xlnx + 1}$ Prenant la valeur $\boldsymbol{-2ln2}$ en 2.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par :

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} & si\ x \neq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de $\boldsymbol{f}$. Vérifier si $\boldsymbol{f}$ est continue et dérivable en $\mathbf{0}$.
2) Déterminer les limites aux bornes du $\boldsymbol{D_f}$.
3) Déterminer le sens de variation de $\boldsymbol{f}$. En déduire son tableau de variation.
4) Déterminer les branches infinies si elles existent.
5) Tracer la courbe de $\boldsymbol{f}$ et ses a asymptotes.

Exercice 13

Soit $\boldsymbol{f(x) = x + e^{1-x}}$

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son $\boldsymbol{D_f}$.
2) Montrer que la droite (Δ) d'équation $\boldsymbol{y = x}$ est asymptote à $\boldsymbol{(C_f)}$ en $+\infty$.
3) Étudier la position de $\boldsymbol{(C_f)}$ par rapport à (Δ).
4) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variation.
5) Tracer la droite(Δ), la courbe $\boldsymbol{(C_f)}$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 14

I- $\boldsymbol{\varphi}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{\varphi(x) = e^x + x + 1}$

1) Etudier les variations de $\boldsymbol{\varphi}$ et les limites aux bornes de son domaine de définition.
2) Montrer que l'équation $\boldsymbol{\varphi(x) = 0}$ admet une solution $\boldsymbol{\alpha}$ telle que : $\boldsymbol{-1,28 < \alpha < -1,27}$.

3) En déduire le signe de $\boldsymbol{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$.

II- Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par : $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{xe^x}}{\boldsymbol{e^x+1}}$ et $(\boldsymbol{C_f})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathbf{0};\ \vec{\boldsymbol{\imath}};\ \vec{\boldsymbol{\jmath}})$, unité graphique : 4cm.

1) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x}$ élément de $\boldsymbol{D_f}$, $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{e^x\varphi(x)}}{\boldsymbol{(e^x+1)^2}}$.
2) Montrer que $\boldsymbol{f(\alpha)} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{1}$ et encadrer $\boldsymbol{f(\alpha)}$.
3) Ecrire une équation de la tangente $(\boldsymbol{T})$ au point d'abscisse $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
4) Déterminer les limites de $\boldsymbol{f}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5) Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{f}$.

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\boldsymbol{ln2}\}$ par : $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{e^x}}{\mathbf{2}(\boldsymbol{e^x}-\mathbf{2})}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\boldsymbol{o}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$. (Unité graphique 2cm)

1) Montrer que la droite d'équation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{ln2}$ est asymptote verticale à (C_f).
2) a) Déterminer la limite de f en$-\infty$.
b) Justifier que la droite $(\boldsymbol{D_1})$ d'équation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ est asymptote à (C_f) en$-\infty$.
3) a) Démontrer que pour tout $\boldsymbol{x}$ distinct de$\boldsymbol{ln2}$, on a : $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^x}-\mathbf{2}}$.

b) En déduire la limite de $\boldsymbol{f}$en $+\infty$ et justifier que la droite $(\boldsymbol{D_2})$ d'équation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ est asymptote à (C_f) en$+\infty$.

4) Étudier le signe de $\boldsymbol{f'(x)}$ et en déduire les variations de $\boldsymbol{f}$.
5) Représenter (C_f) et ses asymptotes dans le repère donné.

Exercice 16

On considère la suite définie par : $\boldsymbol{u_0} = \mathbf{2}$ et $\boldsymbol{u_{n+1}} = \mathbf{2}\boldsymbol{u_n} - \mathbf{3}$ pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{u_n} = \mathbf{3} - \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$.

Exercice 17

Etudier les variations de la suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par : $\boldsymbol{u_n} = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}}$ pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Exercice 18

a) On considère la suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par : $\boldsymbol{u_{n+1}} = \boldsymbol{u_n} + \mathbf{4}$ et $\boldsymbol{u_0} = \mathbf{1}$.

Déterminer la formule explicite de la suite.

b) Soit $(\boldsymbol{u_n})$ une suite géométrique dont le premier terme $\boldsymbol{u_0}$ et la raison $\boldsymbol{q}$ sont strictement positifs, et $(\boldsymbol{v_n})$ la suite telle que : pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{u_n})$.

1) Démontrer que la suite (v_n) est définie et qu'elle est arithmétique. On déterminera sa raison r en fonction de q.
2) Déterminer les valeurs de q telles que la suite (v_n) est strictement décroisante.

Exercice 19

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

a) 1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   2. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
b) 1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n, u_n \leq n + 3$.
   2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
   3. En déduire une validation de la conjecture précédente.

On désigne par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
b) En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$
c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 20

1) Etudier de deux manières le sens de variation de la suite u_n définie par : $u_n = \frac{3n+2}{2n-1}$
2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$. Démontrer que la suite (v_n) est bornée.
3) Etudier le sens de variation de la suite (W_n) définie par : $W_n = \frac{1}{3^n}$.

Exercice 21

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}, \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer $u_1, u_2,\ u_3$ et u_4 et prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n + 1 > 0$.
2) Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$ est une suite arithmétique.
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n et étudier la convergente de la suite (u_n).

Exercice 22

On considère la suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par : $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 0} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}} \end{cases}, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

1) Démontrer que pout entier $\boldsymbol{n}$ de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \neq 2}$
2) a) Montrer que la suite $(\boldsymbol{v_n})$ définie par : $\boldsymbol{v_n = \frac{u_n+1}{u_n-2}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme $\boldsymbol{v_0}$.
   b) Exprimer $\boldsymbol{v_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$ et calculer sa limite lorsque $\boldsymbol{n}$ tend vers $+\infty$.
   c) En déduire $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.
   d) Calculer en fonction de $\boldsymbol{n}$, la somme $\boldsymbol{S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n}$.

Exercice 23

La suite $(\boldsymbol{U_n}), \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ est définie pour $\boldsymbol{n \geq 1}$ par :

$$\boldsymbol{U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}}$$

a. Calculer $\boldsymbol{U_1, U_2\ et\ U_3}$
b. Ecrire un algorithme qui donne $\boldsymbol{U_n, n}$ étant donné. Donner alors $\boldsymbol{U_{10}, U_{20}\ et\ U_{50}}$. Que peut-on conjecturer quant à la limite de $(\boldsymbol{U_n})\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$?
c. Démontrer que pour $\boldsymbol{n \geq 1}$: $\boldsymbol{\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}}$
d. En déduire la convergence et la limite de la suite $(\boldsymbol{U_n})\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Exercice 24

On considère la suite $(\boldsymbol{U_n})\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_0 = 1\ et\ U_1 = 2} \\ \boldsymbol{U_{n+2} = 6U_{n+1} - 5U_n} \end{cases}$$

a. Calculer $\boldsymbol{U_2, U_3\ et\ U_4}$.
b. Résoudre l'équation du second dégré suivante : $\boldsymbol{x^2 = 6x - 5}$
c. Déterminer 2 réels A et B tels que :$\boldsymbol{A \times 5^n + B}$
d. En déduire $\boldsymbol{U_{10}}$

Exercice 25

La suite $(\boldsymbol{U_n}), \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ est définie par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_0 = 0,5} \\ \boldsymbol{U_{n+1} = 2U_n - 1} \end{cases}$$

a. En tracant dans un repère orthonormé les droites d'équation $\boldsymbol{y = x\ et\ y = 2x - 1}$, construire sur l'axe $(\boldsymbol{Ox})$ les images des 4 premiers termes de la suite.
b. On pose $\boldsymbol{U_n = U_n + 1}$; Montrer que la suite $(\boldsymbol{V_n})\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ est géométrique

c. Exprimer alors $\boldsymbol{V_n}$ puis $\boldsymbol{U_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$

d. Etudier la convergence de $(\boldsymbol{U_n})\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{et\ de}$ $(\boldsymbol{V_n})\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Exercices types de la compétence de base 1 du deuxième trimestre et corrigés

Enoncé 1

Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

1) $\ln \boldsymbol{e^2} + \ln\sqrt{\boldsymbol{e}}$;
2) $\ln(3e) + \ln\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{5} + \ln\frac{5}{7} + \ln\frac{7}{9}$;
3) $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{2} + \sqrt{\boldsymbol{3}})^{20} + \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{2} - \sqrt{\boldsymbol{3}})^{20}$;

Solution

1) $\ln \boldsymbol{e^2} + \ln\sqrt{\boldsymbol{e}} = 2\ \boldsymbol{lne} + \frac{1}{2}\ \boldsymbol{lne} = \frac{5}{2}\boldsymbol{lne} = \frac{5}{2}$ puisque $\ln \boldsymbol{e^2} = \boldsymbol{2lne} = \boldsymbol{2}$ et $\ln\sqrt{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{\ln e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$ et lne=1
2) $\ln(3e) + \ln\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{5} + \ln\frac{5}{7} + \ln\frac{7}{9} = \boldsymbol{ln3} + \boldsymbol{lne} + \boldsymbol{\ln}\left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{7}{9}\right) = \boldsymbol{ln3} + \boldsymbol{1} + \boldsymbol{\ln}\left(\frac{1}{9}\right) = \boldsymbol{ln3} + \boldsymbol{1} + (-\boldsymbol{ln9}) = \boldsymbol{ln3} + \boldsymbol{1} - \boldsymbol{2ln3} = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{ln3}$
3) $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{2} + \sqrt{\boldsymbol{3}})^{20} + \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{2} - \sqrt{\boldsymbol{3}})^{20} = 20\ \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{2} + \sqrt{\boldsymbol{3}}) + \boldsymbol{20}\ \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{2} - \sqrt{\boldsymbol{3}}) = \boldsymbol{20ln}(\boldsymbol{2} + \sqrt{\boldsymbol{3}})(\boldsymbol{2} - \sqrt{\boldsymbol{3}}) = \boldsymbol{20}\ \boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{4} - \boldsymbol{3}) = \boldsymbol{20ln1} = \boldsymbol{0}$

Enoncé 2

Résoudre les équations ou inéquations suivantes dans R :

1) $\boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{1}) - \boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{2x} - \boldsymbol{1}) + \boldsymbol{ln2} = \boldsymbol{0}$
2) $\boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}) + \boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2}) = \boldsymbol{ln18}$
3) a. développer l'expression $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{1})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{1})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2})$
   b. résoudre l'équation suivante : $\boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{2}) = \boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{2x^2} + \boldsymbol{x})$

Solution

1) $\boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{1}) - \boldsymbol{\ln}(\boldsymbol{2x} - \boldsymbol{1}) + \boldsymbol{ln2} = \boldsymbol{0}$

Conditions d'existence de l'équation : $\begin{cases} \boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{1} > \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{2x} - \boldsymbol{1} > \boldsymbol{0} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x\epsilon}]-\infty;\ -\boldsymbol{1}[\ \cup\ ]\boldsymbol{1};\ +\infty[\ \boldsymbol{et\ x\epsilon}\ \left]\frac{1}{2};\ +\infty\right[$

D'où $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{1}$

Pour $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{1}$, on a : $\ln(\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{1}) - \ln(\boldsymbol{2x} - \boldsymbol{1}) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\ln}\left(\frac{\boldsymbol{x^2}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2x}-\boldsymbol{1}}\right) = \boldsymbol{\ln}(\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{x^2}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2x}-\boldsymbol{1}} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{1} - \sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}} \quad \boldsymbol{et} \quad \boldsymbol{x_2} = \frac{\boldsymbol{1} + \sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}}$$

Or, $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < 1$ donc seule la solution x=$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \epsilon]1\ ;\ +\infty[$ et $S = \left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$

2) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = ln18$

Domaine de définition : $\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$ Donc $D =]2;\ +\infty[$

$\ln(x+1) + \ln(x-2) = ln18 \Leftrightarrow \ln(x+1)(x-2) = ln18$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 18 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$

D'où $x = 5\ et\ x = -4\ or - 4 \notin]2;\ +\infty[$ Donc $S = \{5\}$

3) a) Développer l'expression : $A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$
   b) Résoudre l'équation suivante : $\ln(x^3+2) = \ln(2x^2+x)$

Enoncé 3

Résoudre dans R les équations ou inéquations suivantes

1) $e^x - 7 = 0$
2) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$
3) Ln$e^{x+1} = 1$
4) $e^{2x} + e^x - 6 \leq 0$

Solution

1) $e^x - 7 = 0 \leftrightarrow e^x = e^{ln7} \leftrightarrow x = ln7$
   Donc S={$ln7$}
2) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$.

   En posant $e^x = X$, on aura : $e^{2x}+e^x - 6 = 0 \leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0$

$\Leftrightarrow$ (X−2)(X+3)=0 d'où X=2 ou X= −3 or $e^x = X$ donc $e^x = 2$ ou $e^x - 3 \leftrightarrow$ x=ln2 ou $e^x = -3$ impossible car $e^x > 0\ \forall x \epsilon R$.

Donc S={$ln2$}

3) ln$e^{x+1} = 1 \leftrightarrow lne^{x+1} = lne \Leftrightarrow e^{x+1} = e^1 \Leftrightarrow$x+1=1 d'où x=0 donc S={$0$}.
4) $e^{2x} + e^x - 6 \leq 0 \leftrightarrow (e^x - 2)(e^x + 3) \leq 0$
   On sait que $e^x + 3 > 0\ \forall\ x$εR donc $(e^x - 2)(e^x + 3) \leq 0$
   $\Leftrightarrow e^x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 2 \Leftrightarrow e^x \leq e^{ln2}$ et comme e^x est une fonction croissante, alors
   $x \leq ln2 \Leftrightarrow x\epsilon]-\infty\ ;\ ln2]$ donc S=$]-\infty\ ;\ ln2]$

Enoncé 4

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x + 4e^x)$
b) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} - 3e^x)$

Solution

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x + 4e^x)$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et donc par somme on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x + 4e^x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 3e^x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -3e^x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 3e^x\right) = -\infty$

Enoncé 5

Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et les fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = \frac{e^x}{x}$
b. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
c. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

Solution

a. $f(x) = \frac{e^x}{x}$
f est définie et dérivable sur $]-\infty; 0[\ \cup\ ]0;\ +\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle$]-\infty; 0[\ \cup\ ]0;\ +\infty[$.
Pour tout x$\epsilon]-\infty; 0[\ \cup\ ]0;\ +\infty[$, $f(x)\frac{e^x}{x}$ et $f'(x) = \frac{e^x.\ x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$
Donc $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

b. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

f est définie et dérivable sur $]0;\ +\infty[$ puis qu'elle est la composée des fonctions qui le sont, la fonction $u(x) = \sqrt{x}$ n'étant dérivable que sur $]0;\ +\infty[$.

De plus, sachant que $u(x) = \sqrt{x} \to u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \forall x \in \left]0\ ;\ +\infty\right[$

et $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x)e^{u(x)}$, on a $f'(x) = \left(e^{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

c. $f(x) = \ln(e^x + 1)$
On sait que $\forall x \in R,\ e^x + 1 > 0$ et que la fonction $X \to lnX$ est définie et dérivable sur $]0;\ +\infty[$ donc $f(x) = \ln(e^x + 1)$ est définie et dérivable sur R.

En posant $\boldsymbol{u(x) = e^x + 1}$, on a $\boldsymbol{u'(x) = e^x}$ et sachant que$[\boldsymbol{\ln(u(x)}]' = \frac{\boldsymbol{u'(x)}}{\boldsymbol{u(x)}}$,

on a donc : $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{u'(x)}}{\boldsymbol{u(x)}}$, on a donc : $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{u'(x)}}{\boldsymbol{u(x)}} = \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x+1}}$

Enoncé 6

Soit f la fonction définie sur R par $\boldsymbol{f(x) = xe^{(1-x)}}$

1) Dresser le tableau de variations de f
2) Démontrer qu'il existe un unique $\boldsymbol{a \epsilon R\ tel\ que\ h(a) = -1}$

Solution

1. $\boldsymbol{f(x) = xe^{1-x}}$ est dérivable sur R et on a : $\boldsymbol{f'(x) = (1-x)e^{1-x}}$ et comme $\boldsymbol{e^{1-x} > 0\ \forall x \epsilon R, f'(x)}$ est du signe de 1-x c'est-à-dire que $\boldsymbol{f'(x) < 0 si\ x \epsilon]1\ ;\ +\infty[}$ et $\boldsymbol{f'(x) > 0\ si\ x \epsilon]1\ ;\ +\infty[}$. Donc f est croissante sur $\boldsymbol{]1\ ;\ +\infty[\ et\ décroissante\ sur\ ]1\ ;\ +\infty[}$.

Par croissance comparée de la fonction exponentielle et des fonctions polynômes, on a : $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = e \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0\ et\ \lim_{x\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty}$

On a le tableau de variation de f

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		$\mathbf{1}$		$+\infty$
$\boldsymbol{f'(x)}$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$\boldsymbol{f(x)}$	$-\infty$	↗	$\mathbf{1}$	↘	$\mathbf{0}$

2. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\boldsymbol{]-\infty\ ;\ 1[}$ avec $\boldsymbol{f(1) = 1}$ et $\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$. Donc f est une bijection de $\boldsymbol{]-\infty\ ;\ 1[}$ sur $\boldsymbol{]-\infty\ ;\ 1[}$. Il s'ensuit qu'il existe un unique réel $\boldsymbol{a \epsilon]-\infty\ ;\ 1[}$ tel que $\boldsymbol{f(x) = -1}$. De plus, on vérifie que $\boldsymbol{f(x) \geq 0, \forall x \geq 1}$.

Enoncé 7

On désigne par $\boldsymbol{f}$ la fonction polynôme définie par : $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x + 2}$.

On se propose de montrer que pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, il existe des réels $\boldsymbol{a_n}$ et $\boldsymbol{b_n}$ et une fonction polynôme $\boldsymbol{p_n}$ à coefficients réels, tels que pour tout réel $\boldsymbol{x}$ $\mathbf{l'onait}$:

$\boldsymbol{x^n = p_n(x) \times f(x) + a_n x + b_n}$.

1) Déterminer $\boldsymbol{p_0, a_0, b_0, p_1, a_1, b_1}$ et $\boldsymbol{p_2, a_2, b_2}$.

2) Démontrer par récurrence l'existence de p_n, a_n et , b_n pour tout n. On établira notamment que pour tout entier naturel n, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$p_{n+1}(x) = xp_n(x) + a_n$, $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$. (on pourra peut-être remarquer que $a_n x^2 + b_n x = a_n f(x) + (3a_n + b_n)x - 2a_n$).

3) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 1$.
4) Montrer que la suite de terme général $u_n = a_n + 1$ est une suite géométrique.
5) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n

Solution

Soit f la fonction polynôme définie par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

1) Déterminons $p_0, a_0, b_0, p_1, a_1, b_1$ et p_2, a_2, b_2.

On a :

$$1 = p_0(x)f(x) + a_0x + b_0 = p_0(x)(x^2 - 3x + 2) + a_0x + b_0$$
$$= p_0(x)x^2 - 3p_0(x)x + 2p_0(x) + a_0x + b_0$$
$$\Leftrightarrow 1 = p_0(x)x^2 + (-3p_0(x) + a_0)x + 2p_0 + b_0$$

Par identification : $\begin{cases} p_0 = 0 \\ -3p_0 + a_0 = 0 \\ 2p_0 + b_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = 0 \\ a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$

Ensuite, pour $n = 1$, on a :

$$x = p_1(x)f(x) + a_1x + b_1 = p_1(x)(x^2 - 3x + 2) + a_1x + b_1$$
$$\Leftrightarrow x = p_1(x)x^2 - 3p_1(x)x + 2p_1(x) + a_1x + b_1$$
$$= p_1(x)x^2 + (-3p_1(x) + a_1)x + 2p_1 + b_1$$

Par identification : $\begin{cases} p_1 = 0 \\ -3p_1 + a_1 = 1 \\ 2p_1 + b_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$

Enfin, pour $n = 2$, on a :

$$x^2 = p_2(x)f(x) + a_2x + b_2 = p_2(x)(x^2 - 3x + 2) + a_2x + b_2$$
$$\Leftrightarrow x = p_2(x)x^2 - 3p_2(x)x + 2p_2(x) + a_2x + b_2$$
$$= p_2(x)x^2 + (-3p_2(x) + a_2)x + 2p_2 + b_2$$

Par identification : $\begin{cases} p_2 = 1 \\ -3p_2 + a_2 = 0 \\ 2p_2 + b_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 = 1 \\ a_2 = 3 \\ b_2 = -2 \end{cases}$

2) Démontrons par récurrence l'existence de p_n, a_n et , b_n pour tout n.

On a pour $n = 0$, $p_0f(x) + a_0x + b_0 = 1$ car $p_0 = 0$ et $a_0 = 0$, donc la proposition est vraie au rang 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x^n = p_n(x) \times f(x) + a_nx + b_n$ et montrons que $x^{n+1} = p_{n+1}(x) \times f(x) + a_{n+1}x + b_{n+1}$

On a : $x^{n+1} = x^nx = (p_nf(x) + a_nx + b_n)x = p_nf(x)x + a_nx^2 + b_nx$,

Or $a_nx^2 + b_nx = a_nf(x) + (3a_n + b_n)x - 2a_n$,

d'où $x^{n+1} = p_nf(x)x + a_nf(x) + (3a_n + b_n)x - 2a_n$

Montrons que $p_{n+1} = p_nx + a_n$, $a_{n+1} = 3a_n + b_n$et $b_{n+1} - 2a_n$

Il suffit de montrer que ces valeurs vérifient la relation de récurrence suivante :
$x^{n+1} = p_{n+1}(x)f(x) + a_{n+1}x + b_{n+1}$.
On a :
$x^{n+1} = p_{n+1}(x)f(x) + a_{n+1}x + b_{n+1} = (xp_n + a_n)f(x) + (3a_n + b_n)x + (-2a_n)$
$= xp_nf(x) + 3a_nx + a_nf(x) + b_nx - 2a_n$
$= (p_nf(x) + 3a_n + b_n)x + a_nx^2 - 3a_nx$
$= (p_nf(x) + 3a_n + b_n + a_nx - 3a_n)x = (p_nf(x) + a_nx + b_n)x$
$= x^nx = x^{n+1}$

Ainsi la proposition est vraie au rang $n+1$, donc pour tout $\in \mathbb{N}$, p_n, a_n et b_n existent.

3) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$
On a pour $n = 0$, $a_0 + b_0 = 0 + 1 = 1$
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $a_n + b_n = 1$ et montrons que $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$
On a $a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_n + b_n - 2a_n = a_n + b_n = 1$.
Ainsi la proposition est vraie au rang $n+1$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$

4) Montrons que la suite de terme général $u_n = a_n + 1$ est une suite géométrique
On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n+b_n+1}{a_n+1} = \frac{3a_n+(1-a_n+1)}{a_n+1} = \frac{2a_n+2}{a_n+1} = 2$
Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

5) Déduisons-en les expressions de a_n et b_n en fonction de n
On a : $u_n = u_0q^n$ donc $u_n = 2^n$.
Or $u_n = a_n + 1 \Leftrightarrow a_n = u_n - 1$, donc $a_n = 2^n - 1$.
De plus, $a_n + b_n = 1 \Leftrightarrow b_n = 1 - a_n$, donc $b_n = 2 - 2^n$.

Enoncé 8

Soient (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\, u_n + 3 \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - 6$$

1) a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison

b) Soit n un entier, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

2) On définit la suite (w_n) par : pour tout entier naturel n, $w_n = ln(v_n)$ où ln désigne le logarithme népérien.

a) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique que l'on caractérisera

b) Calculer, $\forall n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$

3) Soit n un entier naturel, et le produit $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots . \times v_n$

a) Montrer que $S_n = ln(P_n)$

b) En déduire la limite de P_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Solution

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\, u_n + 3 \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - 6$$

1) a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison

$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}\, u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2} v_n$.

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Soit n un entier, exprimons v_n puis u_n en fonction de n

$v_0 = u_0 - 6 = 3$ donc $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n + 6 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) On définit la suite (w_n) par : pour tout entier naturel $n, w_n = ln(v_n)$ où ln désigne le logarithme népérien.

a) Montrons que (w_n) est une suite arithmétique que l'on caractérisera

on a : $v_{n+11} = \frac{1}{2} v_n$ et alors $w_{n+1} = ln\left(\frac{1}{2} v_n\right) = -ln2 + ln(v_n)$.

Ainsi, (w_n) est une suite arithmétique de raison $-ln2$ et de premier terme $w_0 = ln3$

b) Calculons,$\forall n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$

$S_n = \frac{(n+1)(w_0+w_n)}{2} = \frac{(n+1)(2ln3-nln2)}{2}$

3) a) Montrons que $S_n = ln(P_n)$

On a :

$ln(P_n) = \ln(v_0 \times v_1 \times \ldots . \times v_n) = ln(v_0) + ln(v_1) + \cdots + ln(v_n) = w_0 + w_1 + \cdots . + w_n = S_n$

b) Déduisons-en la limite de P_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$

$ln(P_n) = S_n \Leftrightarrow P_n = e^{S_n}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{S_n}$. Or $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

Alors $\lim_{n\to+\infty} P_n = 0$

Enoncé 9

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{4} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 d'une part et v_1, v_2, v_3 d'autre part.

2) On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel $n$par : $S_n = u_n + v_n$

a) Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 .

A partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (S_n)?

b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (S_n) est une suite constante.

3) On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.

a) Montrer (d_n) est une suite géométrique

b) Donner l'expression de d_n en fonction de n

4) En utilisant les résultats des questions 2-b et 3-b, donner l'expression de v_n *et* u_n en fonction de n

5) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent. Préciser leurs limites.

Solution

$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4} \end{cases}$

1) Calculons $u_1 = \frac{1}{4}, u_{2,} = \frac{7}{16}, u_3 = \frac{37}{64}$ d'une part et $v_1 = \frac{7}{4}, v_2 = \frac{25}{16}, v_3 = \frac{91}{64}$ d'autre part.

2) Pour tout entier naturel n par : $S_n = u_n + v_n$

a) Calculons : $S_0 = 2, S_1 = 2, S_2 = 2, S_3 = 2$.

On peut conjecturer que la suite (S_n) est constante

b) Montrons que la suite (S_n) est une suite constante.

$S_0 = 2$ et supposons que , pour tout entier k, on ait $S_k = 2$ et démontrons que $S_{k+1} = 2$

$S_{k+1} = u_{k+1} + v_{k+1} = \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}v_k + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(u_k + v_k) = \frac{3}{4}S_k + \frac{1}{2}$

Compte tenu de l'hypothèse$S_k = 2$, on obtient : $S_{k+1} = 2$ donc, d'après le principe de démonstration par récurrence, pour tout $\in \mathbb{N}$, $S_n = 2$.

(S_n) est donc une suite constante.

3) Pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.

a) Montrons que (d_n) est une suite géométrique

$d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}v_k - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(v_n - u_n) = \frac{3}{4}d_n$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $d_0 = 2$

b) Donnons l'expression de d_n en fonction de n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

4) donnons l'expression de $\boldsymbol{v_n}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$

Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n + v_n = 2}$ et $\boldsymbol{v_n - u_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

On en déduit : $\boldsymbol{u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$ et $\boldsymbol{v_n = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

5) Montrons que les suites $(\boldsymbol{u_n})$ et $(\boldsymbol{v_n})$ convergent. Précisons leurs limites.

Chacune des suites $(\boldsymbol{u_n})$ et $(\boldsymbol{v_n})$ est la somme d'une suite constante et d'une suite géométrique de raison $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ avec $0 < \boldsymbol{\frac{3}{4} < 1}$, donc convergentes vers 0.

Par conséquent, $(\boldsymbol{u_n})$ et $(\boldsymbol{v_n})$ sont convergentes et $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1}$.

Exercices de la compétence de base 2 du deuxième trimestre

Exercice 1

Etudier la loi $*$ définie sur $\boldsymbol{\mathcal{P}(E)}$ par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{A * B = A \cup B \; si \; A \cap B = \emptyset} \\ \boldsymbol{A * B = E \; si \; A \cap B \neq \emptyset} \end{cases}$$

Exercice 2

Soit A un anneau tel que :

$\forall(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{A^2}, (\boldsymbol{a^2 - a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a^2 - a})$

a. Montrer que : $\forall\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{A^3},\ (\boldsymbol{xy + yx})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{xy + yx})$
b. Montrer que A est un anneau commutatif.

Exercice 3

Soit $\boldsymbol{G} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ $\boldsymbol{et}$ $*$ la loi dans G définie par :

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) * (\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) = (\boldsymbol{xx'}, \boldsymbol{xy' + y})$

a. Montrer que $(\boldsymbol{G}, *)$ est un groupe non commutatif.
b. Montrer que $(]\boldsymbol{0}, +\infty[\times \mathbb{R}, *)$ est un sous-groupe de $(\boldsymbol{G}, *)$.

Exercice 4

On munit $\boldsymbol{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par :

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) = (\boldsymbol{x + x'}, \boldsymbol{y + y'})\boldsymbol{et}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) * (\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) = (\boldsymbol{xx'}, \boldsymbol{xy' + x'y})$

a. Montrer que $(\boldsymbol{A}, +)$ est un groupe commutatif.
b.
   1. Montrer que la loi $*$ est commutative
   2. Montrer que $*$ est associative.
   3. Déterminer l'élément neutre de A pour la loi $*$
   4. Montrer que $(\boldsymbol{A}, +, *)$ est un anneau commutatif.

Exercice 5

On définit dans $\mathbb{N}$ une loi de composition interne en posant$\forall\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{N}^{\mathbf{2}}, \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{ab}$.

a) Calculer$\mathbb{R}_+^\star$: $\mathbf{7} * \mathbf{2}$ et $\mathbf{3} * \mathbf{5}$
b) La loi est-elle associative ?
c) Montrer que $(\mathbb{N},*)$ admet un élément neutre et que $*$ est commutative.
d) Un élément de $\mathbb{N}$ a-t-il un symétrique pour la loi ?

Exercice 6

1) On définit dans $\mathbb{N}$ la LCI par : $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a} \top \boldsymbol{b} = \mathbf{2}\boldsymbol{ab}$
   a) $(\top)$ est – elle une LCI dans $\mathbb{N}$?
   b) $(\top)$ est–elle commutative ?
   c) $(\top)$ est–elle associative ?
   d) Existe-t-il un élément neutre dans $\mathbb{N}$ pour $(\top)$? Calculer : $[(\mathbf{2} \top \mathbf{3}) \top \mathbf{1}]$.
2) On définit dans $\mathbb{Q}$ la LCI par : $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\ \in \mathbb{Q}$, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \mathbf{3}$
   a) La loi $(\perp)$ est – elle une LCI dans $\mathbb{Q}$?
   b) Calculer $(\mathbf{2} \perp \mathbf{6})$ et $(\mathbf{6} \perp \mathbf{2})$. Que peut-on conclure ?
   c) Démontrer que $\mathbb{Q}$ possède un élément neutre pour $(\perp)$.

Exercice 7

1) On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $\star$ définie par :
$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}, x \star y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$
   a) Montrer que la loi $\star$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $2 * x = 5$ et $x * x = 1$
2) On munit $\mathbb{R}_+^\star$ de la loi de composition interne $\star$ définie par : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, $x \star y = \sqrt{x^2 + y^2}$
   a) Montrer que $\star$ est commutative, associative et que 0 est élément neutre.
   b) Montrer qu'aucun élément de $\star$ n'a de symétrique pour $\mathbb{R}_+^\star$.
   c) Démontrer que l'équation $\boldsymbol{x} * \mathbf{3} = \mathbf{5}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}_+^\star$.
   d) $\forall\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{N}$, calculer $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{a} * \boldsymbol{a} \cdots\cdots * \boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{n}$ facteurs).

Exercice 8

Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble des complexes de la forme $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$ où $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}$.

1) Montrer que $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe commutatif.
2) Montrer que $(\mathbb{K}^*, .)$ est un groupe commutatif.
3) En déduire que $(\mathbb{K}, +, .)$est un corps commutatif.

Exercice 9

On munit $\boldsymbol{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par :

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}',\ \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \star (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}) \end{cases}$$

1) Montrer que $(\boldsymbol{A}, +)$ est un groupe commutatif.
2) Montrer que :
   a) La loi $\star$ est commutative et associative.
   b) Déterminer l'élément neutre de $\boldsymbol{A}$ pour la loi $\star$.
3) Montrer que $(\boldsymbol{A}, +,\ \star)$ est un anneau commutatif unitaire.

Exercice 10

Soit $\boldsymbol{E}$ l'ensemble des fonctions $\boldsymbol{f}:]\mathbf{0};\ +\infty[\to]\mathbf{0};\ +\infty[$ telles qu'il existe $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^\star$ vérifiant :

$$\forall \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0};\ +\infty[,\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

1) Montrer que pour tout $\in \mathbb{R}^\star$, $\boldsymbol{f}$ est une bijection de $]\mathbf{0};\ +\infty[$ sur $]\mathbf{0};\ +\infty[$.
2) Montrer que $\boldsymbol{E}$ muni de la loi de composition $\circ$ des fonctions est un groupe.

Exercice 11

Une urne contient trois boules noires et quatre boules blanches, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans l'urne.

1) Quelle est la probabilité que les deux boules soient blanches ?
2) Quelle est la probabilité que les deux boules soient noires ?
3) Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes ?

Exercice 12

Un jury est composé de 4 membres tirés au sort parmi 9 hommes et 6 femmes.

1) Calculer la probabilité que le jury comprenne 2 hommes et 2 femmes.
2) Calculer la probabilité que le jury ne comprenne aucune femme.
3) Calculer la probabilité que le jury comprenne au moins une femme.\

Exercice 13

Dans un jeu de 32 cartes on tire simultanément et au hasard 4 cartes.

Calculer la probabilité des événements :

A : « Obtenir une carte de chaque couleur » ;

B : « Obtenir exactement un as » ;

C : « N'obtenir aucun as » ;

D : « Obtenir au moins un as » ;

E : « Obtenir deux cœurs et deux piques » ;

F : « Obtenir exactement deux cœurs et un as ».

Exercice 14

Un sac contient 3 jetons verts et 6 jetons rouges. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de ce sac. Quelle est la probabilité de tirer :

a) 2 jetons verts ?
b) 2 jetons rouges ?
c) 2 jetons de couleurs différentes ?

Exercice 15

Un sac contient deux billes noires et trois billes rouges. On tire au hasard et simultanément deux billes.

a) Quelles sont les cas possibles de cette épreuve ?
b) Une bille noire fait gagner 1000 F et une bille rouge fait perdre 1000 F au joueur. Calculer la probabilité pour un joueur de perdre 2000 F lors d'un tirage.

Exercice 16

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire au hasard une boule de l'urne et on note son numéro N. Les boules ont la même probabilité d'être tirées.
On désigne respectivement par A et B les évènements « N est pair » et « N est multiple de trois ».

1) Calculer la probabilité des évènements A, B et $A \cap B$.
2) Calculer la probabilité de $\overline{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{B}}$ et $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$.

Exercice 317

Un jury est composé de 4 membres tirés au sort parmi 9 hommes et 6 femmes.

1) Calculer la probabilité que le jury comprenne 2 hommes et 2 femmes.
2) Calculer la probabilité que le jury ne comprenne aucune femme.
3) Calculer la probabilité que le jury comprenne au moins une femme.

Exercice 18

Dans un groupe de 20 personnes, on doit choisir, au hasard, trois représentants. Saliou et Julie sont membres de ce groupe. Calculer la probabilité d'événements

A : « ni Saliou, ni Julie ne font partie des trois représentants » ;

B : « Saliou et Julie font partie de trois représentants » ;

C : « Seul Julie fait partie des trois représentants ».

Exercice 19

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules noires.

1) On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne. Déterminer la probabilité des événements suivants :

   A : « Les 2 boules tirées sont de la même couleur » ;

   B : « il ya au moins une boule rouge parmi les 2 boules tirées ».

2) On tire successivement et sans remise, au hasard, les 2 boules. Déterminer la probabilité des événements suivants :

   C : « la première boule tirée est rouge » ;

   D : « Les boules tirées sont de couleurs différentes ».

Exercice 20

Une entreprise veut engager 4 ingénieurs dans 4 spécialités différentes. 6 ingénieurs se présentent. Combien de choix s'offrent au responsable de l'embauche dans les 3 cas suivants ?

1) Les 6 ingénieurs sont polyvalents (pouvant tous occupés n'importe lequel des 4 postes).
2) Un seul est polyvalent pour les 4 branches, les 5 autres le sont seulement dans 3 branches.
3) Parmi ces 6 candidats se trouvent 3 hommes et 3 femmes, tous polyvalents. L'équipe recherchée doit comprendre 2 hommes et 2 femmes.

Exercice 21

On a rangé en vrac dans une boite, neuf cartes postales indiscernable au toucher. Cinq de ces cartes proviennent du Tchad, une provient du Maroc et trois de la Chine. On tire simultanément et au hasard trois cartes de la boite.

1) Démontrer que la probabilité de n'obtenir aucune carte du Tchad parmi les trois cartes est égale à $\frac{1}{21}$.
2) Calculer la probabilité des événements A « lors d'un tirage, obtenir une carte de chaque pays » et B « lors d'un tirage, obtenir au moins une carte du Tchad »
3) X est la variable aléatoire comptant pour chaque tirage de trois cartes, le nombre de cartes de la Chine. Donner la loi de probabilité de X ainsi que sa variance.

4) On répète ce tirage n fois de suite en remettant à chaque fois les trois cartes tirées dans la boite. A partir de quelle de n, la probabilité d'obtenir au moins un tirage sans carte du Tchad est-elle supérieure ou égale à 0,95 ?

Exercice 22

Une boite contient 4 boules rouges ,3 boules vertes et n boules jaunes ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ et $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$). On tire simultanément 2 boules de la boite et on suppose que les tirages sont équiprobables.

1) Exprimer en fonction de $\boldsymbol{n}$, les probabilités des évènements :

   $\boldsymbol{A}$: « Les deux boules sont jaunes »

   $\boldsymbol{B}$: « Le tirage est unicolore »

   $\boldsymbol{C}$: « Le tirage est bicolore »

2) On suppose que $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{13}}$; déduire$\boldsymbol{n}$, puis P(B) et P(C).
3) On suppose que $\boldsymbol{n} = \mathbf{7}$. On répète 10 fois l'expérience en remettant dans la boite après chaque tirage, les deux boules tirées. $\boldsymbol{X}$ est la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de réalisation de l'évènement $\boldsymbol{B}$.
   a) Calculer la probabilité des évènements $(\boldsymbol{X} = \mathbf{2})$ et $(\boldsymbol{X} \geq \mathbf{9})$.
   b) Calculer l'Esperance mathématique de $\boldsymbol{X}$ et donner une interprétation du résultat.

Exercices types de la compétence de base 2 du deuxième trimestre et corrigés

Enoncé 1

On veut élire un comité de 5 membres parmi les 50 élèves d'une classe de TD.

a) Quel est le nombre de résultats possibles ?
b) Quel est le nombre de comités contenant exactement 2 filles sachant qu'il y a 20 filles dans cette classe ?
c) Quel est le nombre de comités contenant au moins une fille ?

Solution

a) Un comité de 5 membres choisis parmi les 50 élèves de cette classe de TD est une partie constituée de 5 élèves choisis parmi les 50. Le nombre total de résultats possibles est : $\boldsymbol{C}_{\mathbf{50}}^{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{50!}}{\mathbf{5!45!}}$
b) Le nombre de comités contenant exactement 2 filles sachant qu'il y a 20 filles dans cette classe est : $\boldsymbol{C}_{\mathbf{20}}^{\mathbf{2}} \times \boldsymbol{C}_{\mathbf{30}}^{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{20!}}{\mathbf{2!18!}} \times \frac{\mathbf{30!}}{\mathbf{3!47!}}$

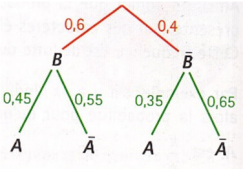
c) Le nombre de comités contenant au moins une fille est :
$\boldsymbol{C_{20}^{1} \times C_{30}^{4} + C_{20}^{2} \times C_{30}^{3} + C_{20}^{3} \times C_{30}^{2} + C_{20}^{4} \times C_{30}^{1} + C_{20}^{5} \times C_{30}^{0}}$

Enoncé 2

Dans une classe de Terminale D, il y a 60% de filles et 45% des filles ont 18ans ; 35% des garçons ont 18 ans.
Déterminer la probabilité pour qu'un élève de cette classe ait 18 ans.

Solution

Dans une classe de Terminale D, il y a 60% de filles et 45% des filles ont 18ans ; 35% des garçons ont 18 ans.
Déterminons la probabilité pour qu'un élève de cette classe ait 18 ans.
Soit A l'évènement : « l'élève a 18 ans » et B, l'évènement : « l'élève est une fille ».
On a : $P(B) = 0{,}6$.
L'évènement A/B : « l'élève a 18 ans sachant qu'il est une fille » a pour probabilité :
$P(A/B) = 0{,}45$.
L'évènement $A/\overline{\boldsymbol{B}}$: « l'élève a 18 ans sachant qu'il est un garçon » a pour probabilité :
$P(A/\overline{\boldsymbol{B}}) = 0{,}35$.
Les autres probabilités s'obtiennent par complémentarité : $P(A/B) + P(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{B}) = 1$ et
$P(A/\overline{\boldsymbol{B}}) + P(\overline{\boldsymbol{A}}/\overline{\boldsymbol{B}}) = 1$.
D'où l'arbre ci-dessous :



Ainsi, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{\boldsymbol{B}}) = 0{,}45 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}35 = 0{,}41$.
La probabilité pour qu'un élève ait 18ans est 0,41.

Enoncé 3

Deux urnes indiscernables (1) et (2) contiennent des boules indiscernables au toucher.
L'urne (1) contient 4 boules rouges et 2 boules noires.
L'urne (2) contient 3 boules rouges et 1 boule noire.
On choisit une urne au hasard, on tire au hasard une boule de cette urne et on note la couleur de la boule tirée.
Calculer la probabilité pour que la boule tirée soit rouge.
Solution
En effet, l'épreuve décrite est un enchainement de deux expériences aléatoires : choisir une urne et tirer une boule de cette urne.
L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est constitué des 10 boules des deux urnes.
Désignons par :

Ω_1 l'évènement : « la boule tirée provient de l'urne (1) »; Ω_2 : « la boule tirée provient de l'urne (2) » ; R : « la boule tirée est rouge » et par N : « la boule tirée est noire ».
On remarque bien que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.
L'évènement R est la réunion de deux évènements disjoints suivants :

- $R \cap \Omega_1$: « la boule tirée est rouge et provient de l'urne (1) » ;
- $R \cap \Omega_2$: «la boule tirée est rouge et provient de l'urne (2) » ;
  d'où $P(R) = P(R \cap \Omega_1) + P(R \cap \Omega_2)$.

Or $P(R \cap \Omega_1) = \boldsymbol{P}_{\Omega_1}(R) \times P(\Omega_1)$; $P(R \cap \Omega_2) = \boldsymbol{P}_{\Omega_2}(R) \times P(\Omega_2)$.
L'évènement Ω_1 et l'évènement Ω_2 sont équiprobables et forment une partition de l'univers Ω c'est-à-dire que $P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = \frac{1}{2}$.
De plus $\boldsymbol{P}_{\Omega_1}(R)$ est la probabilité de tirer une boule rouge de l'urne (1), donc $\boldsymbol{P}_{\Omega_1}(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Et, $\boldsymbol{P}_{\Omega_2}(R)$ est la probabilité de tirer une boule rouge de l'urne (2), donc $\boldsymbol{P}_{\Omega_2}(R) = \frac{3}{4}$.
Ainsi, $P(R) = P(R \cap \Omega_1) + P(R \cap \Omega_2)$
$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{24}$.

Enoncé 4

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois pile ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ?

Solution

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.

a) Calculons la probabilité d'obtenir deux fois pile.
   Lors du lancer d'une pièce de monnaie bien équilibrée, la probabilité d'obtenir « pile » est $P(p) = \frac{1}{2}$. Celle d'obtenir « face » est $P(f) = \frac{1}{2}$.
   La répétition de cette même épreuve trois fois est un schéma de Bernoulli de paramètres $\boldsymbol{n} = 3, \boldsymbol{p} = \frac{1}{2}$
   Ainsi, la probabilité cherchée est :
   $\boldsymbol{p_2} = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1$
   $= \frac{3}{8}$
b) Soit A, l'évènement : « obtenir au moins une fois face ».
   La probabilité d'obtenir au moins une fois face est :
   $P(A) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
   NB : on pourra utiliser la probabilité de l'évènement contraire : $\overline{\boldsymbol{A}}$ « obtenir aucune face aucours des trois lancers » .

$P(\overline{A}) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Ainsi, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

$= \frac{7}{8}$

Enoncé 5

Une urne contient douze boules numérotées de 1 à 12. On tire simultanément trois boules.

On suppose que tous les résultats possibles d'un tel tirage sont équiprobables.

On désigne par $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ les numéros des trois boules tirées.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3 ».

B : « $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 ».

C : « $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison – 2 ».

NB : on donnera les résultats sous forme de fraction irréductibles.

Solution

Une urne contient douze boules numérotées de 1 à 12. On tire simultanément trois boules.

On suppose que tous les résultats possibles d'un tel tirage sont équiprobables.

On désigne par $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ les numéros des trois boules tirées.

Déterminons la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3 ».

On a : $\begin{cases} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \mathbf{3} \\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} - \mathbf{3} \end{cases}$

donc $\boldsymbol{a} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$

$\boldsymbol{b} \in \{\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}\}$ et

$\boldsymbol{c} \in \{\mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{10}, \mathbf{11}, \mathbf{12}\}$

L'ensemble $A = \{(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{7});\ (\mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{8});\ (\mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{9});\ (\mathbf{4}, \mathbf{7}, \mathbf{10});\ (\mathbf{5}, \mathbf{8}, \mathbf{11});\ (\mathbf{6}, \mathbf{9}, \mathbf{12})\}$

Soit Card $A = 6$

Si l'on désigne par Ω, l'univers associé à cette expérience, Card $\Omega = \boldsymbol{C_{12}^3} = 220$.

$P(A) = \frac{\boldsymbol{Card\ A}}{\boldsymbol{Card}\ \Omega} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{220}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{110}}$

B : « $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 ».

On a : $\begin{cases} \boldsymbol{b} = \mathbf{2}\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} = \mathbf{2}\boldsymbol{b} \end{cases}$

Donc $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}$ et $\boldsymbol{c} = \mathbf{2}\boldsymbol{b}$

Ainsi, $\boldsymbol{b} \boldsymbol{\epsilon} \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}\}$

$\boldsymbol{a} \boldsymbol{\epsilon} \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$

$\boldsymbol{c} \boldsymbol{\epsilon} \{\mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{12}\}$

$\mathrm{B} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4});\ (\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8});\ (\mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{12})\}$

Card B = 3

$\mathrm{P(B)} = \frac{\boldsymbol{Card\ B}}{\boldsymbol{Card}\ \Omega} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{220}}$

C : « $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison – 2 ».

On a : : $\begin{cases} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \mathbf{2} \\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + \mathbf{2} \end{cases}$

Donc $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\epsilon} \{\mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{10}, \mathbf{11}, \mathbf{12}\}$

$\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{\epsilon} \{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{10}\}$ et

$\boldsymbol{c} \boldsymbol{\epsilon} \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}\}$

Soit Card C = 8

$\mathrm{P(A)} = \frac{\boldsymbol{Card\ C}}{\boldsymbol{Card}\ \Omega} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{220}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{55}}$

Enoncé 6

Trois enfants A, B, C passent le même jour un concours. Les trois examens sont différents et se passent en des différents centres. Les parents de ces enfants leur accordent les probabilités suivantes de succès : P(A) = 0,7 ; P(B) = 0,4 ; P(C) = 0,6.

Calculer la probabilité pour que :

1) Les trois enfants réussissent;
2) Les trois enfants échouent;
3) A seul réussit;
4) Un enfant exactement ait réussi;
5) B soit le seul à échouer ;
6) Au moins un enfant ait réussi.

Solution

Trois enfants A, B, C passent le même jour un concours. Les trois examens sont différents et se passent en des différents centres. Les parents de ces enfants leur accordent les probabilités suivantes de succès : P(A) = 0,7 ; P(B) = 0,4 ; P(C) = 0,6.

Calculons:

1) la probabilité $\boldsymbol{P_1}$ pour que les trois enfants réussissent: $\boldsymbol{P_1} = 0{,}7 \times \mathbf{0,4} \times \mathbf{0,6} = \mathbf{0,168}$

2) la probabilité $\boldsymbol{P_2}$ pour que les trois enfants échouent: $\boldsymbol{P_2}= (1- 0{,}7)(\mathbf{1-0,4})(\mathbf{1-0,6})$

$$\boldsymbol{P_2 = 0,072}$$

3) la probabilité $\boldsymbol{P_3}$ pour que A seul réussit : $\boldsymbol{P_3 = 0,7 \times (1-0,4)(1-0,6)} = 0{,}168$
4) la probabilité $\boldsymbol{P_4}$ pour qu'un enfant exactement ait réussi :
$\boldsymbol{P_4 = 0,168 + (1-0,7)(0,4)(1-0,6) + (1-0,7)(1-0,4)(0,6)} = 0{,}324$
5) la probabilité $\boldsymbol{P_5}$ pour que B soit le seul à échouer : $\boldsymbol{P_5 = 0,7 \times (1-0,4) \times 0,6} = 0{,}252$
6) la probabilité $\boldsymbol{P_6}$ pour qu'au moins un enfant ait réussi : $\boldsymbol{P_6 = 1-0,072 = 0,928}$

Enoncé 7

On a mesuré la taille des individu d'un groupe et on a obtenu le tableau suivant :

Taille	155	159	167	170	175	177	193
Effectif	1	1	3	1	1	2	1

On choisit au hasard un individu et on désigne par X sa taille en centimètre.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
c) Définir la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.

Solution

On a mesuré la taille des individu d'un groupe et on a obtenu le tableau suivant :

Taille	155	159	167	170	175	177	193
Effectif	1	1	3	1	1	2	1

On choisit au hasard un individu et on désigne par X sa taille en centimètre.

a) Déterminons la loi de probabilité de X:
En effet $X(\Omega) = \{\mathbf{155, 159, 167, 170, 175, 177, 193}\}$
Ainsi, $P(X=155) = \frac{1}{10}$; $P(X=159) = \frac{1}{10}$; $P(X= 167) = \frac{3}{10}$; $P(X=170) = \frac{1}{10}$;
$P(X=175) = \frac{1}{10}$; $P(X=177) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; $P(X=193) = \frac{1}{10}$

b) Calculons l'espérance mathématique de X :

En effet $E(x) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i p_i} = 155 \times \frac{1}{10} + 159 \times \frac{1}{10} + 167 \times \frac{3}{10} + 170 \times \frac{1}{10} + 175 \times \frac{1}{10} + 177 \times \frac{1}{5} + 193 \times \frac{1}{10}$.

La variance de X est : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x_i - E(X)})^2 \boldsymbol{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i x_i}^2 - [\boldsymbol{E(X)}]^2$.

$V(X) = \mathbf{155^2} \times \frac{1}{10} + \mathbf{159}^2 \times \frac{1}{10} + \mathbf{167}^2 \times \frac{3}{10} + \mathbf{170^2} \times \frac{1}{10} + \mathbf{175^2} \times \frac{1}{10} + \mathbf{177^2} \times \frac{1}{5} + \mathbf{193^2} \times \frac{1}{10} - [\boldsymbol{E(X)}]^2$.

L'écart –type cherché est : $\boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{\boldsymbol{V(X)}}$

c) Définissons la fonction de répartition de X : la fonction de répartition F est telle que :

$$\begin{cases} F(x) = 0, si\ x < 155 \\ F(x) = \frac{1}{10},\ si\ 155 \le x < 159 \\ F(x) = \frac{1}{5},\ si\ 159 \le x < 167 \\ F(x) = \frac{1}{2},\ si\ 167 \le x < 170 \\ F(x) = \frac{3}{5},\ si\ 170 \le x < 175 \\ F(x) = \frac{7}{10},\ si\ 175 \le x < 177 \\ F(x) = \frac{9}{10},\ si\ 177 \le x < 193 \\ F(x) = 1\ si\ 193 \le x. \end{cases}$$

Indication : tracer la représentation graphique de F dans un repère (O, I, J).

Enoncé 8

On lance dix fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à ces dix lancers le nombre de piles obtenu.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

Solution

On lance dix fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à ces dix lancers le nombre de piles obtenu.

a) Déterminons la loi de probabilité de X :

On sait que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

$P(X = 0) = C_{10}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; $P(X = 1) = C_{10}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$; $P(X = 2) = C_{10}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{8}$;

$P(X = 3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{7}$; $P(X = 4) = C_{10}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$; $P(X = 5) = C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5}$;

$P(X = 6) = C_{10}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$; $P(X = 7) = C_{10}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$; $P(X = 8) = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$;

$P(X = 9) = C_{10}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{9} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$; $P(X = 10) = C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$

b) Calculons l'espérance mathématique et la variance de X.

En effet $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ et $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^2 - [E(X)]^2$

Indication : calculer E(X) et V(X).

Enoncé 9

On lance 8 fois un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à ces huit lancers le nombre de multiples de 3 obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

Solution

On lance 8 fois un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à ces huit lancers le nombre de multiples de 3 obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

Les multiples de trois sur un dé sont : 3 et 6

Pour le lancer une fois de ce dé, la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est : $\boldsymbol{p} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

La répétition 8 fois du lancer de ce dé nous ramène au schéma de Bernoulli de paramètres $\boldsymbol{n = 8\ et\ p = \frac{1}{3}}$

$X(\Omega) = \{\mathbf{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}\}$

Ainsi, $P(X = 0) = \mathbf{C_8^0}\left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^8$; $P(X = 1) = \mathbf{C_8^1}\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$; $P(X = 2) = \mathbf{C_8^2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6$;

$P(X = 3) = \mathbf{C_8^3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$; $P(X = 4) = \mathbf{C_8^4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$; $P(X = 5) = \mathbf{C_8^5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$;

$P(X = 6) = \mathbf{C_8^6}\left(\frac{1}{3}\right)^6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$; $P(X = 7) = \mathbf{C_8^7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1$; $P(X = 8) = \mathbf{C_8^8}\left(\frac{1}{3}\right)^8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0$.

b) Calculons l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

En effet $E(X) = \boldsymbol{np}$; $V(X) = \boldsymbol{np(1 - p)}$ et $\boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{\boldsymbol{V(X)}}$

Ainsi, $E(X) = \mathbf{8} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$; $V(X) = \mathbf{8} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{8} = \frac{16}{9}$ et $\boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$.

Enoncé 10

Une loterie émet chaque semaine 20 billets parmi lesquels 6 gagnants. Une partie consiste à acheter deux billets.

a) Le parieur Dogo achète en une semaine deux billets. Calculer la probabilité pour qu'il perde.
b) On suppose que Dogo achète chaque semaine deux billets. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne exactement une fois dans un mois de 4 semaines ?
c) Parmi les 6 billets gagnants, il y – a un billet qui gagne 1000F, 2 billets qui gagnent 500F et 3 billets qui gagnent 200F.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain.
   1) Déterminer la loi de probabilité de X.
   2) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

Solution

Une loterie émet chaque semaine 20 billets parmi lesquels 6 gagnants. Une partie consiste à acheter deux billets.

a) Le parieur Dogo achète en une semaine deux billets. Calculons la probabilité pour qu'il perde.

   Désignons par E, l'évènement : « Dogo perd » :

   $P(E) = \frac{C_{14}^2}{C_{20}^2}$

b) On suppose que Dogo achète chaque semaine deux billets. Calculons la probabilité pour qu'il gagne exactement une fois dans un mois de 4 semaines.

   Désignons par S, l'évènement : « Dogo gagne exactement une fois dans un mois de 4 semaines » :

   $P(S) = \frac{C_{24}^2}{C_{80}^2}$

c) $X(\Omega) = \{\mathbf{400, 700, 1000, 1200, 1500}\}$

1) $P(X = 400) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$; $P(X = 700) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15}$; $P(X = 1000) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$; $P(X = 1200) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$; $P(X = 1500) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}$.

Sachant que $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$; $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - [E(X)]^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Indication : utiliser ces formules pour les calculs de E(X) ; V(X) et $\sigma(X)$.

Enoncé 5

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules blanches. On effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne, la boule tirée étant remise dans l'urne après tirage. On s'intéresse à l'issue de ces trois tirages au nombre de boules rouges obtenues. Ce nombre est ainsi la réalisation d'une variable aléatoire notée X. A chaque réalisation de cette variable aléatoire, on associe l'équation du second dégré (E) : $\boldsymbol{x^2 - 6x + 8X = 0}$.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Déterminer la probabilité pour que l'équation (E) admette deux racines réelles.
c) Déterminer la probabilité pour que l'équation (E) admette deux racines entières strictement positives.

Solution

Désignons par Ω l'univers associé à cette expérience : Card $\Omega = \mathbf{5^3}$.

Soit $X(\Omega)$, l'univers image de cette variable aléatoire : $X(\Omega) = \{\mathbf{0, 1, 2, 3}\}$

A chaque réalisation de cette variable aléatoire, on associe l'équation du second dégré (E) : $\boldsymbol{x^2 - 6x + 8X = 0}$.

a) Déterminons la loi de probabilité de X.

$P(X=0) = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$; $P(X=1) = \frac{3\times3\times2^2}{5^3} = \frac{36}{125}$; $P(X=2) = \frac{3\times3^2\times2}{5^3} = \frac{54}{125}$;

$\mathbf{P(X=3)} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$.

b) Déterminons la probabilité pour que l'équation (E) admette deux racines réelles.

Considérons l'équation (E) : $\boldsymbol{x^2 - 6x + 8X = 0}$

$$\Delta = \mathbf{36 - 4 \times 1 \times 8X = 36 - 32X = 4(9 - 8X)}.$$

L'équation admet deux racines réelles si et seulement si $\Delta > \mathbf{0}$ c'est-à-dire $9 - 8X \geq \mathbf{0}$,

$X \leq \frac{9}{8}$.

X prenant ses valeurs dans $X(\Omega) = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$, pour que cette condition soit réalisée, il faut que $X = 0$ ou $X = 1$.

La probabilité P cherchée est donc la somme des deux probabilités $\boldsymbol{P_0}$ et $\boldsymbol{P_1}$ puisque les deux évènements $(X = 1)$ et $(X = 1)$ sont incompatibles.

$P = \frac{44}{125}$.

La probabilité pour que (E) admette deux racines réelles est $P = \frac{44}{125}$.

c) Déterminons la probabilité pour que l'équation (E) admette deux racines entières strictement positives. Les deux racines doivent être réelles ; donc $X = 0$ ou $X = 1$.
Le produit des racines étant égale à 8X et la somme des racines égale à 6 ; les deux racines sont strictement positives si 8X est strictement positif ; la seule valeur acceptable est
$X = 1$. Calculons alors ces racines qui doivent être réelles.
Pour $X = 1$, $\boldsymbol{x^2 - 6x + 8 = 0}$

$$\Delta = \mathbf{36 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4}$$

Les deux racines sont : $\boldsymbol{x = 4; x = 2}$.
La probabilité cherchée est : $P(X=1) = \frac{36}{125}$.

Exercices d'entrainement de la compétence de base 3 du deuxième trimestre

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$.On désigne par s et s' les symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D').

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation sos' :

a) (D) : $x = 4$ et (D') : $x = y$

b) (D) : $x - y = 1$ et (D') : $x + y = 1$

c) (D) : $y = -1$ et (D') : $y = 2$

d) (D) : $x + 2y = 0$ et (D') : $2x - y + 1 = 0$

Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral dans le plan orienté. Trouver toutes les isométries qui laissent ce triangle globalement invariant.

Montrer que l'ensemble de ces isométries muni de la loi o est un groupe non commutatif.

Exercice 3

ABCD est un rectangle.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la droite (Δ) telle que :

a) $\mathbf{t}_{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}=\mathbf{s}_{\Delta}$ os $_{(AD)}$ b) $\mathbf{t}_{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}=$ s $_{(AD)}$ o $\mathbf{s}_{\Delta}$ c) $\mathbf{t}_{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}=\mathbf{s}_{\Delta}$ os $_{(BC)}$ d) $\mathbf{t}_{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}=$ s $_{(BC)}$ o $\mathbf{s}_{\Delta}$

Exercice 4

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O

Dans chacun des cas suivants, déterminer la droite (Δ) telle que :

a)r $(A, \frac{\pi}{3})=\mathbf{s}_{\Delta}$ os $_{(AB)}$ b) r $(A, \frac{\pi}{3})=\mathbf{s}_{(\mathbf{OA})}$ o $\mathbf{s}_{\Delta}$ c) r $(O, \frac{2\pi}{3})=\mathbf{s}_{(\mathbf{OA})}$ o $\mathbf{s}_{\Delta}$ d) r $(O, \frac{2\pi}{3})=\mathbf{s}_{\Delta}$ os $_{(OA)}$

Exercice 5

ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

Déterminer les applications suivantes :

a)r $(A, \frac{\pi}{3})$o $\mathbf{t}_{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}$ b)) $\mathbf{t}_{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}or(A, \frac{\pi}{3})$ c) r $(C, \frac{\pi}{3})$or$(B, \frac{\pi}{3})$or$(A, \frac{\pi}{3})$ d) r $(C, \frac{\pi}{3})$or$(A, \frac{\pi}{3})$r$(B, \frac{\pi}{3})$

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$. On donne A (2; 0), B (1; 1), C (—2; —1)

A' (3; 10), B' (4; 6) et C' (—3; —1).

Soit f l'application affine du plan dans le plan telle que : f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'

1) Démontrer que f est bijective
2) Déterminer l'expression analytique de f

Exercice 7

$\boldsymbol{f}$ est la rotation définie analytiquement par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{1} \\ \mathbf{y}' = -\frac{1}{2}\mathbf{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Déterminer les éléments caractéristiques de f.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$.On donne la droite (Δ) d'équation x-y=1. On note $\mathbf{s}_{\Delta}$ la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

1. Déterminer l'écriture analytique puis l'écriture complexe de $\mathbf{s}_{\Delta}$.
2. Soit $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ le vecteur de coordonnées (1 ; 2) et $\mathbf{t}_{\overrightarrow{\mathbf{w}}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{w}}$. On pose : $g=\mathbf{t}_{\overrightarrow{\mathbf{w}}} o \mathbf{s}_{\Delta}$. Montrer que g est une symétrie glissée, puis déterminer l'expression analytique puis complexe de g.

Exercice 9

Soit f une application affine telle que fof = id

1) Démontrer que f est bijective.
2) Soit A un point et M milieu de $[\mathbf{A}, \mathbf{f}(\mathbf{A})]$
   Démontrer que M est invariant par f
3) Soit (P) l'ensemble des points invariants par f
   a) Justifier que (P) est non vide
   b) Démontrer que si (P) est un singleton, alors f est une symétrie centrale

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$.Soit $\overrightarrow{\mathbf{u}}$le vecteur de coordonnées

$(-\frac{3}{2}; 2)$ et f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que :$\overrightarrow{\mathbf{OM'}}=(\overrightarrow{\mathbf{u}}.\overrightarrow{\mathbf{OM}})\,\vec{\mathbf{i}}+(\vec{\mathbf{i}}.\overrightarrow{\mathbf{OM}})\,\overrightarrow{\mathbf{u}}$

1) Donner l'expression analytique de f. En déduire que f est une application affine
2) Déterminer deux points A et B, distincts d O tels que f(A)=A et $\overrightarrow{\mathbf{Of}(\mathbf{B})}=-4\overrightarrow{\mathbf{OB}}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M(x; y), associe le point M'(x' ; y') tel que

$$\begin{cases} \mathbf{x'} = \frac{1}{3}(4\mathbf{x} - 2\mathbf{y} - 6) \\ \mathbf{y'} = \frac{1}{3}(2\mathbf{x} - \mathbf{y} - 12) \end{cases}$$

1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{MM'}}$ a une direction fixe que l'on précisera
2) Démontrer que fof=f
3) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f

   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M(x; y), associe le point M'(x' ; y') tel que

$$\begin{cases} \mathbf{x'} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}}(\mathbf{5x} - \mathbf{12y} + \mathbf{24}) \\ \mathbf{y'} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}}(-\mathbf{12x} - \mathbf{5y} + \mathbf{36}) \end{cases}$$

1) Démontrer que f est involutive
2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera
3) Soit M un point et M' son image par f
   a) Démontrer que le milieu de $[\mathbf{M}, \mathbf{M'}]$ appartient à (D)
   b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{MM'}}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D)
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

Exercice 13

de foyer F et de directrice (D) :

Dans chacun des cas, déterminer une équation de la parabole $(\mathcal{P})$ de foyer F et de directrice (D) :

a) F(2 ;0) et (D) : $\boldsymbol{x = 1}$ *; b) F(-1 ;2) et (D) :* $\boldsymbol{x = 1}$ *; c) F(1 ;1) et (D) :* $\boldsymbol{y = -4}$

Exercice 14

Dans chacun des cas, déterminer une équation de la conique $(\mathbf{C})$ de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité e:

a) F (1 ; 4), (D) : $\mathbf{y + 3 = 0}$ et e=2
b) F (-2 ; 3), (D) : $\mathbf{x + 5 = 0}$ et e=$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
c) F (5 ; 2), (D) : $\mathbf{y - 1 = 0}$ et e=1
d) F (6 ; -2), (D) : $\mathbf{x = 2,8}$ et e=$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$
e) F ($\frac{\mathbf{-11}}{\mathbf{2}}$; 5), (D) : $\mathbf{x = -\frac{1}{2}}$ **et e** $\mathbf{= 1}$

Exercice 15

1. Dans chacun des cas suivants, démontrer que (C) est une équation d'une conique à centre dont on précisera les éléments caractéristiques ;
2. Déterminer ensuite une représentation paramétrique de chaque conique trouvée :

a) (C) :$\mathbf{4x^2 + 9y^2 - 36 = 0}$

f) (C) :$\mathbf{4x^2 - y^2 = 2y}$

b) (C) :$9x^2 - y^2 + 18 = 0$
c) (C) :$9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$
d) (C) :$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
e) (C) :$4y^2 - 24y + x + 36 = 0$
g) (C) :$x^2 + 6x + y = 0$
h) (C) :$4x^2 - y^2 + x + 4y - 48 = 0$
i) (C) :$y = 2\sqrt{x^2 - 4}$

Exercice 16

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.

Dans chacun des cas suivants, trouver l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

a) $(|x| - 1)(|y| - 1) \leq 1$

b) $x|x| + 4y|y| = 1$

Exercice 17

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'ellipse donnée par une représentation paramétrique :

   a) : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\theta - 1 \\ y = \frac{3}{4}b\sin\theta + 2 \end{cases}$ $\theta \in [-\pi; \pi[$. b). $\begin{cases} x = 2\cos\theta - 3 \\ y = 3\sin\theta + 1 \end{cases}$ $\theta \in [-\pi; \pi[$

2. Dans chacun des cas et dans un repère convenablement choisi, déterminer une représentation paramétrique de la conique définie par :

   a) $2x^2 - y^2 - 4y - 12 = 0$ b) $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$ c) $x^2 - 6x - 3y + 3 = 0$

Exercice 18

On donne les points F(-2, 2) et F'(4, 2). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

MF+MF'=10 et $|MF - MF'|$=4.

Exercice 19

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne A(2,-1) et A'(-2,3).

1. Déterminer une équation de l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$=1
2. Déterminer une équation de l'image de $(\mathcal{C})$:
   a) Par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{i})$ et de rapport $\frac{2}{3}$.
   b) Par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{j})$ et de rapport $\frac{2}{3}$.

Exercice 20

Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(x, y)$ du plan, associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y \end{cases}$$

1) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.
2) Soit (E) l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 4$
   a) Déterminer une équation de (E') image de (E) par f.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (E').
   c) Construire (E) et (E') dans un même repère.

Exercice 21

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct.

Soit (E) l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la relation :

$$2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = 1$$

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et(E') image de (E) par r.

a) Déterminer une équation cartésienne de (E').
b) Déterminer puis tracer (E').

Exercice 22

A tout point M d'affixe z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}).$$

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel.
2. On suppose que M décrive un cercle de centre O et de rayon 2 :
   a) Vérifier que $z = 2e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
   b) Démontrer que M' décrit une conique dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 23

A tout réel m, on associe la conique (Γ_m) d'ion équation $-mx^2 + y^2 - 2x + 2my = 0$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble des points appartenant à toutes les coniques (Γ_m).
2. Pour quelles valeurs de m (Γ_m) est-elle :
   a) Une parabole ?
   b) Un cercle ?
   c) Une hyperbole équilatère ?
3) Lorsqu'une conique (Γ_m) possède un centre Ω_m,quel est l'ensemble des points Ω_m?

Exercice 24

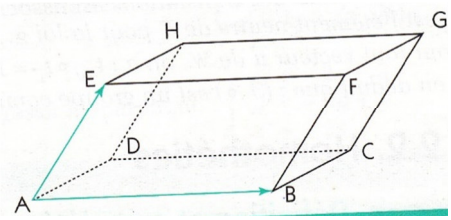
Soit $(\mathcal{E})$ une ellipse d'équation $\mathbf{4x^2 + y^2 = 36}$ et les points $A\binom{3}{0}$ **et** $\mathbf{B}\binom{0}{6}$.
Soit M un point de $(\mathcal{E})$ **et** $\mathbf{M'}$ isobarycentre de A, B et M.

1. Démontrer que M' est image de M par une transformation que l'on précisera.
2. En-déduire une équation de $(\mathcal{E}')$ ensemble de points M' lorsque M décrit $(\mathcal{E})$.
3. Tracer $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$ dans le même repère.

Exercices types de la compétence de base 3 du deuxième trimestre et corrigés

Enoncé 1

ABCDEFGH est un pavé.



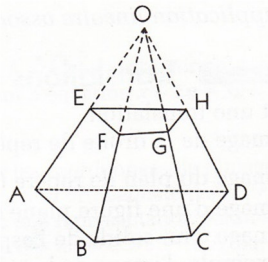
1) Déterminer les images des points A, B, C et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}$.
2) Déterminer les images les images des points A, D, H et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Solution

1) Les point E, F, G et H sont les images respectives des points A, B, C et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}$.
2) Les points B, C, G et F sont les images respectives des points A, D, H et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Enoncé 2

On considère la pyramide OABCD ci-dessous et on désigne par ABCDEFGH le tronc de pyramide tel que E, F, G et H soient les milieux respectifs des arêtes $[\boldsymbol{OA}]$, $[\boldsymbol{OB}]$, $[\boldsymbol{OC}]$ et $[\boldsymbol{OD}]$.



1) Déterminer les images des points A, B, C et D par l'homothétie $\boldsymbol{h}$ de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.
2) Déterminer les images des points E, F, G et H par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

Solution

1) Les points E, F, G et H sont les images respectives des points A, B, C et D par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.
2) Les points A, B, C et D sont les images respectives des points E, F, G et H par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

Enoncé 3

Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application ayant pour expression analytique $\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y \\ z' = 3z + 2 \end{cases}$

Solution

En effet, l'application ayant pour expression analytique $\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y \\ z' = 3z + 2 \end{cases}$ est une homothétie de rapport 3 et de centre $\Omega\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Enoncé 4

1) On donne les points A$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on considère les homothéties $\boldsymbol{h_1}_{\left(A,\ \frac{1}{2}\right)}$, $\boldsymbol{h_2}_{(B,\ 2)}$, $\boldsymbol{h_3}_{(C,-4)}$.

Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'expression analytique de chacune des transformations suivantes : $\boldsymbol{h_1} \circ \boldsymbol{h_3}$; $\boldsymbol{h_2} \circ \boldsymbol{h_1}$

2) h est l'homothétie de centre A$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ et de rapport – 4 et t, la translation de vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'expression analytique de chacune des transformations suivantes : $h \circ t$ et $t \circ h$.

Solution

1) $\boldsymbol{h_1} \circ \boldsymbol{h_3}$ est l'homothétie de rapport – 2. Son expression analytique est : $\begin{cases} \boldsymbol{x' = -2x + \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{y' = -2y + 2} \\ \boldsymbol{z' = -2z - \frac{5}{2}} \end{cases}$. Le centre de cette homothétie est le point I$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{h_2} \circ \boldsymbol{h_1}$ est une translation. Son expression analytique est : $\begin{cases} \boldsymbol{x' = x + 2} \\ \boldsymbol{y' = y - 1} \\ \boldsymbol{z' = z - 1} \end{cases}$. $\boldsymbol{h_2} \circ \boldsymbol{h_1}$ est donc une translation de vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$.

2) h est l'homothétie de centre A$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ et de rapport – 4 et t, la translation de vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport – 4.

$h \circ t$ est l'homothétie de rapport – 4. L'expression analytique de $h \circ t$ est :

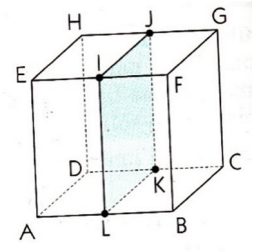
$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -4x + 8} \\ \boldsymbol{y' = -4y + 1} \\ \boldsymbol{z' = -4z - 9} \end{cases}$; le centre de cette homothétie est le point J$\begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix}$.

$t \circ h$ est l'homothétie de rapport – 4. L'expression analytique de $t \circ h$ est :

$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -4x - 2} \\ \boldsymbol{y' = -4y + 6} \\ \boldsymbol{z' = -4z - 4} \end{cases}$; le centre de cette homothétie est le point K$\begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Enoncé 5

ABCDEFGH est un cube, I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[\boldsymbol{EF}]$; $[\boldsymbol{HG}]$; $[\boldsymbol{DC}]$ et $[\boldsymbol{AB}]$.



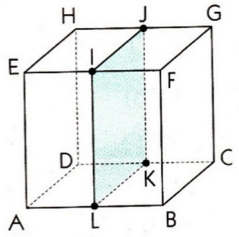
1) Déterminer la nature de la composée des réflexions de plans (ADE) et (IJK).
2) Déterminer la nature de la composée des réflexions de plans (ABC) et (EFG).

Solution

1) La composée des réflexions de plans (ADE) et (IJK) est la translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.
2) La translation de vecteur $2\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}$ est la composée des réflexions de plans (ABC) et (EFG).

Enoncé 6

ABCDEFGH est un cube, I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[\boldsymbol{EF}]$; $[\boldsymbol{HG}]$; $[\boldsymbol{DC}]$ et $[\boldsymbol{AB}]$.



1) Déterminer la nature de la composée des réflexions de plans (ADE) et (CGH).
2) Déterminer nature de la composée des réflexions de plans (ABC) et (IJK).

Solution

ABCDEFGH est un cube, I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[\boldsymbol{EF}]$; $[\boldsymbol{HG}]$; $[\boldsymbol{DC}]$ et $[\boldsymbol{AB}]$.

1) La composée des réflexions de plans (ADE) et (CGH) est le demi-tour d'axe (DH).
2) La composée des réflexions de plans (ABC) et (IJK) est le demi-tour d'axe (LK).

Enoncé 7

Le plan est muni du repère orthogonalité $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$

Soit $\boldsymbol{f}$ une rotation de centre A $(1,-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Déterminer une expression analytique de $\boldsymbol{f}$.

Solution

Le plan est muni du repère orthogonalité $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$

Soit $\boldsymbol{f}$ une rotation de centre A $(1,-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Déterminons une expression analytique de $\boldsymbol{f}$.

Nous allons utiliser la forme complexe de $\boldsymbol{f}$.

Posons $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ et son image $\boldsymbol{M'}(\boldsymbol{x'},\boldsymbol{y'})$ par $\boldsymbol{f}$. Si M est l'image du complexe $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{iy}$ et M' celle du complexe $\boldsymbol{z'}=\boldsymbol{x'}+\boldsymbol{iy'}$ et $\boldsymbol{\omega}$ le complexe affixe de A.

On a $\boldsymbol{z'}-\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{e}^{i\frac{\pi}{3}}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\omega})$

En utilisant les formes algébriques, on a :

$$\boldsymbol{x'}+\boldsymbol{iy'}-(\mathbf{1}-\boldsymbol{i})=(\boldsymbol{cos}\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{isin}\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{iy}-(\mathbf{1}-\boldsymbol{i}))\Leftrightarrow\boldsymbol{x'}+\boldsymbol{iy'}-\mathbf{1}+\boldsymbol{i}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{iy}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\boldsymbol{x'}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ \boldsymbol{y'}=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}-\mathbf{1}\end{cases}$$

Enoncé 8

Soit (D) la droite d'équation $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\mathbf{1}=\mathbf{0}$

Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe (D).

Solution

Soit (D) la droite d'équation $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\mathbf{1}=\mathbf{0}$

Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe (D).

Notons $\boldsymbol{s}$ cette symétrie .

Si $\boldsymbol{M'}(\boldsymbol{x'},\boldsymbol{y'})$ est l'image de $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ par s alors $\overrightarrow{\mathbf{MM'}}\perp\vec{\mathbf{u}}$, où $\vec{\mathbf{u}}$ est un vecteur directeur de (D)et K, milieu de $[\mathbf{MM'}]$ appartient à (D).

$$\boldsymbol{M'}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{M})\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{\mathbf{MM'}}.\vec{\mathbf{u}}=\mathbf{0}\\ \mathbf{K}\epsilon(\mathbf{D})\end{cases}$$

$\overrightarrow{\mathbf{MM'}}(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y})$ $\mathrm{K}(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{x'}}{\mathbf{2}};\frac{\mathbf{y}+\mathbf{y'}}{\mathbf{2}})$ et $\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{1};\mathbf{1})$

M'=s(M) $\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{x'}-\mathbf{x}+\mathbf{y'}-\mathbf{y}=\mathbf{0}\\ \frac{\mathbf{x}+\mathbf{x'}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{y}+\mathbf{y'}}{\mathbf{2}}-\mathbf{1}=\mathbf{0}\end{cases}$ et on a $\begin{cases}\mathbf{x'}=\mathbf{y}+\mathbf{1}\\ \mathbf{y'}=\mathbf{x}-\mathbf{1}\end{cases}$

Enoncé 9

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne A (3 ; 2), B (1 ; 1) et C (0 ; 1).

Soit A' (6 ; 6), B' (3 ; 3) et C' (2 ; 1) les images respectives de A B et C par l'application affine $\boldsymbol{f}$.

Déterminer analytiquement l'application $\boldsymbol{f}$.

Solution

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne A (3 ; 2), B (1 ; 1) et C (0 ; 1).

Soit A' (6 ; 6), B' (3 ; 3) et C' (2 ; 1) les images respectives de A B et C par l'application affine $\boldsymbol{f}$.

Déterminons analytiquement l'application $\boldsymbol{f}$.

Soit M($\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$) et M'($\boldsymbol{x}'$; $\boldsymbol{y}'$) image de M par $\boldsymbol{f}$.

Désignons par $\boldsymbol{\varphi}$ l'application linéaire associée à f.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \\ \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\boldsymbol{\varphi}(\vec{\imath}) - \boldsymbol{\varphi}(\vec{\jmath}) = -3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} \\ -3\boldsymbol{\varphi}(\vec{\imath}) - \boldsymbol{\varphi}(\vec{\jmath}) = -4\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} \end{cases}$$

On en déduit $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$

Par ailleurs $\boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}[(x-3)\vec{\imath} + (y-2)\vec{\jmath}] = (x'-6)\,\vec{\imath} + (y'-6)\vec{\jmath}$

Comme **$\boldsymbol{\varphi}$ est linéaire et en remplaçant $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\imath})$ et $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\jmath})$** par leurs expressions on a :

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 2x - y + 2 \end{cases}$$

Enoncé 10

Soit $\boldsymbol{\varphi}$ une application linéaire associée à une application affine $\boldsymbol{f}$ telle que : pour tout vecteur $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{u}}) = 2\vec{\boldsymbol{u}}$. Soit K ($\mathbf{1}$; $\mathbf{2}$) et K' ($\mathbf{3}$; $-\mathbf{1}$) son image par $\boldsymbol{f}$.

Déterminer l'expression analytique de $\boldsymbol{f}$.

Solution

Soit $\boldsymbol{\varphi}$ une application linéaire associée à une application affine $\boldsymbol{f}$ telle que : pour tout vecteur $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{u}}) = 2\vec{\boldsymbol{u}}$. Soit K ($\mathbf{1}$; $\mathbf{2}$) et K' ($\mathbf{3}$; $-\mathbf{1}$) son image par $\boldsymbol{f}$.

Déterminer l'expression analytique de $\boldsymbol{f}$.

Soit M($\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$) un point et M'($\boldsymbol{x}'$; $\boldsymbol{y}'$) son image par $\boldsymbol{f}$.

$$\overrightarrow{K'M'} = 2\,\overrightarrow{KM}$$

En remplaçant ces vecteurs par leurs coordonnées, on a :

$$\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 5 \end{cases}$$

Enoncé 11

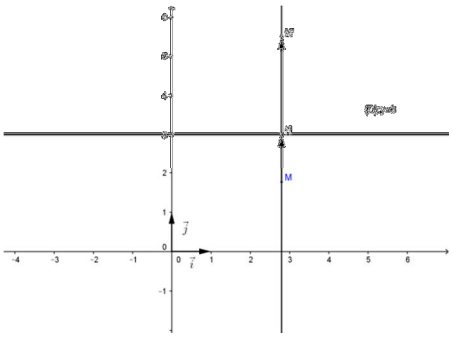
Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$.

Déterminer l'expression analytique de l'affinité d'axe la droite d'équation $\boldsymbol{y} = \mathbf{3}$, de direction $\vec{\mathbf{j}}$ et de rapport -2.

Solution

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$.

Déterminons l'expression analytique de l'affinité d'axe la droite d'équation $\boldsymbol{y} = \mathbf{3}$, de direction $\vec{\mathbf{j}}$ et de rapport -2.



Soit $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ image de $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par l'affinité.

On doit avoir $\overrightarrow{\mathbf{HM'}} = -\mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{HM}}$

$H\begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathbf{HM'}}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathbf{HM}}\begin{pmatrix} 0 \\ y-3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathbf{HM'}} = -\mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathbf{HM}} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' - 3 = -2(y-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -2y + 9 \end{cases}$$

Enoncé 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$ Déterminer la nature de la conique et les éléments caractéristiques pour chacune des équations suivantes :

1) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} + \mathbf{1}$
2) $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$
3) $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$

Solution

1) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} + \mathbf{1} \;\leftrightarrow\; \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \;\leftrightarrow \left(\boldsymbol{y} - \frac{3}{4}\right) = \left(\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\right)^2$

Soit $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ la conique considérée. $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ est la parabole de sommet $\boldsymbol{S}(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ d'axe focal la droite d'équation $= -\frac{1}{2}$, de paramètre $\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}$ et donc de foyer $\boldsymbol{F}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \mathbf{1}\right)$ et de directrice d'équation $\boldsymbol{y} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

2) Soit $\boldsymbol{S}$ la conique d'équation $\boldsymbol{x^2 + x + 2y^2 + y = 0}$

On a : $\boldsymbol{x^2 + x + 2y^2 + y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(\sqrt{\frac{3}{8}})^2} + \frac{(y+\frac{1}{4})^2}{(\frac{\sqrt{3}}{4})^2} = 1}$

$\boldsymbol{S}$ est donc une ellipse dont le centre $\boldsymbol{\Omega}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ avec $\boldsymbol{a = \sqrt{\frac{3}{8}}}$ $\boldsymbol{et\ b = \frac{\sqrt{3}}{4}}$ $\boldsymbol{o}$ù $\boldsymbol{a >}$ $\boldsymbol{b}$. L'axe focal est la droite d'équation $\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}}$ et les sommets de l'ellipse sont :

$\boldsymbol{A}(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{4})$, $\boldsymbol{A'}\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{4}\right)$, $\boldsymbol{B}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4})$ et $\boldsymbol{B'}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4})$

De plus, on a :$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}}$. L'excentricité $\boldsymbol{e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ et les foyers sont $\boldsymbol{F}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$ et $'(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$. Les directrices sont les droites d'équations : $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

3) $\boldsymbol{x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -1}$ donc la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ est une hyperbole de centre $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et d'axe focal la droite d'équation $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$ avec $\boldsymbol{a = b = 1}$.

Les sommets sont $\boldsymbol{B}(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et $\boldsymbol{B'}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ avec $\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}}$ puis l'excentricité $\boldsymbol{e = \frac{c}{b} = \sqrt{2}}$

Les foyers sont $\boldsymbol{F}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{2})$ et $\boldsymbol{F'}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2})$ et les directrices sont les droites d'équations : $\boldsymbol{y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$ et $\boldsymbol{y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Enoncé 13

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$. Déterminer, pour chacune de ces équations cartésiennes, la nature et les éléments caractéristiques de la conique.

1) $\boldsymbol{y^2 = -x}$
2) $\boldsymbol{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$
3) $\boldsymbol{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$

Solution

1) $\boldsymbol{y^2 = -x}$ et soit $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ la courbe considérée. $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ est la parabole de sommet O, d'axe focal (Ox), de paramètre $\boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$ tournée vers le x négatifs et dont le foyer est le point $\boldsymbol{F}(-\frac{1}{4}, \boldsymbol{0})$ et la directrice est la droite d'équation : $\boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$
2) $\boldsymbol{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1}$.

La courbe $\mathcal{C}$ correspondante est l'ellipse de centre O avec $\boldsymbol{a = 5 > 3 = b}$. Donc l'axe focal est l'axe des abscisses $(\boldsymbol{Ox})$ et les sommets de l'ellipse sont les points $\boldsymbol{A(5,0)}$, $\boldsymbol{A'(-5,0)}$, $\boldsymbol{B(0,3)}$ et $\boldsymbol{B'(0,-3)}$ comme $\boldsymbol{c = \sqrt{b^2 - a^2} = 4}$ alors les foyers de l'ellipse sont les points $\boldsymbol{F(0,4)}$ et $\boldsymbol{F'(0,-4)}$. L'excentricité vaut $= \frac{c}{b} = \frac{4}{5}$.

3) Soit $\boldsymbol{S}$ la courbe dont l'équation cartésienne est $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

On a : $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ donc $\boldsymbol{S}$ est une hyperbole de centre O et d'axe focal $(\boldsymbol{Ox})$ avec $\boldsymbol{a = 4\ et\ b = 3}$ donc $\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5}$ et l'excentricité est $= \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

Les sommets de l'hyperbole $\boldsymbol{S}$ sont les points $\boldsymbol{A(4,0)}$ et $\boldsymbol{A'(-4,0)}$ alors que les foyers sont les points $\boldsymbol{F(5,0)}$ et $\boldsymbol{F'(-5,0)}$. Les directrices sont les droites d'équations respectives $\boldsymbol{x = \frac{a}{e} = \frac{16}{5}}$ et $\boldsymbol{x = -\frac{16}{5}}$. Cette hyperbole a pour asymptotes les droites d'équations respectives $\boldsymbol{y = \frac{3}{4}x}$ et $\boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x}$.

Enoncé 14

1) Déterminer une équation cartésienne de la parabole de foyer $\boldsymbol{F(\frac{1}{2}, 2)}$ et de directrice D : $\boldsymbol{x = 3}$.
2) Déterminer une équation cartésienne de la conique d'excentricité $\boldsymbol{e = 5}$ de foyer $\boldsymbol{F(3,2)}$ et de directrice associée d'équation $\boldsymbol{y = 1}$.
3) Déterminer une équation cartésienne de l'ellipse d'excentricité $\boldsymbol{e = 0,5}$, de foyer $\boldsymbol{F(1,-1)}$ et de directrice la droite d'équation$\boldsymbol{y = x}$.

Solution

Parabole de foyer $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ $\boldsymbol{et\ de\ directrice\ D}$: $\boldsymbol{x = 3}$. On sait qu'une parabole P est telle que : $\boldsymbol{M(x,y)\epsilon(p)} \Leftrightarrow$ MF^2 =d(M, D)^2 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + (2-y)^2 = \frac{(x-3)^2}{1^2+0^2}$ Donc M(x,y) ϵ(p) $\Leftrightarrow \frac{1}{4} - x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = x^2 - 6x + 9$

Donc $(\boldsymbol{p})$a pour équation cartésienne : $\boldsymbol{4y^2 + 20x - 16y - 19 = 0}$

1) Conique d'excentricité 5, de foyer $\boldsymbol{F(3,2)}$ et de directrice associée d'équation $\boldsymbol{y = 1}$. Comme l'excentricité $\boldsymbol{e = 5 > 1}$ alors cette conique est une hyperbole$(\boldsymbol{H})$ et on a : $\boldsymbol{M(x,y)\epsilon(H)} \leftrightarrow \boldsymbol{MF^2 = 5^2 MD^2} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{(y-1)^2}{0^2+1^2}$ donc $\boldsymbol{M(x,y)\epsilon(H)} \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = y^2 - 2y + 1}$.
   Il s'ensuit que $(\boldsymbol{H})$ a pour équation cartésienne : $\boldsymbol{x^2 - 6x - 2y + 12 = 0}$
2) Ellipse d'excentricité 0,5 , de foyer $\boldsymbol{F(1,-1)}$ et de directrice $\boldsymbol{y = x}$

Si $\boldsymbol{M(x,y)\epsilon\ \mathcal{C}} \Leftrightarrow \boldsymbol{MF^2 = (0,5)^2 MD^2} \leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}\frac{(y-x)^2}{2}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = \frac{1}{8}(y^2 - 2yx + x^2)}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 16x + 8y^2 + 16y + 16 = y^2 - 2yx + x^2$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 2xy - 16x + 7y^2 + 16y + 16 = 0$$

L'ellipse d'excentricité 0,5 , de foyer $F(1, -1)$ et de directrice $y = x$ a pour équation cartésienne $\mathcal{C}$:

$$7x^2 + 7y^2 + 2xy - 16x + 16y + 16 = 0$$

Enoncé 15

On considère dans $\mathbb{N}$, l'équation : $x^2 - 9y^2 = -35$

1) Déterminer la nature de la conique $\mathcal{C}$ dont l'équation cartésienne est : $x^2 - 9y^2 = -35$
2) Comment peux-tu interpréter géométriquement la résolution de l'équation donnée dans $\mathbb{N}$?
3) Résoudre alors l'équation : $x^2 - 9y^2 = -35$

Solution

1) L'équation : $x^2 - 9y^2 = -35 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{35} + \frac{(3y)^2}{35} = 1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{\frac{35}{9}} = 1$ donc l'équation $x^2 - 9y^2 = -35$ est l'équation d'une hyperbole.
2) La résolution de l'équation $x^2 - 9y^2 = -35$ peut–être interprétée comme la recherche des points appartenant à l'hyperbole dont les coordonnées sont des entiers naturels.
3) Résolution de l'équation $x^2 - 9y^2 = -35$
   $x^2 - 9y^2 = -35 \Leftrightarrow (x - 3y)(x + 3y) = -35$
   $\Leftrightarrow (3y - x)(3y + x) = 35$ or les seuls diviseurs de 35 sont 1, 5, 7, 35.
   On a donc $x^2 - 9y^2 = -35 \Leftrightarrow (3y - x)(3y + x) = 35$
   $\Leftrightarrow 3y - x = 1$ et $3y + x = 35$ ou $3y - x = 35$ et $3y + x = 1$
   Ou $3y - x = 5$ et $3y + x = 7$ ou$3y - x = 7$ et $3y + x = 5$

Les solutions retenues sont donc :$y = 6$ et $x = 17$ ou $y = 2$ et $x = 1$

Donc $x^2 - 9y^2 = -35 \leftrightarrow (x, y) = (1;\ 2)$ ou $(x, y) = (17;\ 6)$

EVALUATION

Exercice 1

A) Soit g, la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = ln(x) + x - 3$.
1) Justifier que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$;

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3 ;

3) En déduire le signe de g en fonction de x.

B) Soit f, la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(ln(x) - 2) + 2$.

On appelle $(\mathcal{C})$, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2) a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$;

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0;\ +\infty[$.

C) Soit $(\mathcal{C}')$, la courbe d'équation $y = ln(x)$.

1) a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;\ +\infty[$, $f(x) - ln(x) = \frac{2-ln(x)}{x}$;

b)En déduire que les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2) On admet que la fonction H définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $H(x) = \frac{1}{2}\left(ln(x)\right)^2$ est une primitive de la fonction h définie sur $]0;\ +\infty[$ par $h(x) = \frac{ln(x)}{x}$.

a) Calculer $I = \int_1^{e^2} \frac{2-ln(x)}{x} dx$;

b) Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 2

On considère la suite u_n définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+2} \end{cases}$

1) Démontrer que la suite $v_n = \frac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
2) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
3) Calculer $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.
4) Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3

Soit $(\mathcal{H})$ une hyperbole d'équation $x^2 - 3y^2 = 3$.

1. Déterminer une équation de $(\mathcal{H}')$ image de $(\mathcal{H})$ par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{H}')$ image de $(\mathcal{H})$ par r.
3. Tracer $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}')$ dans le même repère.

Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice :

- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

Conseils et orientation de l'enseignant :

- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
.....

Evaluation de la compétence :

Troisième trimestre

Programmation horaire du 3e trimestre

3e trimestre	Compétences	Chapitres	Titres des chapitres	Durée d'exécution			Durée des chapitres	Nombre d'heures du Trimestre
				Cours	TD	Evaluation		
Avril- juin	CB1	6	**Calcul intégral**	10H	4H	2H ou 4H	14H	48H en TD 72H en TC
		7	**Equations différentielles**	8H	4H		12H	
(4-13 Avril : Congé)	CB2	6	**Statistique**	8H	2H		10H	
		7	**Espace vectoriel et applications linéaires**	12H	4H		16H	
9 semaines	CB3	5	**Géométrie de l'espace**	10H	2H	2H ou 4H	12H	

FICHE DE PROGRESSION

Trimestre	Période	Contenus		
		CB 1 : Analyse	CB 2 : Algèbre – Statistique - Probabilité	CB 3 : Géométrie
3	**1er Avril au 10 Mai**	- **Calcul intégral**	- **Statistiques** - **Espace vectoriel et Applications linéaires**	
	11 Mai au 10 Juin	- **Equations différentielles**		- **Géométrie de l'espace**

Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Terminale D Troisième trimestre

Compétence de Base 1

Terminale D–CB1 : **L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre le calcul intégral et les équations différentielles.**		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
– **Calcul intégral**	- **Définir les primitives de fonction continue.** - **Déterminer la primitive de fonctions usuelles.** - **Détermination de la primitive de fonctions continues prenant une valeur donnée en un point donné.** - **Effectuer des opérations sur les primitives.** - **Calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé [a, b].** - **Utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire.** - **Utiliser différentes techniques pour le calcul intégral :** **. décomposition** **. linéarisation** **. intégration par parties** **. changement de variables affines.** - **Encadrer une intégrale :** **. appliquer les inégalités des accroissements finis** – **. appliquer l'inégalité de la moyenne.** – **Reconnaitre une équation différentielle.** – **Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constants sans second membre (avec ou sans condition initiale).** – **Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation**	- **Définition d'une primitive de fonction continue.** - **Détermination des primitives des fonctions usuelles.** - **Détermination de la primitive de fonctions continues prenant une valeur donnée en un point donné.** - **Opérations sur les primitives.** - **Calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé [a, b].** - **Utilisation du calcul intégral pour déterminer une aire.** - **Utilisation de différentes techniques pour le calcul intégral :** **. décomposition** **. linéarisation** **. intégration par parties** **. changement de variables affines.** - **Encadrement d'une intégrale :** **. application des inégalités des accroissements finis** – **. application de l'inégalité de la moyenne.** – **Reconnaissance d'une équation différentielle.** – **Résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constants sans second membre (avec ou sans condition initiale).** – **Vérification qu'une fonction est solution d'une équation**

	– Equations différentielles ➢ Equations différentielles de premier ordre ➢ Equations différentielles de second ordre	différentielle de premier ordre à coefficient constants. – Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficient constants sans second membre avec ou sans condition initiale. – Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle de second ordre à coefficient constants.	différentielle de premier ordre à coefficient constants. – Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficient constants sans second membre (avec ou sans condition initiale). – Vérification qu'une fonction est solution d'une équation différentielle de second ordre à coefficient constants.

Compétence de Base 2

Terminale D–CB2 : **L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre les statistiques, l'espace vectoriel et les applications linéaires.**		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
- **Statistiques**	- **Définir une série statistique à deux caractères.** - **Représenter un nuage de points d'une série statistique à deux caractères (cas de points pondérés, point moyen).** - **Déterminer un ajustement linéaire d'une série statistique à deux caractères par la méthode de moindres carrés.** - **Déterminer la corrélation linéaire d'une série statistique à deux caractères.**	- **Définition d'une série statistique à deux caractères.** - **Représentation d'un nuage de points d'une série statistique à deux caractères (cas de points pondérés, point moyen).** - **Détermination d'un ajustement linéaire d'une série statistique à deux caractères par la méthode de moindres carrés.** - **Détermination de la corrélation linéaire d'une série statistique à deux caractères.**
- **Espace vectoriel** ➢ **Sous espace vectoriel** ➢ **Application linéaire**	- **Démontrer qu'un ensemble muni de deux lois est un espace vectoriel sur un corps.** - **Définir un sous-espace vectoriel.** - **Démontrer un sous-espace vectoriel.** - **Définir une famille de vecteurs (famille libre, famille liée, famille génératrice, famille équivalente).** - **Définir une application linéaire** - **Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.**	- **Démonstration de la structure d'espace vectoriel sur un corps d'un ensemble muni de deux lois.** - **Définition d'un sous-espace vectoriel.** - **Démonstration de la structure de sous-espace vectoriel.** - **Définition d'une famille de vecteurs (famille libre, famille liée, famille génératrice, famille équivalente).** - **Définition d'une application linéaire.** - **Démonstration de la linéarité d'une application.** - **Détermination du noyau et de l'image d'une application linéaire.**

Compétence de Base 3

Terminale D–CB2 : **L'élève doit pouvoir résoudre des situations-problèmes significatives qui mettent en œuvre la géométrie de l'espace.**		
Objectifs d'apprentissage (Ressources)		
Savoirs	Savoir-faire	Activités suggérées
- **Géométrie de l'espace**	- **Définir le produit vectoriel de vecteurs.** - **Utiliser le produit vectoriel pour déterminer l'équation de plan, pour calculer la distance d'un point à un plan** - **Utiliser la définition et les propriétés d'une projection orthogonale sur un plan ou une droite.** - **Déterminer l'expression analytique d'une projection sur une droite parallèle à l'un des axes ou sur un plan parallèle à l'un des trois plans du repère.** - **Utiliser la propriété caractéristique des homothéties, des translations.** - **Utiliser la définition d'une réflexion.** - **Démontrer le parallélisme ou l'orthogonalité de droites à l'aide de transformations de l'espace.** - **Construire l'image de configurations simples par une transformation de l'espace.** - **Construire l'image de configurations simples par la composée de transformations de l'espace.** - **Déterminer les lieux géométriques par l'utilisation des transformations de l'espace.**	- **Définition du produit vectoriel de vecteurs.** - **Utilisation du produit vectoriel pour déterminer l'équation du plan, pour calculer la distance d'un point à un plan.** - **Utilisation de la définition et les propriétés d'une projection orthogonale sur un plan ou une droite.** - **Détermination de l'expression analytique d'une projection sur une droite parallèle à l'un des axes ou sur un plan parallèle à l'un des trois plans du repère.** - **Utilisation de la propriété caractéristique des homothéties, des translations.** - **Utilisation de la définition d'une réflexion.** - **Démonstration du parallélisme ou de l'orthogonalité de droites à l'aide de transformations de l'espace.** - **Construction de l'image de configurations simples par une transformation de l'espace.** - **Construction de l'image de configurations simples par la composée de transformations de l'espace.** - **Détermination des lieux géométriques par l'utilisation des transformations de l'espace..**

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES

Orientations :

1. *Suivre minutieusement les horaires des séances de développement des compétences prévues dans l'emploi du temps ;*
2. *Exploiter par ordre les fiches de développement des compétences ;*
3. *Traiter dans l'ordre les exercices en lien avec chaque compétence ;*
4. *Relever toutes les difficultés rencontrées lors du traitement des exercices ;*
5. *Participer aux séances de développement de compétences (Call Center) ;*
6. *Noter tous les conseils et orientations des enseignants.*

Leçons de la compétence de base 1 du troisième trimestre

Leçon : intégration

SEQUENCE 1

Primitives d'une fonction
Objectif
Déterminer les primitives des fonctions usuelles
Primitives d'une fonction
La leçon sur les dérivées vue dans les classes antérieures vous permet de dire que :

- la fonction $f: \boldsymbol{x} \longmapsto 1$ est la dérivée de $\mathrm{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$
- la fonction $f: \boldsymbol{x} \longmapsto 3\boldsymbol{x}^2$ est la dérivée $\mathrm{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3$
- la fonction $f: \boldsymbol{x} \longmapsto \cos \boldsymbol{x}$ est la dérivée de $\mathrm{F}(\boldsymbol{x}) = \sin \boldsymbol{x}$

Définition et propriétés

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F de I vers $\mathbb{R}$*, dérivable sur I et telle que, pour tout élément* $\boldsymbol{x}$ *de I,* $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$.

Exemples

1) La fonction $\mathrm{F} : \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de
   $f: \boldsymbol{x} \longmapsto 2\boldsymbol{x}$.
2) La fonction $\mathrm{G} : \boldsymbol{x} \longmapsto 3\,\boldsymbol{x} + \sqrt{\boldsymbol{x}}$ est une primitive sur
   $]\,0\,;+\infty[$ de la fonction $g: \boldsymbol{x} \longmapsto 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Propriété 1

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet sur I une primitive.

SEQUENCE 2

Ensemble des primitives d'une fonction
Objectif
Déterminer la primitive de fonctions continues prenant une valeur donnée en un point donné;
Ensemble des primitives d'une fonction
Propriété 2
f est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I.

- *Pour tout réel c, les fonctions* $\boldsymbol{x} \longmapsto F(\boldsymbol{x}) + c$ *sont des primitives de f sur I.*
- *Toute primitive de f sur I est de la forme* $\boldsymbol{x} \longmapsto F(\boldsymbol{x}) + c$ *où c est un réel.*

Démonstration

- Soit c un nombre réel. Les fonctions $\boldsymbol{x} \longmapsto F(\boldsymbol{x}) + c$ sont dérivables sur I et a la même dérivée que la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \mathrm{F}(\boldsymbol{x})$.
  Donc, la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto F(\boldsymbol{x}) + c$ est une primitive de f sur I.
- Soit G une primitive de f sur I. La fonction (G-F) est dérivable sur I et on a :
  $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{I}$, $(\mathrm{F}-\mathrm{G})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}'(\boldsymbol{x})$
  $= \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = 0.$
  Donc$(\mathrm{G}-\mathrm{F})$ est une fonction constante sur I. On en déduit que G est de la forme $\boldsymbol{x} \longmapsto F(\boldsymbol{x}) + c$ où c est un réel.

Propriété 3

f est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, b un nombre réel et a un élément de I.

Il existe une unique primitive F de f sur I qui prend la valeur b en a.

Démonstration

Désignons par F une primitive de f sur I. Toute primitive G de f sur I est telle que $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{I}$, $\mathrm{G}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{F}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{c}$.

On a : $\mathrm{G}(a) = b \Leftrightarrow \mathrm{F}(a) + c = b$

$\Leftrightarrow c = b - \mathrm{F}(a).$

Donc la fonction G : $\boldsymbol{x} \longmapsto \mathrm{F}(\boldsymbol{x}) + b - \mathrm{F}(a)$ est la primitive de f sur I qui prend la valeur b *en a*

Exemple

Détermine la primitive G sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \sin \boldsymbol{x}$ prenant la valeur $\frac{1}{2}$ en $a = \frac{\pi}{6}$.

En effet, G est une fonction de la forme $\boldsymbol{x} \longmapsto -\cos \boldsymbol{x} + c$ où c est un réel.

De plus $\mathrm{G}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, donc : $-\cos(\frac{\pi}{6}) + c = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\frac{-1}{2} + c = \frac{1}{2}$, $c = 1$.

Finalement, la fonction G cherchée prenant la valeur $\frac{1}{2}$ en a $= \frac{\pi}{6}$ est :

$\mathrm{G}(\boldsymbol{x}) = -\cos \boldsymbol{x} + 1.$

Primitives des fonctions élémentaires

Le tableau suivant donne les primitives des fonctions élémentaires :

Fonction f	*Primitives de f*	*Sur l'intervalle*
$\boldsymbol{x} \longmapsto a\ (a \in \mathbb{R})$	$\boldsymbol{x} \longmapsto a\boldsymbol{x} + c$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}\ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}+1}}{\boldsymbol{n}+1}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{x} \longmapsto \frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$\boldsymbol{x} \longmapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$x \longmapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$[0;+\infty[$ si $r \geq 0$ $]0;+\infty[$ si $r < 0$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \longmapsto \tan x + c$	$](2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}[$ $(k \in \mathbb{Z})$

SEQUENCE 3

Opérations sur les primitives
Objectif
Calculer les primitives d'une somme et d'un produit de fonctions.
Primitives de la somme de deux fonctions
Propriété
f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour primitives sur un intervalle I les fonctions F et G.
La fonction f + g admet pour primitive sur I la fonction F +G.
Démonstration
En effet la fonction F + G est dérivable sur I et
(F + G)' = F' + G' = $f + g$

Primitives du produit d'une fonction par un réel
Propriété

f est une fonction admettant sur un intervalle I une primitive F et k un réel.

La fonction kf admet pour primitive sur I la fonction kF.

Démonstration

En effet la fonction kF est dérivable sur I et $(\boldsymbol{kF})' = kf$.

SEQUENCE 4

Opérations sur les primitives
Objectif
Calculer les primitives de $\mathbf{f}' \times (\mathbf{g}' \circ \mathrm{f})$
Primitives de $\mathbf{f}' \times (\mathbf{g}' \circ \mathrm{f})$

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle contenant f(I).
La fonction $\boldsymbol{f'} \times (\boldsymbol{g'}\ o\ f)$ *admet pour primitive sur I la fonction gof.*

Démonstration

En effet *gof* est dérivable sur I et $(\boldsymbol{gof})' = \boldsymbol{f'} \times (\boldsymbol{g'of})$.

De la propriété ci-dessus, on déduit le tableau suivant :

Fonction *f*	Une primitive de *f*	Commentaires
$\boldsymbol{f'f^n}(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{\boldsymbol{f^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}}$	Sur tout intervalle où f est dérivable
$\frac{f'}{f^n}(n \in \mathbb{N} \setminus \{\mathbf{1}\})$	$\dfrac{-\mathbf{1}}{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{f^{n-1}}}$	Sur tout intervalle où f est dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{\boldsymbol{f'}}{\sqrt{\boldsymbol{f}}}$	$2\sqrt{\boldsymbol{f}}$	Sur tout intervalle où f est dérivable et strictement positive
$\boldsymbol{f'f^r}\ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-\mathbf{1}\})$	$\dfrac{\boldsymbol{f^{r+1}}}{\boldsymbol{r+1}}$	Sur tout intervalle où f est dérivable et positive (strictement positive si r < 0)
$\boldsymbol{f'}\cos f$	$\sin f$	Sur tout intervalle où f est dérivable
$\boldsymbol{f'}\sin f$	$-\mathbf{cos}\ \boldsymbol{f}$	Sur tout intervalle où f est dérivable

Exemple

Calculons : les primitives des fonctions suivantes :

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2-\mathbf{1}}$ et $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{5})^{\mathbf{7}}$

SEQUENCE 5

Opérations sur les primitives

Objectif

Déterminer les primitives des fonctions trigonométriques

Détermination pratique des primitives des polynômes trigonométriques

Méthode

Pour déterminer les primitives des fonctions du type

$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{sin^m x} \times \boldsymbol{cos^n x}$ *(n* $\in \mathbb{N}^*$ *et m* $\in \mathbb{N}^*$*),* on peut utiliser l'un des procédés suivants *:*

- *si m et n sont de même parité, linéariser* $\boldsymbol{sin^m x} \times \boldsymbol{cos^n x}$ *;*

– *si m et n sont de parités différentes, utiliser les relations* :

$\boldsymbol{sin^2x} = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\boldsymbol{cos^2x} = \frac{1+\cos 2x}{2}$;

$\boldsymbol{cos^2x} + \boldsymbol{sin^2x} = 1$ ou $\boldsymbol{cos\ 2x} = \boldsymbol{cos^2x} - \boldsymbol{sin^2x}$

Exemples

1) Déterminons une primitive sur ℝ de
$f : \boldsymbol{x} \longmapsto : \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{sin^3x} \times \boldsymbol{cos^2x}$.
Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = sin\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{sin^2x} \times \boldsymbol{cos^2x}$
$= sin\boldsymbol{x}(1 - \boldsymbol{cos^2x}) \times \boldsymbol{cos^2x}$
$= sin\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{cos^2x} - sin\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{cos^4x}$
Ainsi, $F(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{3}\boldsymbol{cos^3x} + \frac{1}{5}\boldsymbol{cos^5x} + c$ *où* c est un réel.
2) Déterminons une primitive sur ℝ de
$g : \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{sinx} \times \boldsymbol{cos2x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(\boldsymbol{x}) = sin\boldsymbol{x}\ (-1 + 2\boldsymbol{cos^2x})$
$= -sin\boldsymbol{x} + 2sin\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{cos^2x}$
Ainsi, $G(\boldsymbol{x}) = cos\boldsymbol{x} - \frac{2}{3}\boldsymbol{cos^3x} + c$ *où c est un réel.*

SEQUENCE 6

Intégrale d'une fonction continue
Objectif

Définir l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé [a, b];

Intégrale d'une fonction continue
Notion d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$ *d'unité graphique 1cm.*

a , b désignent deux réels tels que a < b et $(\boldsymbol{C_f})$ *la courbe représentative d'une fonction positive f dans le repère orthogonal* $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$.

On appelle unité d'aire que l'on notera u. a., l'unité de mesure des aires telle que

1u. a. $= \|\vec{\boldsymbol{i}}\| \times \|\vec{\boldsymbol{j}}\|$ *c'est-à-dire l'aire du rectangle OICJ où I, J et C sont les points définis par* $,\overrightarrow{\boldsymbol{OI}} = \vec{\boldsymbol{i}}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{OJ}} = \vec{\boldsymbol{j}}$ *et* $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}}$.

Définition 2

f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I.

F étant une primitive de f sur I, on appelle intégrale de f entre a et b le nombre F(b) – F(a) noté $\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$.

$F(b) - F(a) = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = [\mathbf{F}(\boldsymbol{x})]_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$

Vocabulaire

- $\int_a^b f(x)dx$ *se lit : « intégrale ou somme de a à b de f(x) dx ».*
- $[F(x)]_a^b$ *se lit : « F(x) pris entre a et b ».*
- *Dans la notation de l'intégrale : a et b sont les bornes, x est une variable muette sans signification particulière ; on pourrait aussi écrire :* $\int_a^b f(t)dt$;$\int_a^b f(u)du$ ...
- *Lors du calcul de ce nombre, on écrit souvent F(b) – F(a) sous la forme* $[F(x)]_a^b$ *qui correspond à l'accroissement de la fonction F entre a et b.*

Exemples

1) $\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$
2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Propriétés

1) *f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, on a :*
   $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$ *et*
   $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$$
2) *f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I.*
   La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ *de I vers* $\mathbb{R}$ *est la primitive de f sur I qui s'annule en a.*

Exemple : La fonction logarithme népérien est la fonction $x \longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

SEQUENCE 7

Interprétation graphique

Objectif

Interpréter graphiquement l'intégrale

Interprétation graphique

f est une fonction continue et positive sur un intervalle *I, a* et *b* deux éléments de *I*

tels que $a < b$, (C_f)la courbe représentative de f dans un repère *orthogonal* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

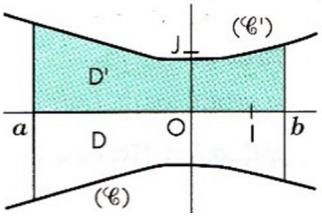
$A_f = \int_a^b f(x)dx$est l'aire en unités d'aire *(u.a.)* du domaine D_f du plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$, $x = b$:

On note : $D_f = \{M(x; y) / a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Remarque

Si la fonction f est négative sur $[a\,;\,b]$, la symétrie orthogonale d'axe (OI) transforme la courbe $(\boldsymbol{C_f})$en la courbe $(\boldsymbol{C_f}')$ représentative de $(-f)$.

Le domaine $\boldsymbol{D_f}$ est transformé en un domaine $\boldsymbol{D'_f}$ de même aire .



On a : $\boldsymbol{A_f = A'_f = \int_a^b (-f)(x)dx}$

Exemple

L'unité graphique est 2cm sur chaque axe.

Calculons en $\boldsymbol{cm^2}$ l'aire de l'ensemble D des points M$(x\,;\,y)$ tels que :

$\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq$ y $\leq \cos x$.

On sait que la fonction cosinus est continue et positive sur $[\frac{-\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

On a : $\boldsymbol{\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosx\, dx = [\sin x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}} = 2$.

L'unité d'aire étant 2 cm × 2cm = 4 $\boldsymbol{cm^2}$.

L'aire de l'ensemble D cherchée est : 2 × 4 $\boldsymbol{cm^2 = 8\, cm^2}$.

SEQUENCE 8

Propriétés algébriques de l'intégrale
Objectif
Enoncer et utiliser les propriétés algébriques de l'intégrale.
Propriétés algébriques de l'intégrale
Relation de Chasles
Propriété
f est une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c trois réels de I. On a :
$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$.

Démonstration
Soit F une primitive de f sur I ;

On a : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b)$

$= F(c) - F(a)$

$= \int_a^c f(x)dx$

Exemple

Calculons $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |sinx|dx$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |sinx|dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-sinx)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = 2$

Linéarité de l'intégrale

Propriété

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, k un réel, a et b deux éléments de I.

- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Remarque

En particulier, $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Exemple

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1-cos2x}{2})dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx$

$= \frac{1}{2}[t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2xdx = \frac{\pi-2}{8}.$

SEQUENCE 9

Propriétés de comparaison

Objectifs

Utiliser les propriétés de comparaison pour déterminer le signe de l'intégrale

Propriétés de comparaison

Signe de l'intégrale

Propriété 1

f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I avec $a \leq b$.

Si f est positive sur I alors $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \geq 0$.

Démonstration

F est une primitive de F sur I. Si *f* est positive sur I alors F est croissante sur I et comme $a \leq b$, $F(a) \leq F(b)$ c'est à dire que $F(b) - F(a) \geq 0$.

Donc $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \geq 0$.

Propriété 2

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

Si $f \leq g$ *sur* $[a ; b]$ *alors* $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \leq \int_a^b \boldsymbol{g(x)dx}$.

Démonstration

Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$ alors $g - f \geq 0$ et donc $\int_a^b \boldsymbol{(g-f)(x)dx} \geq \boldsymbol{0}$ c'est-à-dire que

$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \leq \int_a^b \boldsymbol{g(x)dx}$.

Exemple

Démontrons que : $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $\ln x \leq x - 1$.

En effet, $\forall t \in [1 ; +\infty[$, $\frac{1}{t} \leq 1$; donc $\int_1^x \frac{1}{t}\boldsymbol{dt} \leq \int_1^x \boldsymbol{dt}$

c'est-à-dire que $\ln x \leq x - 1$ sur $[1 ; +\infty[$.

Remarque

f étant une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

On a : $-|\boldsymbol{f(x)}| \leq \boldsymbol{f(x)} \leq |\boldsymbol{f(x)}|$. On en déduit que $\left|\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}\right| \leq \int_a^b |\boldsymbol{f(x)}|\boldsymbol{dx}$.

SEQUENCE 10

Inégalité de la moyenne

Objectif

Utiliser les propriétés de l'inégalité de la moyenne et de la valeur moyenne.

Propriété 1

f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout x élément de $[a ; b]$, $m \leq f(x) \leq M$

alors $m(b - a) \leq \int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \leq M(b - a)$.

Démonstration

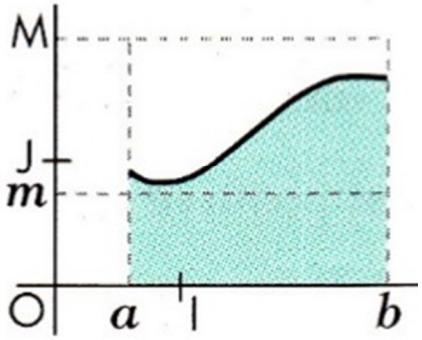
On sait que $\forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}\,;\ \boldsymbol{b}], \boldsymbol{m} \ \leq\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\ \leq M$

c'est-à-dire que $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{m}\,dx \leq \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}\ \ f(x) \leq \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{M}\,dx.$

On en déduit que $m(b-a) \leq \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}\ \leq M(b-a).$

Interprétation graphique

Lorsque m est positif, cette propriété signifie que l'aire du domaine située entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est comprise entre les aires des rectangles de même base b – a et de hauteurs m et M.



Propriété 2

f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

Si M est un réel tel que pour tout x de I $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq M$, *alors* $\left|\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}\right| \leq M|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$

Valeur moyenne d'une fonction

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ $(a \neq b)$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ *le nombre réel* $\boldsymbol{\mu}$ *tel que* $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$.

Remarque

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et $\boldsymbol{\mu}$ sa valeur moyenne sur $[a\,;\,b]$.

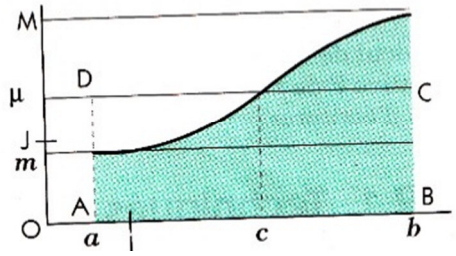
L'image par *f* de $[a\,;\,b]$ est un intervalle $[m\,;\,M]$.

On a donc $m(b-a) \leq \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} \leq M(b-a)$; donc $m \leq \boldsymbol{\mu} \leq M$.

Le nombre $\boldsymbol{\mu}$ admet donc au moins un antécédent *c* par *f* sur $[a\,;\,b]$.

Interprétation graphique

Si la fonction f est positive, le nombre $\boldsymbol{\mu}$ est la hauteur du rectangle ABCD de base b – a dont l'aire est égale à celle de la surface coloriée.



SEQUENCE 11

Techniques de calcul intégral

Objectif

Utiliser les primitives usuelles pour calculer l'intégrale d'une fonction

Utilisation des primitives usuelles

Le tableau suivant reprend quelques résultats permettant de déterminer les primitives des fonctions afin de calculer l'intégrale.

Dans ce tableau, f désigne une fonction dérivable sur un intervalle I, g une fonction dérivable sur un intervalle contenant $f(I)$ et α, un nombre réel différent de -1.

Fonctions	$\frac{f'}{f}$	$f'e^f$	$f'f^\alpha$	$f' \times g' of$
Primitives	$ln\,\lvert f\rvert$	e^f	$\frac{1}{\alpha+1}f^{\alpha+1}$	gof
Commentaires	$f \neq 0$ sur I		$f > 0$ sur I	

Exemple

Calculons les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 (t^3 + 2t^2 - 5t + 3)\,dt$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (sinx\ e^{cosx})\,dx$

SEQUENCE 12

Techniques de calcul intégral

Objectif

Utiliser la propriété de l'intégration par partie pour calculer l'intégrale d'une fonction

Intégration par parties

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

On sait que la fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f'g + fg'$. Si de plus les fonctions f' et g' sont continues sur I alors les fonctions $f'g$ et fg' sont continues sur I.

On a : $\int_a^b (f \times g)'(x)dx = \int_a^b (f'g)(x)dx + \int_a^b (fg')(x)dx.$

Donc $\int_a^b f(x) \times g'(x)dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \times g(x)dx.$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que les dérivées f' *et* g' *sont continues sur I, a et b deux éléments de I.*

On a :

$$\int_a^b f(x) \times g'(x)dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \times g(x)dx.$$

Cette propriété est appelée“ intégration par parties”.

Exemple

Calculons : $\int_1^2 \ln x\, dx.$

Posons $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = 1$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$. Comme f' et g sont continues sur [1 ; 2],

$$\int_1^2 (fg')(x)\ dx = [\ln x \times x]_1^2 - \int_1^2 (gf')(x)\ dx$$

$$= 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times x dx$$

$$= 2\ln 2 - [x]_1^2$$

$$\int_1^2 \ln x\, dx = 2\ln 2 - 1$$

SEQUENCE 13

Techniques de calcul intégral

Objectifs

Utiliser le changement de variables affines pour calculer les intégrales

Changement de variables affines

f est une fonction continue sur un intervalle *I,*

$u : t \longmapsto \alpha t + \beta$ une fonction affine non constante, *a* et *b* deux réels tels que pour tout *x* de *I,* $\alpha x + \beta$ appartienne

à I.

Si F est une primitive de f sur I, la fonction

$x \longmapsto \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$ est une primitive de $x \longmapsto f(\alpha x+\beta)$.

$$On\ a : \int_a^b f(\alpha t+\beta)dt = \left[\frac{1}{\alpha}F(\alpha t+\beta)\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{\alpha}F(\alpha b+\beta) - \frac{1}{\alpha}F(\alpha a+\beta)$$

$$= \frac{1}{\alpha}[F(u)]_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)du$$

Méthode

Pour calculer $\int_a^b f(\alpha t+\beta)dt$ ($\alpha \neq 0$), on peut :

- faire le changement de variable en posant $u = \alpha t+\beta$; on obtient $du = \alpha\, dt$;
- utiliser l'égalité $\int_a^b f(\alpha t+\beta)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)du$.

Exemple

Calculons : $\int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}}dt$.

Posons $u = 2t+3$; on a : $du = 2dt$ donc $dt = \frac{1}{2}du$.

De plus, si $t = -1$, $u = 1$ et si $t = 0$, $u = 3$.

On en déduit que $\int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}}dt = \int_1^3 \frac{u-3}{2\sqrt{u}} \times \frac{1}{2}du$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 6\sqrt{u}\right]_1^3$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}}dt = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$$

SEQUENCE 14

Techniques de calcul intégral

Objectif

Calculer l'intégrale des fonctions paires et impaires.

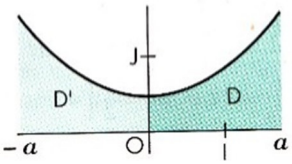
Intégration de fonctions paires et impaires

Fonctions paires, impaires

Propriétés

f est une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Pour tout a élément de I, on a :

- *si f est paire,* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ *;*
- *si f est impaire,* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.



Démonstration

a est un élément de I symétrique par rapport à 0 ;

on a : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

Posons $u = -x$, on a $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(-u)du$

- si f est paire, $\int_{0}^{a} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(u)du$ c'est-à-dire que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$;
- si f est impaire, $\int_{0}^{a} f(-u)du = -\int_{0}^{a} f(u)du$ donc $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Exemples

- La fonction $x \longmapsto cos2\,x$ *est paire et continue sur* $\mathbb{R}$;
  $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = [sin2x]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 1.$
- La fonction $x \longmapsto sin2\,x$ *est impaire et continue sur* $\mathbb{R}$;

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sin\,2x dx = 0$$

SEQUENCE 15

Techniques de calcul intégral

Objectif

Calculer l'intégrale des fonctions périodiques.

Fonctions périodiques

Propriétés

f est une fonction continue $\mathbb{R}$ *et périodique de période T .*

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$;
- $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Démonstration

f est continue sur ℝ et périodique de période T c'est-à-dire que

pour tout réel x de ℝ, $f(x + T) = f(x)$.

- Posons $t = x - T$, *on obtient*
  $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(t+T)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$.
- *On a :*
  $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$
  $= \int_{a+T}^{a} f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b+T} f(x)dx$.

On en déduit que : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$.

En particulier, si $b = 0$, on a : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Exemples

La fonction $x \longmapsto cos2x$ *est périodique de période* π.

1) $\int_{\frac{-3\pi}{4}}^{\frac{-5\pi}{6}} \cos 2x dx = \int_{\frac{-3\pi}{4}+\pi}^{\frac{-5\pi}{6}+\pi} \cos 2x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$.

3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} \cos 2x dx = \int_0^{\pi} \cos 2x dx = 0$.

SEQUENCE 16

Intégration de fonctions particulières

Objectif

Intégrer les fonctions polynômes trigonométriques.

Intégration de polynômes trigonométriques

Exemples

1) Calculons $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x \sin x + 3\sin^3 x)dx$.
   On sait que pour tout x réel,

$$\boldsymbol{cos^3x}\,sin\,\boldsymbol{x} + 3\,\boldsymbol{sin^3x} = sin\,\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{cos^3x} + 3\,\boldsymbol{sin^2x})$$
$$= sin\,\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{cos^3x} + 3(1 - \boldsymbol{cos^2x})).$$

$$A = \left[\frac{-\,cos^4x}{4} + \boldsymbol{cos^3x} - \boldsymbol{3cosx}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad A = \frac{9}{4}$$

2) Calculons $B = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\boldsymbol{cos^2x} - 2\,\boldsymbol{sin^4x})dx$

En effet, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{cos^2x} = \frac{1-cos2x}{2}$

et $\boldsymbol{sin^4x} = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4\,\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3\right).$$

Ainsi, pour tout $\boldsymbol{x}$ réel,

$$\boldsymbol{cos^2x} - 2\,\boldsymbol{sin^4x} = \frac{-1}{4}\cos 4x + \frac{3}{2}\,\boldsymbol{cos2x} - \frac{1}{4}$$

$$B = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{-1}{4}\cos 4x + \frac{3}{2}\boldsymbol{cos2x} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left[\frac{-\,sin4x}{16} + \frac{3}{4}\boldsymbol{sin2x} - \frac{x}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}$$

SEQUENCE 17

Intégration de fonctions particulières

Objectif

Intégrer les fonctions rationnelles.

Intégration des fonctions rationnelles

Exemple

a) Déterminons deux réels a et b tels que
$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \frac{1}{t^2-t-2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}$.
En effet,
$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$,

$$\frac{1}{t^2-t-2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2} \Longrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

b) Calculons $\int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}dt$.

En effet la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2-t-2}$ est continue sur $[0; 1]$ et

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}dt = \int_0^1 \left(-\frac{1}{3(t+1)} + \frac{1}{3(t-2)}\right)dt = \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right|\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\ln 2.$$

SEQUENCE 18

Applications de l'intégrale

Objectif

Utiliser les intégrales pour calculer les aires.

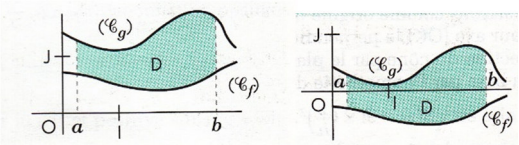
Calcul d'aires

Propriété

*f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, $(\boldsymbol{C_f})$ **et** $(\boldsymbol{C_g})$ leurs courbes représentatives respectives, a et b deux éléments de I tels que*

a < b.

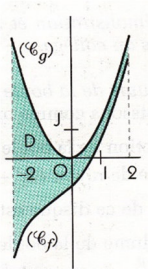
Si $f \leq \boldsymbol{g}$ sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ alors l'aire du domaine D délimité par $(\boldsymbol{C_f})$, $(\boldsymbol{C_g})$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $D = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} [\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]\, dx$.



Exemple

Sur la figure ci-dessous, $(\boldsymbol{C_f})$ **et** $(\boldsymbol{C_g})$ sont les représentations graphiques respectives des fonctions f et g définies par : $f(x) = \boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{e^{-x}}$ *et* $g(x) = \boldsymbol{x^2}$.

Calculons l'aire du domaine D colorié :



$$\mathbf{D} = \int_{-2}^{2} [(\boldsymbol{x^2} - (\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{e^{-x}}))]\, \boldsymbol{dx} = [-\boldsymbol{e^{-x}}]_{-2}^{2} = \boldsymbol{e^2} - \boldsymbol{e^{-2}}.$$

SEQUENCE 19

Applications de l'intégrale

Objectif

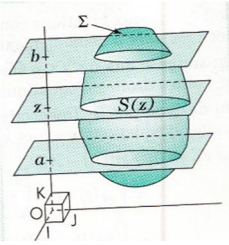
Utiliser les intégrales pour calculer les volumes.

Calcul de volumes

L'espace est rapporté à un repère (O, I , J, K). L'unité de volume est le volume du cube de dimensions OI, OJ et OK.

Propriété

Soit S un solide limité par les plans d'équations z = à ; z = b (a < b) et f la fonction qui à tout élément z de $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ *associe l'aire de la section du solide S par le plan de cote z.*

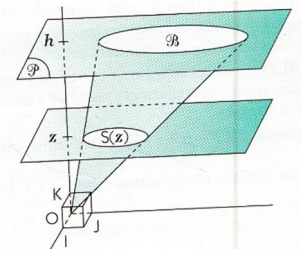


Si la fonction z⟶ f(z) est continue sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$*, alors le volume de S(en unité de volume est :*

$$\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(z)dz}.$$

Exemple

Volume du cône et de la pyramide.



Soit h la hauteur ($h \neq 0$) et B, l'aire de la base d'un cône.

Choisissons comme origine du repère le sommet O de ce cône et pour axe (OK) la perpendiculaire au plan (P) de la base.

La section du cône par le plan de cote $z\ (0 \leq z \leq h)$ est l'image de la base par l'homothétie de centre O et rapport $\frac{z}{h}$.

Son aire est $f(z) = B \times \left(\frac{z}{h}\right)^2$.

Le volume du cone est donc : $V = \int_0^h \frac{1}{h^2} \times B \times z^2 dz = B \times \frac{1}{h^2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = B \times \frac{h}{3}$.

NB : La démonstration et la formule sont identiques pour une pyramide.

SEQUENCE 20

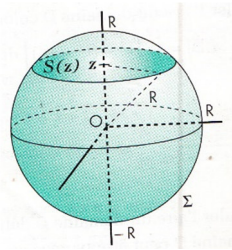
Applications de l'intégrale

Objectif

Utiliser les intégrales pour calculer les volumes.

Volume de la boule

Choisissons comme origine du repère le centre de la boule.



SEQUENCE 21

Leçon : Equations différentielles
Généralités sur les équations différentielles

Objectif

Définir et noter une équation différentielle ;

Définitions et notations

Définition 1

Une équation différentielle est « une relation entre une fonction inconnue et certaines de ses dérivées successives ».

Notation

L'usage est de noter la fonction inconnue par la lettre y et de ne pas faire figurer la variable : on écrit y au lieu de $y(x)$ ou $f(x)$.

Définition 2

Une équation différentielle de premier ordre est une relation qui lie une fonction inconnue à sa dérivée première ; elle est du second ordre si la relation lie la fonction inconnue à sa dérivée seconde.

Exemples

1) $\mathbf{3y'-2y = 0}$ est une équation différentielle de premier ordre parce que seule la dérivée première de la fonction inconnue intervient.
2) $\mathbf{2y''-y' + 3y = 0}$ est une équation différentielle du second ordre parce qu'il y figure la dérivée seconde et qu'il n'y a pas de dérivée d'ordre supérieur à 2.

Définition 3

- Les équations différentielles de la forme $\boldsymbol{ay' + by = 0}$ où a et b sont deux nombres réels, (a non nul) sont appelées des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans second membre(ou homogènes).
- Les équations différentielles de la forme : $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$ où a, b et c sont des nombres réels, (a non nul) sont dites équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre(ou homogènes).
- Une équation différentielle est dite d'ordre $\boldsymbol{n}$ lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est $\boldsymbol{n}$.
- Résoudre sur un intervalle I une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions dérivables sur I et solutions de cette équation différentielle.

SEQUENCE 22

Equations de types $\boldsymbol{y' = f(x)\ et\ y'' = g(x)}$

Objectif

Résoudre les équations du type $\boldsymbol{y' = f(x)\ et\ y'' = g(x)}$

Equations de type $\boldsymbol{y' = f(x)}$

Exemple

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = -6\boldsymbol{x^2}$.

En effet, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\boldsymbol{x} \longmapsto -6\boldsymbol{x^2}$ est la fonction : $\boldsymbol{x} \longmapsto -2\boldsymbol{x^3}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -6\boldsymbol{x^2}$ sont les fonctions :$\boldsymbol{x} \longmapsto -2\boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{c}$ ($\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$)ou encore $\boldsymbol{y = -2x^3 + c}$, ($\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$).

Exercice

a) Résoudre sur $]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle (E) : $\boldsymbol{y'} = 1 + \boldsymbol{tan^2 x}$.

b) Déterminer la solution de (E) vérifiant $\boldsymbol{y(0)} = \boldsymbol{1}$.

Exemple

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = sinx$.

En effet, on a : $\boldsymbol{y'' = sinx} \Leftrightarrow \boldsymbol{y' = -cosx + c_1}, (\boldsymbol{c_1} \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y = -sinx + C_1 x + C_2}, (\boldsymbol{C_1} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{C_2} \in \mathbb{R})$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' = sinx}$ sont les fonctions :

$\boldsymbol{x \longmapsto -sinx + C_1 x + C_2}, (\boldsymbol{C_1} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{C_2} \in \mathbb{R}))$ ou encore $\boldsymbol{y = -sinx + C_1 x + C_2}, (\boldsymbol{C_1} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{C_2} \in \mathbb{R})$

Exercice

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' = \boldsymbol{e^{-3x}}$.

b) Déterminer la solution de (E) vérifiant : $\boldsymbol{y(0)} = \frac{\boldsymbol{10}}{\boldsymbol{9}}$ et $\boldsymbol{y'(0)} = \frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{3}}$

SEQUENCE 23

Exemples de résolution

Objectif

Résoudre des équations différentielles

Exercice

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur l'intervalle K l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) $\boldsymbol{y'\sqrt{x} = 1 + x}$, $\boldsymbol{K =]0; +\infty[\ et\ y(1) = 2}$

b) $\boldsymbol{y' tan 2x + 1 = 0}$, $\boldsymbol{K = \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\ et\ y(\frac{\pi}{6}) = 0}$

c) $\boldsymbol{K =]0; +\infty[\ et\ y(e) = -1}$

Résolution

Dans chacun des cas suivants, résolvons sur l'intervalle K l'équation différentielle et déterminons la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) $\boldsymbol{y'\sqrt{x} = 1 + x}$, $\boldsymbol{K =]0; +\infty[\ et\ y(1) = 2}$

$$\boldsymbol{y' \times \sqrt{x} = 1 + x \Leftrightarrow y' = \frac{1+x}{\sqrt{x}}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c, (c \in \mathbb{R})$$

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow 2 + \frac{2}{3} + c = 2 \Leftrightarrow c = -\frac{2}{3}$$

La solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale $y(1) = 2$ est la fonction définie sur$]0; +\infty[$ par :

$y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{3}$.

b) $y' \times tan2x + 1 = 0$, $K = \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ $et\ y(\frac{\pi}{6}) = 0$

$$y' \times tan2x + 1 = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{tan2x}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}ln(\ sin2x\ ) + \lambda,\ \lambda \epsilon \mathbb{R}.$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}ln\left(\ sin\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale $y(\frac{\pi}{6}) = 0$ est la fonction définie sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ par:

$$y = -\frac{1}{2}\ln(sin2x) + \frac{1}{2}ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

SEQUENCE 24

Exemples de résolution

Objectif

Résoudre des équations différentielles

Exercice

Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle sur l'intervalle K et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

a) $y'' = 1 + tan^2x$, $K = \left]\frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$ $et\ y(0) = y'(0) = 1$

b) $y'' = (1 + x)e^x, K = \mathbb{R}\ et\ y(0) = y'(0) = e$

Solution:

Dans chacun des cas suivants, résolvons l'équation différentielle sur l'intervalle K et déterminons la solution vérifiant les conditions initiales données.

a) $\boldsymbol{y'' = 1 + tan^2x}$, $\boldsymbol{K = \left]\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[}$ $\boldsymbol{et\ y(0) = y'(0) = 1}$

$$\boldsymbol{y'' = 1 + tan^2x \Leftrightarrow y' = tanx\ + \beta\ ,(\beta \in \mathbb{R})}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow y = \ -ln|cosx| +\ \beta x +\ \lambda, (\beta \in \mathbb{R};\ \lambda \in \mathbb{R})}\ .$$

$$\boldsymbol{y(0\ ) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1}$$

$$\boldsymbol{y'(0) = 1 \Leftrightarrow \beta = 1}$$

La solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales est la fonction définie sur $\boldsymbol{\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[}$ par : $\boldsymbol{y = \ -ln|cosx| +\ x + 1}$

b) $\boldsymbol{y'' = (1 + x)e^x, K = \mathbb{R}\ et\ y(0) = y'(0) = e}$

$$\boldsymbol{y'' = (1 + x)e^x,}$$

$$\boldsymbol{y' = \int_{x_0}^{x}(\ 1 + t)e^t dt\ \ , x_0\ \in \mathbb{R}.}$$

Procédons par une intégration par parties :

Posons $\begin{cases} \boldsymbol{u(t) = 1 + t} \\ \boldsymbol{v'(t) = e^t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{u'(t) = 1} \\ \boldsymbol{v(t) =\ e^t} \end{cases}$

$$\boldsymbol{y' = \int_{x_0}^{x}(\ 1 + t)e^t dt \Longrightarrow y' = [(1 + t)e^t]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} e^t dt}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow y' = [(1 + t)e^t]_{x_0}^{x}\ - [e^t]_{x_0}^{x}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow y' = [(1 + t - 1)e^t]_{x_0}^{x}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow y' = [te^t]_{x_0}^{x}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow y' = xe^x - x_0e^{x_0}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow y' = xe^x + c}$$

$$\boldsymbol{y' = xe^x + c \Longrightarrow y = \int_{x_0}^{x}(te^t + c)\ dt}$$

Procédons de nouveau par une intégration par parties en posant : $\begin{cases} \boldsymbol{f(t) = t} \\ \boldsymbol{g'(t) = e^t} \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} \boldsymbol{f'(t) = 1} \\ \boldsymbol{g(t) =\ e^t} \end{cases}$

$$\boldsymbol{y = \int_{x_0}^{x}(te^t + c)\ dt \Longrightarrow y = [te^t]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} e^t dt + c\int_{x_0}^{x} dt}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow y = [(t - 1)e^t + ct]_{x_0}^{x}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow y = (x - 1)e^x + cx + c_1, (c \in \mathbb{R}\ , c_1 \in \mathbb{R}\ )}$$

$$\boldsymbol{y(0) = e \Leftrightarrow -1 + c_1 = e}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow c_1 = e + 1}$$

$$y'(0) = e \Leftrightarrow c = e.$$

La solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $y = (x-1)e^x + ex + e + 1$.

SEQUENCE 25

Equations différentielles du premier ordre

Objectifs

- **Résoudre les équations différentielles de premier ordre**
- **Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans second membre (avec ou sans condition initiale)**

Equations différentielles du premier ordre sans second membre $ay' + by = 0$ $(a \neq 0)$

Résolution de l'équation $ay' + by = 0$, $(a \neq 0)$

Théorème

Les solutions de l'équation différentielle *ay' h+ by = 0 (a ≠ 0)* sont les fonctions f_k**définiespar**:

$f_k(x) = ke^{-\frac{b}{a}x}$où k est un réel quelconque.

Démonstration

- Posons $\alpha = \frac{-b}{a}$, résoudre $ay' + by = 0$ équivaut à résoudre : $y' = \frac{-b}{a}y = \alpha y$.

Pour tout réel k, la fonction $f_k : x \longmapsto ke^{\alpha x}$ est solution.

En effet, pour tout réel x,$f'_k(x) = k\alpha e^{\alpha x} = \alpha f_k(x)$

- Montrons maintenant que les fonctions f_k sont les seules solutions. Pour cela, supposons qu'une autre fonction g soit solution de l'équation : $y' = \alpha y$et considérons la fonction h définie par :

$$h(x) = g(x)e^{-\alpha x}(1).$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = [g'(x) - \alpha g(x)]e^{-\alpha x}$.

Puisque g est solution de $y' = \alpha y$, alors pour tout réel x, $g'(x) - \alpha g(x) = 0$ et donc $h'(x) = 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est constante sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre k tel que pour tout x, $h(x) = k$.

Donc, d'après (1), $k = g(x)e^{-\alpha x} \Longrightarrow g(x) = ke^{\alpha x}$.

Toute solution de $y' = \alpha y$est donc une fonction f_k.

Exemple

Les solutions de l'équation différentielle $\mathbf{2y' + 3y = 0}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\boldsymbol{f_k(x) = ke^{\frac{-3}{2}x}}$ Où k est un réel quelconque.

SEQUENCE 26

Solution soumise à la condition $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$

Objectif

Déterminer la solution des équations différentielles de types $\boldsymbol{ay' + by = 0}$ vérifiant une condition initiale $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$.

On recherche parmi les solutions $\boldsymbol{f_k}$de l'équation $\boldsymbol{ay' + by = 0}$ celles qui satisfont à la condition $\boldsymbol{f_k(x_0) = y_0, x_0}$ et $\boldsymbol{y_0}$ étant des nombres réels donnés.

Théorème

Pour tout couple de réels ($\boldsymbol{x_0, y_0}$), l'équation $\boldsymbol{ay' + by = 0}$ admet une solution $\boldsymbol{f}$ et une seule telle que $\boldsymbol{f(x_0) = y_0}$.

Démonstration

En effet, dire que$\boldsymbol{f_k(x_0) = y_0}$, c'est dire que $\boldsymbol{ke^{\frac{-b}{a}x_0} = y_0}$.

Il y a donc une valeur possible de $\boldsymbol{k}$ et une seule : $\boldsymbol{k = y_0 e^{\frac{b}{a}x_0}}$

D'où le théorème.

Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\mathbf{2y' - 5y = 0}$ telle que $\boldsymbol{y(-2) = 1}$.

En effet, les solutions $\boldsymbol{f_k}$ de $\mathbf{2y' - 5y = 0}$ sont de la forme$\boldsymbol{f_k(x) = ke^{\frac{5}{2}x}}$.

Si $\boldsymbol{f_k}(-2) = 1$ alors, $\boldsymbol{ke^{\frac{5}{2}\times(-2)} = 1}$. Donc $\boldsymbol{k = e^5}$.

La solution de l'équation différentielle $\mathbf{2y' - 5y = 0}$ telle que $\boldsymbol{y(-2) = 1}$ est la fonction

$\boldsymbol{x \longmapsto e^{\frac{5}{2}x+5}}$.

SEQUENCE 27

Equations différentielles du premier ordre avec second membre

Objectif

Résoudre des équations différentielles du premier ordre avec second membre.

$\boldsymbol{ay' + by = g(x)}$, *(a ≠ 0 et g une fonction donnée)*

Méthode :

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre, on peut :

- Déterminer une solution particulière g de cette équation ;
- démontrer que les solutions de l'équation différentielle avec second membre sont les fonctions du type $\boldsymbol{f + g}$ où $\boldsymbol{f}$ est une solution de l'équation différentielle sans second membre ;
- Résoudre l'équation sans second membre et en déduire les solutions de l'équation différentielle avec second membre.

Exemple

Résolvons sur ℝ l'équation différentielle avec second membre$(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{y' + 2y = x^2 + x}$

Déterminons, à cet effet, un polynôme du second degré *h* qui soit solution de (E).

Posons $\boldsymbol{h(x) = ax^2 + bx + c}$ *(a, b et c* sont des réels, *a ≠ 0*), $\boldsymbol{h'(x) = 2ax + b}$.

$\boldsymbol{h}$ étant solution de (E), $\boldsymbol{h'(x) + 2\,h(x) = x^2 + x}$ c'est-à-dire que :

$$\boldsymbol{2ax + b + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + x}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow 2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c = x^2 + x}.$$

Par identification, on a : $\begin{cases} \boldsymbol{2a = 1} \\ \boldsymbol{2a + 2b = 1} \\ \boldsymbol{b + 2\,c = 0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{b = 0} \\ \boldsymbol{c = 0} \end{cases}$

On déduit que : $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{2}x^2}$.

Désignons par $\boldsymbol{g}$, une solution de l'équation différentielle sans second membre $(\boldsymbol{E_1})$: *y' + 2y = 0*

Montrons que $\boldsymbol{g + h}$ est une solution de (E).

En effet, $\boldsymbol{g + h}$ est une solution de (E) si et seulement si : $\boldsymbol{g'(x) + h'(x) + 2g(x) + 2h(x) = x^2 + x}$

C'est-à-dire que $\boldsymbol{g'(x) + 2g(x) + h'(x) + 2h(x) = x^2 + x}$ donc :

$\boldsymbol{g' + 2g = 0}$, (car $\boldsymbol{h'(x) + 2h(x) = x^2 + x}$). g est une solution de $(\boldsymbol{E_1})$.

Résolvons l'équation $(\boldsymbol{E_1})$: une solution de $\boldsymbol{y' + 2y = 0}$ est de la forme$\boldsymbol{g(x) = ke^{-2x}}$$(\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$.

Une solution générale de (E) est : $\boldsymbol{g(x) + h(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{2}x^2}$$(\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$.

SEQUENCE 28

Equations du second ordre de types :$\boldsymbol{y'' + \lambda y = 0}$

Objectif

Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre de type : $\boldsymbol{y'' + \lambda y = 0}$(avec ou sans condition initiale).

On distingue trois cas

1 – Cas où $\lambda = 0$

Si $\boldsymbol{\lambda} = 0$, on obtient une équation du type $\boldsymbol{y'' = 0}$; les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle sont les fonctions *:* $\boldsymbol{x \longmapsto Ax + B}$ où A et B sont des réels.

2 – Cas où $\boldsymbol{\lambda < 0}$

Dans ce cas, l'équation $\boldsymbol{y'' + \lambda y = 0}$ se ramène à l'équation : $\boldsymbol{y'' - \omega^2 y = 0}$ *(*$\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^*$*)* avec $\boldsymbol{\omega^2 = -\lambda}$

Propriété

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - \boldsymbol{\omega^2 y = 0}$ *(*$\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^*$*)* sont les fonctions :

$$\boldsymbol{x \longmapsto A\, e^{\omega x} + B\, e^{-\omega x}}, (\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}).$$

Exemple

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' - 4y = 0}$.

En effet, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' - 4y = 0}$ sont les fonctions :

$$\boldsymbol{x \longmapsto A\, e^{2x} + B\, e^{-2x}}, (\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}).$$

3 – Cas où $\boldsymbol{\lambda > 0}$

Dans ce cas, l'équation $\boldsymbol{y'' + \lambda y = 0}$ se ramène à l'équation : $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$ *(*$\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^*$*)* *avec* $\boldsymbol{\omega^2 = \lambda}$

$$\boldsymbol{x \longmapsto A\cos\omega x + B\sin\omega x}, \ (\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}).$$

Propriété

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \boldsymbol{\omega^2 y = 0}$ *(*$\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^*$*) sont les fonctions* :

$$\boldsymbol{x \longmapsto A\cos\omega x + B\sin\omega x}, (\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}, \ \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}).$$

Exemple

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$.

En effet, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$ sont les fonctions :

$$\boldsymbol{x \longmapsto A\cos 4x + B\sin 4x}, (\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}, \ \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}).$$

SEQUENCE 29

Equations du type $ay'' + by' + cy = 0$ $(a \neq 0)$

Objectif

Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre (avec ou sans condition initiale);

Définition

Toute équation $ay'' + by' + cy = 0$ où a est un réel non nul, b *et* c deux réels quelconques est appelée équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficient constant, sans second membre.

Equation caractéristique :

Considérons l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, (a ≠ 0, b et c deux réels quelconques).

Soit r un nombre réel et y, la fonction : $x \longmapsto e^{rx}$.

On a : $y' = re^{rx}$ *et* $y'' = r^2e^{rx}$.

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

$$\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Donc y est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, $(a \neq 0, b$ *et* c deux réels quelconques) si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$.

L'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, $(a \neq 0, b$ *et* c deux réels quelconques).

Exemple

L'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = 0$ a pour équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 5 = 0.$$

SEQUENCE 30

Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, $(a \neq 0)$

Objectifs

Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre (avec ou sans condition initiale).

Soit (E) l'équation différentielle *:* $ay'' + by' + cy = 0$, $(a \neq 0, b$ *et* c deux réels quelconques).

Théorème

Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ *admet :*

- deux racines réelles distinctes $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{s}$ alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
  $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$ *sont les fonctions* $\boldsymbol{f}$ *définies par*: $\boldsymbol{f(x) = Ae^{rx} + Be^{sx}}$, *avec A et B deux réels quelconques ;*
- *une seule racine réelle r alors les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle*
  ay'' + by' +cy = 0 sont les fonctions f définies par : $\boldsymbol{f(x) = e^{rx}(A + Bx)}$, *avec A et B deux réels quelconques ;*
- *deux racines complexes* $\boldsymbol{r}$ *et* $\boldsymbol{\bar{r}}$ *avec* $\boldsymbol{r = u + iv}$, *(u et v étant deux réels) alors les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$ *sont les fonctions* $\boldsymbol{f}$ *définies par :*
  $\boldsymbol{f(x) = e^{ux}(Acosvx + Bsinvx)}$, *avec A et B deux réels quelconques.*

Exemples

Equations différentielles	Equations caractéristiques	Solutions
2y'' – 6y' – 8y = 0	$\boldsymbol{2r^2 - 6r - 8 = 0}$ *Ou soit* $\boldsymbol{r^2 - 3r - 4 = 0}$ *Deux racines réelles – 1 et 4.*	*g(x) =* $\boldsymbol{Ae^{-x} + Be^{4x}}$ *A et B étant deux réels.*
y'' + 4y' + 4y = 0	$\boldsymbol{r^2 + 4r + 4 = (r + 2)(r + 2) = 0}$ *Une racine réelle double – 2.*	*g(x) =* $\boldsymbol{e^{-2x}}$ *(A + Bx)* *A et B étant deux réels.*
y'' – 4 y' + 5y = 0	$\boldsymbol{r^2 - 4r + 5 = 0}$ *Deux racines complexes r = 2 + i et* $\boldsymbol{\bar{r} = 2 - i}$.	*g(x) =* $\boldsymbol{e^{2x}}$ *(Acosx + Bsinx)* *A et B étant deux réels.*

SEQUENCE 31

Solution soumise à la condition $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$ ***et*** $\boldsymbol{y'(x_0) = z_0}$

Objectif

Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre vérifiant une condition initiale.

On recherche parmi les solutions $\boldsymbol{f_k}$ de l'équation $\boldsymbol{ay' + by = 0}$, celles qui satisfont à la condition $\boldsymbol{f_k(x_0) = y_0, x_0}$ et $\boldsymbol{y_0}$ étant des nombres réels donnés.

Théorème :

Pour tout triplet de réels (x_0, y_0, z_0), *l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$ *admet une solution* g *et une seule telle que* $g(x_0) = y_0$ *et* $g'(x_0) = z_0$.

Exemple

On a vu que les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = 0$ sont les fonctions g de la forme

$g(x) = (Acosx + Bsinx)\, e^{2x}$, *A et B* étant deux réels.

Parmi ces fonctions, il y en a une et une seule telle que $g(0) = 0$ *et* $g'(0) = 1$.

Pour l'obtenir, il suffit de :

– calculer $g'(x)$:

Or, $g(x) = (Acosx + Bsinx)e^{2x}$ $g'(x) = (-Asinx + Bcosx)e^{2x} + 2(Acosx + Bsinx)e^{2x}$

– puis résoudre le système d'inconnue A et B : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \times e^0 = 0 \\ B \times e^0 + 2A \times e^0 = 1 \end{cases}$

Ainsi on trouve A = 0 et B = 1 ; la fonction cherchée *g* est : $g(x) = e^{2x}sinx$.

SEQUENCE 32

Equations du second ordre avec second membre du type $ay'' + by' + cy = g(x)$, $((a \neq 0)$, *et g une fonction donnée)*

Objectif

Résoudre une équation du second ordre avec second membre.

– Méthode

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre, on peut :

- déterminer une solution particulière g de cette équation ;
- démontrer que les solutions de l'équation différentielle avec second membre sont les fonctions du type $f + g$ où f est une solution de l'équation différentielle sans second membre ;
- résoudre l'équation sans second membre et en déduire les solutions de l'équation différentielle avec second membre.

Exemple

Résolvons l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = cosx$.

Trouvons deux réels A et B tels que la fonction *h* définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = Acosx + Bsinx$ soit une solution de (E).

En effet, $h'(x) = -Asinx + Bcosx$ et $h''(x) = -Acosx - Bsinx$.

h est solution de (E) si et seulement si $\boldsymbol{h''(x) + 2h'(x) + h(x) = cosx}$, c'est-à-dire que

$\boldsymbol{-Acosx - Bsinx + 2(-Asinx + Bcosx) + Acosx + Bsinx = cosx}$.

$\boldsymbol{\Longrightarrow 2Bcosx - 2Asinx = cosx}$.

Par identification, on a: $\begin{cases} \boldsymbol{2B = 1} \\ \boldsymbol{-2A = 0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{B = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{A = 0} \end{cases}$

Donc, $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{2} sinx}$.

Soit *g*, une solution de (E).

Montrons que $\boldsymbol{g - h = g_1}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E_0})$ *: y'' + 2y' + y = 0.*

En effet $\boldsymbol{(g - h)' = g' - h'}$ *et* $\boldsymbol{(g - h)'' = g'' - h''}$.

Ainsi, $\boldsymbol{g'' - h'' + 2g' - 2h' + g - h = g'' + 2g' + g - (h'' + 2h' + h) = cosx - cosx = 0}$,

*(*car *g et h* sont les solutions de (E)*).*

$\boldsymbol{g_1}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E_0})$: $\boldsymbol{y'' + 2y' + y = 0}$. Réciproquement, montrons que si $\boldsymbol{g_1}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E_0})$ *:* $\boldsymbol{y'' + 2y' + y = 0}$, alors $\boldsymbol{g = g_1 + h}$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{y'' + 2y' + y = cosx}$.

En effet, $\boldsymbol{(g_1 + h)' = g_1 + h'}$ ***et*** $\boldsymbol{(g_1 + h)'' = g_1'' + h''}$ *et*

$$\boldsymbol{(g_1 + h)'' + 2(g_1 + h)' + (g_1 + h) = g_1''\, 2 + g_1' + g_1 + h'' + 2h' + h' = cosx}$$

C'est-à-dire que $\boldsymbol{g_1'' + 2g_1' + g_1 = 0}$. $\boldsymbol{g_1}$ est alors solution de $(\mathbf{E_0})$.

Résolvons $(\mathbf{E_0})$: l'équation caractéristique de $(\mathbf{E_0})$ est : $\boldsymbol{r^2 + 2r + 1 = 0}$

c'est-à-dire $\boldsymbol{(r + 1)(r + 1) = 0 \Leftrightarrow r = -1}$.

Une solution de $(\mathbf{E_0})$ est de la forme : $\boldsymbol{x \longmapsto e^{-x}(A + Bx)}$.

Une solution générale de (E) est de la forme : $\boldsymbol{x \longmapsto e^{-x}(A + Bx) + \frac{1}{2} sinx}$.

Leçons de la compétence de base 2 du troisième trimestre

Leçon : statistiques

SEQUENCE 33

Généralités

Objectifs

Définir quelques termes utilisés dans l'étude des séries statistiques

Population-Individus

L'objet de la statistique est la caractérisation d'une population, que l'on veut définir comme étant l'ensemble des individus auxquels on s'intéresse. L'individu est donc un des éléments de la population.

Caractères (ou variables) statistiques

Un caractère statistique est un aspect particulier de l'individu auquel on s'interesse. Il peut etre qualitatif ou quantitatif (mesurable).

Exemples

- Les caractères : état matrimonial, sexe, couleur, etc. sont qualitatifs ;
- Les caractères : poids, taille, âge, etc. sont quantitatifs.

Modalités

Chaque variable statistique est susceptible de prendre plusieurs valeurs. On appelle ces dernières les modalités de la variable statistique.

Exemples

- Le caractère genre comporte deux modalités : genre féminin, genre masculin.
- Le caractère « nombre de personnes admises à la retraite cette année » comporte les modalités 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; etc.

Les effectifs

L'effectif total est le nombre d'individus appartenant à la population étudiée. L'effectif total est souvent noter N.

L'effectif d'une modalité $\boldsymbol{x_i}$ *d'un caractère X est le nombre d'individus présentant cette modalité. L'effectif correspondant à la modalité* $\boldsymbol{x_i}$ *du caratère X est noté* $\boldsymbol{n_i}$*. On a :*

$N = \sum_i \boldsymbol{n_i}$

Moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique d'une distribution statistique pour une variable X est égale au rapport de la somme des valeurs observées de cette variable sur le nombre total d'observations. On note généralement $\overline{\boldsymbol{X}}$*. On a* $\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}} \sum_i \boldsymbol{n_i x_i}$

Variance – Ecart type

On appelle variance d'une variable statistique X, la moyenne arithmétique des carrés des écarts des valeurs de cette variable à sa moyenne arithmétique. On la note généralement V(X) ou Var(X). on a : $V(X) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}} \sum_i \boldsymbol{n_i}(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{X}})^2$

La formule développée de V(X) est : $V(X) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}} \sum_i \boldsymbol{n_i x_i}^2 - \overline{\boldsymbol{X}}^2$

L'écart type est un indicateur de dispersion. Il est la racine carrée de la variance. On le note $\boldsymbol{\partial_X}$*. On a :* $\boldsymbol{\sigma_X} = \sqrt{\boldsymbol{V(X)}}$.

Coordonnées du barycentre de *n* points pondérés

Soit G le barycentre des points pondérés $(\boldsymbol{A_i}, \boldsymbol{a_i})$ *où* $1 \leq i \leq n$. *Les coordonnées du point G dans le plan muni d'un repère (O, I, J) sont données par les relations :*

$X_G = \frac{1}{N}\sum_i \boldsymbol{a_i x_i}$ *et* $Y_G = \frac{1}{N}\sum_i \boldsymbol{a_i y_i}$ *où* $N = \sum_i \boldsymbol{a_i}$ *et chaque point* $\boldsymbol{A_i}$ *a pour couple de coordonnées* $(\boldsymbol{x_i}\ ;\ \boldsymbol{y_i})$.

SEQUENCE 34

Séries statistiques à deux caractères

Objectif

Définir une série statistique à deux variables

Introduction

Certains phénomènes aléatoires dépendent de plusieurs caractères. Mais conformément au programme de la terminale S, sur une population donnée, nous allons étudier deux caractères quantitatifs.

A chaque individu, on associe un couple de nombres réels et on obtient ainsi une série statistique à deux caractères ou série double.

Exemple introductif

On a relevé le poids en (en kg) et la taille (en cm) de 30 élèves d'une classe de terminale S. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Poids	65	68	62	62	68	68	59	71	74	68	68	74	71	65	65
Taille	165	177	174	168	165	171	165	177	175	171	165	174	174	174	171
Poids	62	65	68	71	65	74	74	71	65	77	74	62	77	68	71
Taille	174	174	171	171	174	168	177	174	165	180	177	168	180	171	174

Ces données permettent de définir deux séries statistiques à un caractère $(\boldsymbol{x_i}\ ;\ \boldsymbol{n_i})$ et $(\boldsymbol{y_j}\ ;\ \boldsymbol{n_j})$ représentées par deux tableaux suivants

$\boldsymbol{x_i}$	59	62	65	68	71	74	77
$\boldsymbol{n_i}$	1	4	6	7	5	5	2

$\boldsymbol{y_i}$	165	168	171	174	177	180
$\boldsymbol{n_j}$	5	3	6	10	4	2

Désignons par:
X : le caractère « poids » ;
Y : le caractère « taille ».
On a : X = {**59**; **62**; **65**; **68**; **71**; **74**; **77**} et Y ={**165**; **168**; **171**; **174**; **177**; **180**}
A chaque couple ($\boldsymbol{x_i}$; $\boldsymbol{y_j}$) de l'ensemble X×Y, on associe le nombre d'élèves ayant le poids $\boldsymbol{x_i}$ et la taille $\boldsymbol{y_j}$; ce nombre est noté $\boldsymbol{n_{ij}}$.
On définit ainsi une série statistique à deux caractères :
$\boldsymbol{n_{ij}}$ est appelé effectif de la modalité ($\boldsymbol{x_i}$; $\boldsymbol{y_j}$).

Cette série, notée ($\boldsymbol{x_i}$; $\boldsymbol{y_j}$; $\boldsymbol{n_{ij}}$) est représentée par le tableau à double entrée ci-dessous.

	59	62	65	68	71	74	77	TOTAL
165	1	0	2	2	0	0	0	5
168	0	2	0	0	0	1	0	3
171	0	0	1	4	1	0	0	6
174	0	2	3	0	3	2	0	10
177	0	0	0	1	1	2	0	4
180	0	0	0	0	0	0	2	2
TOTAL	1	4	6	7	5	5	2	30

Tableau à double entrée

Les totaux obtenus dans la dernière ligne du tableau sont les effectifs de la série ($\boldsymbol{x_i}$; $\boldsymbol{n_i}$) et ($\boldsymbol{y_j}$; $\boldsymbol{n_j}$); ceux de la dernière colonne sont les effectifs de la série ($\boldsymbol{y_j}$; $\boldsymbol{n_j}$).

Ces effectif qui apparaissent en marge du tableau à double entrée ; les séries statistiques

($\boldsymbol{x_i}$; $\boldsymbol{n_i}$) et ($\boldsymbol{y_j}$; $\boldsymbol{n_j}$) sont appelées séries marginales de la série double ($\boldsymbol{x_i}$; $\boldsymbol{y_j}$; $\boldsymbol{n_{ij}}$).

SEQUENCE 35

Nuage des points associés à une série double

Objectif

Représenter le nuage des points associé à une série double

Représentation du nuage de points

Considérons une série statistique à deux caractères quantitatifs ($\boldsymbol{x_i}$; $\boldsymbol{y_j}$; $\boldsymbol{n_{ij}}$) et un plan muni d'un repère orthogonal.

L'ensemble des points $\boldsymbol{M_{ij}}$ de coordonnées $(\boldsymbol{x_i}\ ;\ \boldsymbol{y_j})$ est appelé nuage des points associés à la série.

Dans le cas où les effectifs des modalités $(\boldsymbol{x_i}\ ;\ \boldsymbol{y_j})$ ne sont pas tous égaux, on représente ce nuage de points de deux manières :

- Représentation par des points pondérés : (on indique à coté de chaque point $\boldsymbol{M_{ij}}$ l'effectif $\boldsymbol{n_{ij}}$.

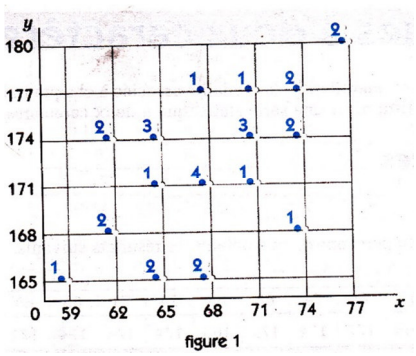


figure 1

- Représentation par taches : chaque point $\boldsymbol{M_{ij}}$ est remplacé par un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif $\boldsymbol{n_{ij}}$.

Pour déterminer le rayon de chaque disque de la représentation par taches, on choisit une longueur R pour le rayon du disque centré au point dont le couple de coordonnées a l'effectif maximum : $\boldsymbol{e}$.

L'aire de ce disque est $\boldsymbol{\pi R^2}$. Puisque les aires sont proportionnelles à l'effectif du couple, la longueur $\boldsymbol{r}$ du rayon du disque centré au point dont le couple de coordonnées à l'effectif $\boldsymbol{n}$ est définie par : $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{n}{e}$ d'où $\boldsymbol{r} = \mathrm{R}\sqrt{\frac{n}{e}}$.

Exemple

Dans le cas de l'exemple introductif, c'est le couple (68 ; 171) qui a l'effectif maximum : 4. Pour ce couple (68 ; 171) on choisit R = 0,5 cm

et $\mathrm{r} = 0{,}5\sqrt{\frac{n}{4}} = 0{,}25\sqrt{\boldsymbol{n}}$.

On obtient ainsi :

Effectif du couple $\boldsymbol{n}$	1	2	3	4
Rayon $\boldsymbol{r}$ du disque centré au point associé	0,25	0,35	0,42	0,5

SEQUENCE 36

Point moyen d'un nuage

Objectif

Définir et représenter le point moyen d'un nuage

Exemple 1

Considérant l'exemple introductif, calculons le barycentre des points pondérés

$(\boldsymbol{M_{ij}}, \boldsymbol{n_{ij}})$.

Nous avons :

$\boldsymbol{X_G}=\sum_{i=1} \boldsymbol{n_i x_i}=\frac{1}{30}(59+124+124+130+65+136+272+68+71+213+71+74+148+148+154)=68{,}4$

$\boldsymbol{Y_G} = \frac{1}{30}\sum_{i=1} \boldsymbol{n_i y_i} = \frac{1}{30}(\mathbf{5 \times 165 + 3 \times 168 + 6 \times 171 + 10 \times 174 + 4 \times 177 + 2 \times 180}) = \mathbf{172{,}1}$

on constate que $\overline{\boldsymbol{X}} = \mathbf{68{,}4}\ \boldsymbol{et}\ \ \overline{\boldsymbol{Y}} = \mathbf{172{,}1}$

G(68,4 ; 172,1) est appelé point moyen du nuage associé à la série $(\boldsymbol{x_i}\ ;\ \boldsymbol{y_j}\ ;\ \boldsymbol{n_{ij}})$.

Définition

Soit $(\boldsymbol{x_i}\ ;\ \boldsymbol{y_j}\ ;\ \boldsymbol{n_{ij}})$ *une série à deux caractères quantitatifs. On appelle point moyen du nuage de points représentant cette série le point de coordonnées* $(\overline{\boldsymbol{X}};\ \overline{\boldsymbol{Y}})$*, où* $\overline{\boldsymbol{X}}$ *et* $\overline{\boldsymbol{Y}}$ *désignent les moyennes respectives des séries marginales* (x_i, n_i) *et* $(y_j\ ;\ n_j)$*.*

Exemple 2

Les notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de biologie et de physique d'un examen sont indiquées dans le tableau suivant :

Biologie($\boldsymbol{x}$)	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
Physique($\boldsymbol{y}$)	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

Nous constatons que, dans cette série, les effectifs des modalités $(\boldsymbol{x_i}\ ;\ \boldsymbol{y_j})$ sont tous égaux à 1. Donc les moyennes des séries marginales sont : $\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{10}(\mathbf{3 + 5 + 2 \times 6 + 2 \times 9 + 2 \times 12 + 2 \times 14}) = \mathbf{9}$ et $\overline{\boldsymbol{Y}} = \frac{1}{10}(\mathbf{5 + 2 \times 6 + 2 \times 10 + 2 \times 13 + 2 \times 16 + 17}) = \mathbf{11{,}6}$

G (9 ; 11,6) est donc le point moyen du nuage associé à la série.

SEQUENCE 37

Ajustement linéaire

Objectif

Ajuster graphiquement une série statistique représentée par la méthode de Mayer

Présentation

On considère dans ce paragraphe que les variables statistiques discrètes

Lors d'une représentation graphiques des séries statistiques à deux caractères, les images des points associés peuvent revêtir une configuration assez régulière (droite, parabole, etc.). Dans ce cas le statisticien essaie d'ajuster la série statistique représentée à l'aide de certains procédés que nous allons développer. Ajuster graphiquement une série statistique représentée, c'est tracer une courbe simple et régulière qui convient le mieux à la forme du nuage associé à la série.

Exemples

Dans la figure 1, on peut penser qu'il est possible de tracer une droite qui passe le plus près de ces points.

On dit que l'on a un ajustement linéaire ou ajustement affine ($\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$)

Dans la figure 2 , on peut approcher le nuage par une parabole ($\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax^2} + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$) et par un ajustement affine.

Dans ces deux cas, on constate l'existence d'un lien entre les points, donc entre leurs coordonnées ($\boldsymbol{x_i}$; $\boldsymbol{y_j}$). On dit qu'il y a une corrélation entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$.

Dans le cas de la figure 3, la répartition des points ne suggère aucune relation entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$; les points sont dispersés de façon quelconque.

Ajustement affine par la méthode de Mayer

Principe de Mayer

L'ensemble des points à ajuster est partagé en deux parties disjointes $\boldsymbol{E_1}$ et $\boldsymbol{E_2}$ de même effectifs dans l'ordre où les points se présentent. Les deux parties $\boldsymbol{E_1}$ et $\boldsymbol{E_2}$ sont alors remplacées respectivement par les points moyens $\boldsymbol{G_1}$ et $\boldsymbol{G_2}$ des nuages qu'ils représentent. ($\boldsymbol{G_1G_2}$) est une droite d'ajustement affine appelée droite de Mayer.

Exemple

Une entreprise fabrique et vend des lots de pompes à injection. Le tableau ci-dessous donne le pourcentage y de pompes à injection d'un lot qui ont une panne au cours de x années d'utilisation.

Déterminons la droite de Mayer ajustant le nuage de points qui représente cette série doubles ($\boldsymbol{x_i}$; $\boldsymbol{y_j}$).

Nombre $\boldsymbol{x_i}$ de	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

semestres										
Pourcentage y_j	0	2	4	8	11	14	17	20	23	27

Soit E l'ensemble des dix points à ajuster. Posons E= $E_1 \cup E_2$ tel que E_1 est l'ensemble des cinq premiers points de coordonnées respectives (1 ;0), (2 ;2), (3 ; 4), (4 ; 8), (5 ;11) et E_2 celui des cinq autres points de coordonnées (6 ; 14), (7 ; 17), (8 ; 20), (9 ; 23), (10 ; 27).

Soient G_1 et G_2 les points moyens respectifs d'E_1 et E_2

Calculons les coordonnées de G_1 :

$\boldsymbol{X_{G_1}} = \frac{(1+2+3+4+5)}{5} = \mathbf{3}$ $\quad \boldsymbol{Y_{G_1}} = \frac{2+4+8+11}{5} = \mathbf{5}$; donc $G_1(3 ; 5)$.

Calculons les coordonnées de G_2 :

$\boldsymbol{X_{G_2}} = \frac{6+7+8+9+10}{5} = \mathbf{8}$ et $\boldsymbol{Y_{G_2}} = \frac{14+17+20+23+27}{5} = \frac{101}{5} = \mathbf{20,2}$; donc $G_2(8 ; 20,2)$.

Déterminons maintenant l'équation de la droite de Mayer.

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax_{G1} + b = y_{G1}} \\ \boldsymbol{ax_{G2} + b = y_{G2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{3a + b = 5} \\ \boldsymbol{8a + b = 20,2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 3,04} \\ \boldsymbol{b = -4,12} \end{cases};$$

D'où la droite de Mayer a pour équation : $\boldsymbol{y = 3,04x - 4,12}$.

On peut vérifier la droite de Mayer passe par le point moyen G (5,5 ; 12,6) du nuage.

SEQUENCE 38

Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés
Objectif
Définir les droites de régression et la covariance d'une série statistique double
Définition des droites de régression

- (D) est une droite d'ajustement, $\boldsymbol{M_i(x_i, y_i)}$ un point du nuage, $\boldsymbol{A_i}$ le point de même abscisse $\boldsymbol{x_i}$ que $\boldsymbol{M_i}$ situé sur la droite (D) d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$.

On dit que (D) est la droite de régression de Y en X lorsque la somme $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i A_i^2}$ est minimale.

(Avec $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i A_i^2} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y_i} - (\boldsymbol{ax_i + b})^2$)

- (D') est une droite d'ajustement, $\boldsymbol{M_i(x_i, y_i)}$ un point du nuage, $\boldsymbol{B_i}$ le point de meme abscisse $\boldsymbol{y_i}$ que $\boldsymbol{M_i}$ situé sur la droite (D') d'équation $\boldsymbol{x = a'y + b'}$.

On dit que (D') est la droite de régression de X en Y lorsque la somme $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i B_i^2}$ est minimale.

Définition de la covariance d'une série statistique double

P est une population d'effectif N.

X et Y deux caractères étudiés sur la population P, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des modalités de X, $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ l'ensemble des modalités de Y,
$\bar{x}$ ***la moyenne arithmétique de la série de caractère X et*** $\bar{y}$ celle de la série de caractère Y, n_{ij} l'effectif du couple de modalités $(x_i; y_j)$,

On appelle covariance de la série statistique double de caractères X et Y le nombre réel, noté Cov(X, Y), tel que Cov(X, Y) = $\frac{1}{N}\sum n_{ij}\,(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$

La formule développée de Cov (X, Y) est : Cov(X, Y) = $\frac{1}{N}\sum n_{ij}x_iy_j - \bar{x}\bar{y}$.

En effet : cov (X, Y) = $\frac{1}{N}\sum \; n_{ij}(x_iy_j - \bar{y}x_i - \bar{x}y_j + \bar{x}\bar{y})$
$= \frac{1}{N}\sum \; n_{ij}x_iy_j - \bar{x}\frac{1}{N}\sum \; n_{ij}y_j - \bar{y}\frac{1}{N}\sum \; n_{ij}x_i + \bar{x}\bar{y}\frac{1}{N}\sum \; n_{ij} = \frac{1}{N}\sum \; n_{ij}x_iy_j$ - $\bar{x}\bar{y} - \bar{y}\bar{x} + \bar{x}\bar{y}$

D'où cov (X, Y) = $\frac{1}{N}\sum \; n_{ij}x_iy_j - \bar{x}\bar{y}$ avec $\sum \; n_{ij} = N$; $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum \; n_{ij}x_i$ ***et*** $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum \; n_{ij}y_j$.

SEQUENCE 39

Détermination de la droite des moindres carrés
Objectif
Déterminer l'équation de la droite des moindres carrés
Equation de la droite des moindres carrés
D'une manière générale il existe plusieurs droites d'ajustement d'un nuage donné ; parmi lesquelles une seule réalise le meilleur ajustement. Soit (D) d'équation $y = ax + b$ l'une de ces droites. Déterminons a ***et*** b pour que (D) soit véritablement le meilleur ajustement.
En effet, à chaque modalité x_i du caractère X correspondent :

- Une modalité y_j du caractère Y telle que le point de coordonnées (x_i, y_j) appartienne au nuage.
- Un point de (D) de coordonnées $(x_i, ax_i + b)$.

Si le point considéré n'appartient pas à (D) alors le nombre $[y_j - (ax_i + b)]$ est non nul.

(D) est un meilleur ajustement si la somme des nombres $n_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2$ est minimale.

Posons S $(a, b) = \sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_{j-}\, ax_i - b)^2$ où x_i, $d_i = [y_i - (ax_i + b)]$ désigne la « distance verticale » du point de coordonnées (x_i, y_j) non situé sur (D) au point de coordonnées $(x_i, ax_i + b)$ mesurées parallèlement à l'axe des ordonnées et $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$

Détermination de b ***et*** a :

- Pour a fixé, déterminons la valeur de b qui minimise $S\,(a\,;\,b)$.

Soit f la fonction définie par : $\boldsymbol{f(b)} = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{y_{i-}\, ax_i - b})^2$

Etant une fonction du second degré, $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{f'(b)} = -2\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{y_{i-}\, ax_i - b})$

Si $\boldsymbol{f}$ admet un minimum en $\boldsymbol{b}$, alors $\boldsymbol{f'(b)} = \boldsymbol{0}$.

$\boldsymbol{f'(b)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{a}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x_{i-}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{y_j} - \boldsymbol{a}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x_{i-}Nb} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow$
$\boldsymbol{b} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{y_{i-}} \frac{a}{N}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x_i} = \overline{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{x}}$ d'où $\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{x}}$.

Ce résultat montre que la droite (D) passe par le point moyen G ($\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}$) du nuage des points.

En remplaçant $\boldsymbol{b}$ par sa valeur dans $\boldsymbol{S}$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, on obtient ;

$\boldsymbol{g(a)} = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{y_{i-}\, ax_i} - \overline{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{x}})^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[(\boldsymbol{y_i} - \overline{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})\right]^2$

- Déterminons maintenant la valeur de a qui minimise $\boldsymbol{g(a)}$:

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toute fonction polynôme et on a
$\boldsymbol{g'(a)} = -2\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}}) \left[(\boldsymbol{y_i} - \overline{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})\right]$

$\boldsymbol{g'(a)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}}) \left[(\boldsymbol{y_i} - \overline{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})\right] = 0$
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{y_i} - \overline{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{a}\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^2 = 0$

Donc $\boldsymbol{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})} = \frac{\partial_{XY}}{\partial_X^2} = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$

Propriété

P est une population d'effectif N.

X et Y deux caractères étudiés sur une population P, $\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ *l'ensemble des modalités de X,* $\{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_p}\}$ *l'ensemble des modalités de Y,*
$\overline{\boldsymbol{x}}$ ***la moyenne arithmétique de la série de caractère X et*** $\overline{\boldsymbol{y}}$ *celle de la série de caractère Y,* n_{ij} *l'effectif du couple de modalités* (x_i, y_j)*, V(X) la variance de la série de caractère X, Cov(X, Y), la covariance de la série double de caractères X et Y.*
Les variable X et Y étant en corrélation linéaire, alors, il existe une droite d'ajustement (D) du nuage et une seule qui constitue le meilleur ajustement de ce nuage. Elle a pour équation : $y = ax + b$ *avec* $a = \frac{\partial_{XY}}{\partial_X^2}$ *et* $b = \overline{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{x}}$.

Cette droite (D) est la droite des moindres carrés ou droite de régression de Y en X ; elle passe par le point moyen G $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}})$ *du nuage.*

Remarque

Une démarche analogue montre l'existence d'une droite d'ajustement (D') du nuage et une seule, d'équation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a'y} + \boldsymbol{b'}$

avec : $\boldsymbol{a'} = \frac{\partial_{XY}}{\partial_Y^2}$ et $\boldsymbol{b'} = \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a'}\overline{\boldsymbol{y}}$

La droite (D') ainsi déterminée est la droite de régression de X en Y ; elle passe aussi par le point moyen G $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}})$.

SEQUENCE 40

Exemple de détermination de la droite des moindres carrés

Objectif

Déterminer une équation de la droite des moindres carrés

Exemple

Reprenons la série des notes obtenus par dix élèves en biologie et en physique et déterminons les équations des droites de régression x en y et de y en x.

	x_i	y_j	$x_i y_j$	${x_i}^2$	${y_j}^2$
	9	10	90	81	100
	12	13	156	144	169
	5	8	40	25	64
	6	10	60	36	100
	9	13	117	81	169
	14	17	238	196	289
	3	5	15	9	25
	6	8	48	36	64
	12	16	192	144	256
	14	16	224	196	256
total	90	116	1180	948	1492

Soit (D) et (D') les droites de régression respectives de $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y}$.

(D) : $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ et (D') : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a'y} + \boldsymbol{b'}$

- Détermination de (D).

On a : $\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{9}\ \boldsymbol{et}\ \overline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{11,6}$; v (X) $= \frac{\mathbf{948}}{\mathbf{10}} - 9^2 = 13{,}8$; Cov (X, Y) $= \frac{\mathbf{1180}}{\mathbf{10}} - 9\times 11{,}6 = 13{,}6$;
$\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{13{,}6}}{\mathbf{13{,}8}} = \mathbf{0,986}$; $\boldsymbol{b} = 11{,}6 - 0{,}986\times 9 = 2{,}730$

La droite de régression de y en x est donc la droite (D) d'équation : $y = 0{,}986\boldsymbol{x} + \mathbf{2,73}$.

– Détermination de (D').

On ajoute : V(Y) = $\frac{1492}{10} - 11,6^2$ =14,54 ;

$a' = \frac{13,6}{14,54} = 0,935$ et b' = 9 – 0,935 × 11,6 = – 1,846

La droite de régression de x *en* y est donc la droite (D') d'équation : $x = 0,935y - 1,846$; soit $y = 1,07x + 1,97$

SEQUENCE 41

Détermination du Coefficient de corrélation linéaire

Objectif

Définir et déterminer le coefficient de corrélation linéaire

Définition

- *Deux variables statistiques X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en Y sont des droites.*
- *On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère (X, Y) le nombre réel r défini par :* $\frac{\partial_{XY}}{\partial_X \times \partial_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

Propriétés

- *Les coefficients directeurs a et a 'des droite de régression de Y en X et de X en Y sont définis par :* $a = \frac{\partial_{XY}}{(\partial_X)^2}$ *et* $a' = \frac{\partial_{XY}}{(\partial_Y)^2}$
- *On a :* $aa' = r^2$

Définition

On appelle valeur absolue du coefficient de corrélation linéaire la racine carrée du produit du coefficient directeur de la droite de régression de Y en X par le coefficient directeur de la droite de régression de X en Y.

Remarque

- On admet que $|r| \leq 1$.
- Si $|r|$ est proche de 1 alors on dit qu'il y a une bonne corrélation ou une forte corrélation entre les deux variables.

En général, on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est forte lorsqu'on a : $0,87 \leq |r| \leq 1$.

Leçon : espace vectoriel

SEQUENCE 42

Définition d'un espace vectoriel

Objectif

Démontrer qu'un ensemble muni de deux lois est un espace vectoriel sur un corps

Définition et exemple

Soit E un ensemble muni d'une addition définie par : $\begin{matrix} E\times E\longrightarrow E \\ (x,y)\longmapsto x+y \end{matrix}$ **et** d'un produit extérieur défini par :

$\begin{matrix} \mathbb{K}\times E\longrightarrow E \\ (\lambda,\chi)\longmapsto \lambda\chi \end{matrix}$ $\boldsymbol{o}$ù $\mathbb{K}$ est un corps donné.

On dit que l'ensemble E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Si les lois dont l'ensemble E est muni vérifient les conditions suivantes :

(E, +) est un groupe commutatif

Le produit est compatible avec le produit : $\forall \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu x}) = (\boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{\mu}).\boldsymbol{x}$

L'élément $1 \in \mathbb{K}$ est un élément neutre pour le produit extérieur : $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{1}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

Le produit doublement distributif par rapport à l'addition :

$\forall \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E},\ (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}).\boldsymbol{x} = \ \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{x}$

et $\forall \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\lambda}.(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \ \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{y}$

Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés des vecteurs et les éléments de l'ensemble $\mathbb{K}$ par lesquels on peut les multiplier sont appelés des scalaires.

Remarque

Lorsque l'étude de l'espace vectoriel E se fait sur l'ensemble $\mathbb{R}$, on dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De même, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ ou espace vectoriel complexe.

Exemples d'espace vectoriels

1. Ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace) muni de la somme vectorielle et du produit des vecteurs par les réels, est un espace vectoriel sur$\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}$plets de réels $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \dots, \boldsymbol{x_n})$ muni de la somme terme à terme et du produit par un reel terme à terme est un espace vectoriel reel, note$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
   Ainsi, plus particulièrement, $\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$ et $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ munis respectivement de la somme définie par : $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) + (\boldsymbol{x'}_1 - \boldsymbol{x'}_2) = (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x'}_1, \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x'}_2)[\boldsymbol{resp}.(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) + (\boldsymbol{x'}_1, \boldsymbol{x'}_2, \boldsymbol{x'}_3) = (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x'}_1, \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x'}_2, \boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{x'}_3)]$ et du produit d'un reel sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des suites réelles munie de la somme de deux suites $(\boldsymbol{u_n})$ et $(\boldsymbol{v_n})$ étant la suite $(\boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{v_n})$ et du produit d'une suite $(\boldsymbol{u_n})$ par un reel $\boldsymbol{\lambda}$ étant la suite$(\boldsymbol{\lambda u_n})$, est un espace vectoriel reel.
   De même, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est unespace vectoriel.

SEQUENCE 43

Famille de vecteurs

Objectif

Définir une famille de vecteurs

Définition

Une famille de vecteurs dans un espace vectoriel E est un $\boldsymbol{k-u}$*plet* $(\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2} \ldots\ldots \boldsymbol{l_k})$ *d'éléments de E.*

Combinaison linéaire

Définition 1

Soit E un espace vectoriel, $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_n})$ *une famille de vecteurs de E.*

Une combinaison linéaire de la famille $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_n})$ *est un vecteur* $\boldsymbol{x}$ *de E qui peut s'écrire sous la forme* $x = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i}\, \boldsymbol{e_i}$ *,pour* $\boldsymbol{n-u}$*plet* $(\boldsymbol{\lambda_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{\lambda_n})$ *d'élément de* $\mathbb{K}$.

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$, le vecteur $(2, 5, -\boldsymbol{3})$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, -\boldsymbol{2},\ \boldsymbol{6})$ et $(-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{11}, -\boldsymbol{21})$.

En effet, on a : $(2, 5\ ; -\boldsymbol{3}) = \boldsymbol{3}(\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{2}, \boldsymbol{6}) + (-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{11}, -\boldsymbol{21})$.

Question

Le vecteur $(0, 9{,}2)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $(\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{2}, \boldsymbol{6})$ **et** $(-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{11}, -\boldsymbol{21})$?

Définition 2

Soit $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ *une famille de vecteurs.*

L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est noté vect $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$, on considère $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1})$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{a})$ où$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$.

Donnons une condition nécessaire et suffisante sur $\boldsymbol{a}$ pour que $\mathbb{K} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2})$ appartienne à vect$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

On sait que vect$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille de vecteurs $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Or, $\boldsymbol{u} \in$vect$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{\mu y}$ où $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$

et $= \boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{\mu y} \Leftrightarrow (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{a})$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{1} \\ -\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu a} = \boldsymbol{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} + \boldsymbol{2a} = \boldsymbol{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \end{cases}.$$

On a donc : $\boldsymbol{u} \in \text{vect}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}$ et
donc $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}$

SEQUENCE 44

Familles génératrices – Familles libres – Familles liées

Objectif

Définir une famille génératrice, une famille libre et une famille liée

Familles génératrices

Définition

Une famille $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ *est génératrice de E si tout élément de l'espace vectoriel E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille* $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$*. On a donc :*
$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \exists\ \boldsymbol{\lambda_{1,\ldots\ldots\lambda_k}}, \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i}\, \boldsymbol{e_i}$*. Autrement dit, vect*$(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k}) = \boldsymbol{E}$*.*

Remarque

Pour montrer qu'une famille est génératrice, la démarche consiste à prouver que l'équation $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i}\, \boldsymbol{e_i}$ qui peut s'écrire comme système linéaire dont les inconnues sont les coefficients $\boldsymbol{\lambda_i}$ admet toujours une solution.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles, soient $\boldsymbol{u} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\boldsymbol{v} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\mathbf{1})$ et$\boldsymbol{w} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$.

Montrons que $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est une famille génératrice de$\mathbb{R}^3$, on va montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ **et** $\boldsymbol{w}$ par la mise en œuvre de la relation suivante :

$\mathbb{R}^3 = \boldsymbol{vect}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \Leftrightarrow \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 \exists (\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \boldsymbol{\lambda_3})) \in \mathbb{R}^3$ Tel que$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\lambda_1}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda_2}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\lambda_3}\boldsymbol{w}$.

Donc $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\lambda_1}(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) + \boldsymbol{\lambda_2}(\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}) + \boldsymbol{\lambda_3}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$

D'où$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda_1} + \boldsymbol{\lambda_3} = \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda_2} + \boldsymbol{\lambda_3} = \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{\lambda_1} - \boldsymbol{\lambda_2} + \boldsymbol{\lambda_3} = \boldsymbol{z} \end{cases}$.

Ce système admet une solution. Sa résolution nous donne : $\boldsymbol{\lambda_2} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{\lambda_3} = \boldsymbol{yx} + \boldsymbol{z}$ et$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$.

Donc la famille $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est génératrice de$\mathbb{R}^3$.

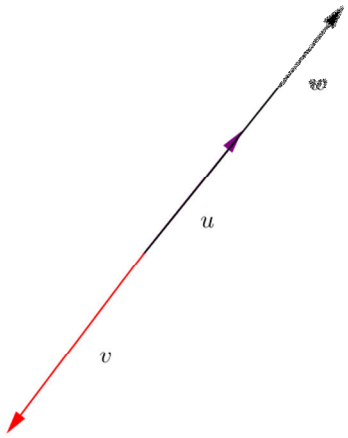
Familles libre – famille liée

Définition

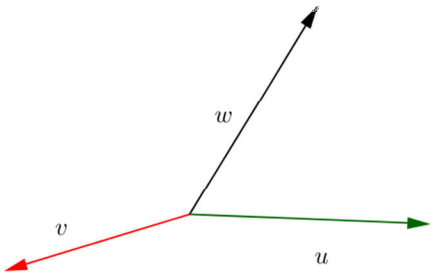
Une famille $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ *est dite libre si aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres de la famille. On dit alors que ses éléments sont linéairement indépendants.*

En d'autres termes, on a : $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i}\, \boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{1} \ldots\ldots \boldsymbol{k}\}, \boldsymbol{\lambda_i} = \boldsymbol{0}$.

Une famille de vecteur est dite liée lorsque cette famille n'est pas libre.



famille (u,v,w) liée



faile (u,v,w) libre

Remarque

Lorsqu'on veut prouver qu'une famille de vecteurs est libre, on procède en vérifiant que le système linéaire homogène obtenu en écrivant l'égalité $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i}\, \boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{0}$ a toujoues pour solution la solution nulle qui est unique.

Exemple

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et soient$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0})$, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1})$ et $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{3}, -\boldsymbol{1})$ des vecteur de$\mathbb{R}^3$.

Montrons que la famille $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est libre.

Pour cela, supposons que $\boldsymbol{\lambda_1 u} + \boldsymbol{\lambda_2 v} + \boldsymbol{\lambda_3 w} = \boldsymbol{0}$ et résolvons cette équation où $\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{\lambda_3}$ sont des inconnus.

On a : $\begin{cases} \boldsymbol{\lambda_1} + \boldsymbol{\lambda_2} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\lambda_1} - \boldsymbol{\lambda_2} + \boldsymbol{3\lambda_3} = \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\lambda_2} - \boldsymbol{\lambda_3} = \boldsymbol{0} \end{cases}$.

En résolvant ce système, on obtient : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$.

Il s'ensuit que la famille $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est une famille libre

SEQUENCE 45

Base d'un espace vectoriel

Objectif

Définir la base d'un espace vectoriel

Bases

Définition

Soit (E, +, $*$) un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ *et soit* $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ *une famille non vide de vecteur E.*

La famille $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ *est une base de E si elle est à ma fois libre et génératrice. Autrement dit, tout élément de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'élément de la famille.*

Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition

Soit $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ *une base d'un espace vectoriel E et* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ *tel que* $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i}\, \boldsymbol{e_i}$.

Les réels $\boldsymbol{\lambda_i}$ *sont appelés coordonnées de* $\boldsymbol{x}$ *dans la base* $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ *et les vecteurs* $\boldsymbol{\lambda_i e_i}$ *sont les composantes de* $\boldsymbol{x}$ *dans cette même base.*

Exemple

On considère l'ensemble E $=\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles.

Soit $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{0}, -\boldsymbol{1})$, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{3})$ et $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2})$ des vecteurs de E.

Préciser les coordonnées d'un vecteur dans cette base.

D'après la définition d'une base, une famille de vecteurs est une base si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire, de façon unique d'éléments de famille.

Supposons que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ est un élément de E et soit $\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}$ et $\boldsymbol{\lambda_3} \in \mathbb{R}^3$ tel que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\lambda_1}u+ \boldsymbol{\lambda_2 v}$ et $\boldsymbol{\lambda_3 w} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda_1}(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{0}, -\boldsymbol{1}) + \boldsymbol{\lambda_2}(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}) + (\boldsymbol{\lambda_3}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}) = (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$.

On a : $\begin{cases} \boldsymbol{2\lambda_1 + 2\lambda_2 = x} \\ \boldsymbol{\lambda_2 + \lambda_3 = y} \\ -\boldsymbol{\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\lambda_1 = \frac{1}{4}(x + 4y - 2z)} \\ \boldsymbol{\lambda_2 = \frac{1}{4}(x + 4y - 2z)} \\ \boldsymbol{\lambda_3 = \frac{1}{4}(-x + 8y - 2z)} \end{cases}$

On a montré que : $\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{E}, \exists(\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \boldsymbol{\lambda_3})) \in \boldsymbol{E}/\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\lambda_1 u} + \boldsymbol{\lambda_2 v} + \boldsymbol{\lambda_3 w}$.

Donc la famille $\forall(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est une base de E.

De plus, comme $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\lambda_1 u} + \boldsymbol{\lambda_2 v} + \boldsymbol{\lambda_3 w} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(x + 4y - 2z)} + \boldsymbol{\frac{1}{4}(x + 4y - 2z)} + \boldsymbol{\frac{1}{4}(-x + 8y - 2z)}$ alors les coordonnées du vecteur $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ de E est la famille $\left(\boldsymbol{\frac{1}{4}(x + 4y - 2z)}, \boldsymbol{\frac{1}{4}(x + 4y - 2z)}, \boldsymbol{\frac{1}{4}(-x + 8y - 2z)}\right)$

SEQUENCE 46

Sous espaces vectoriel

Objectif

Définir et caractériser un sous-espace vectoriel

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel s'il est lui-même un espace vectoriel (muni de l'addition et de la multiplication définie sur E)

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1

Soit E$(\boldsymbol{E}, +, .)$ un espace vectoriel sur$\mathbb{K}$. Soit F une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E$(\boldsymbol{E}, +, .)$ si et seulement si :

- $\mathbf{0} \in \boldsymbol{F}$ (F contient 0)
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$ (F est stable pour l'addition)
- $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}$,$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}$ (F est stable pour la multiplication par un réel)

Démonstration

Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel$(\boldsymbol{E}, +, .)$.

Donc F est stable pour la loi + et la loi. de plus, F contient 0 puisque F est un sous-groupe du groupe (E,+).

Réciproquement, soit F$\subset$ E et F contenant 0 et stable pour les lois + et . . Donc F est non vide et la loi induite sur F par l'addition dans E est une loi interne sur F.

D'autre part, soit $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{F}^2, -\boldsymbol{y} = (-\mathbf{1}).\boldsymbol{y}$ est dans F.

De plus, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y})$ est dans F. On en déduit que F est un sous-groupe de (E, +) donc, en particulier, (F, +) est un groupe commutatif.

On vérifie ensuite que les quatre axiomes concernant la loi externe restent valables dans F par restriction. Finalement F muni des lois induites est un espace vectoriel donc F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

Théorème 2

Soit $(\boldsymbol{E}, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit F une partie de E.

F est sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\boldsymbol{E}, +, .)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathbf{0} \in \boldsymbol{F} & (\textbf{F contient 0}) \\ \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{F}^2 , \forall (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{K}^2, \boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{\mu y} \in \boldsymbol{F} & (\textbf{F est stable par combinaison linéaire}) \end{cases}$$

Démonstration

- Supposons que F vérifie le théorème 1 de la caractérisation, alors$\mathbf{0} \in \boldsymbol{F}$.

Soient $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{F}^2$ et$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{K}^2$, alors $\boldsymbol{\lambda x} \in \boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{\mu y} \in \boldsymbol{F}$ donc $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu y} \in \boldsymbol{F}$. On a donc théorème 1$\Longrightarrow$théorème 2.

- Supposons que F vérifie le théorème 2 de la caractérisation. Alors$\mathbf{0} \in \boldsymbol{F}$.

De plus soient $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{F}^2$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}$, on a : $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{1}.\boldsymbol{x} + \mathbf{1}.\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$ et$\boldsymbol{\lambda x} = \boldsymbol{\lambda x} + \mathbf{0}.\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$.
Donc théorème 2$\Longrightarrow$théorème 1.

Exemple

Soit $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles.

Montrons que F= $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \mathbf{2}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Nous allons utiliser le théorème 2 caractérisant les sous-espaces vectoriels pour résoudre notre problème.

- On sait que $\mathbf{0} + \mathbf{0} - \mathbf{2}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ donc le vecteur nul $(\mathbf{0},0,0)$ appartient à F.
- Vérifions la stabilité de F par combinaison linéaire.
  Soit donc $(\boldsymbol{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \boldsymbol{F}$, $(\boldsymbol{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}') \in \boldsymbol{F}$ et soit $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^2$.
  On a donc $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}') = (\boldsymbol{\lambda x}, \boldsymbol{\lambda}\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}\mathbf{z}) + (\boldsymbol{\mu x}', \boldsymbol{\mu}\mathbf{y}', \boldsymbol{\mu}\mathbf{z}')$
  $= (\boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{\mu x}', \boldsymbol{\lambda}\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}\mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}\mathbf{z} + \boldsymbol{\mu}\mathbf{z}')$

De plus, $(\boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{\mu x}') + (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}\mathbf{y}') - \mathbf{2}(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{z}') = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \mathbf{2}\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' - \mathbf{2}\boldsymbol{z}')$

$$= \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{0} + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Donc F est stable par combinaison linéaire.

Puisque les deux conditions sont vérifiées, il s'ensuit que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

SEQUENCE 47

Sous espaces vectoriel engendré par une famille de vecteurs
Objectif
Définir un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs
Théorème
Soit $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, alors vect$(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ est un sous-espace vectoriel de E.
C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k}$, (c'est-à-dire que si F est un sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille, alors nécessairement vect$(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k}) \subset \boldsymbol{F}$).
On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille$(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$.
La famille $(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ est donc une famille génératrice de vect$(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$.

Démonstration

On sait $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{e_i} + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\mu_i e_i} = \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{\lambda_i} + \boldsymbol{\mu_i})\, \boldsymbol{e_i}$ et $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i}\, \boldsymbol{e_i} = \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{\delta \lambda_i}) \boldsymbol{e_i}$, donc vect$(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$ est un sous-espace vectoriel de E.

De plus, un sous-espace contenant les éléments de la famille contient aussi ses combinaisons linéaires.

Donc il contient absolument vect$(\boldsymbol{e_1}, \ldots\ldots \boldsymbol{e_k})$.

Exemple

Considérons l'ensemble : F= $\{(-\boldsymbol{x}2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, 3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}, -\boldsymbol{x})/\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel.

On a : F= $\{(-\boldsymbol{x}2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, 3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}, -\boldsymbol{x})/\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\}$

$= \{\boldsymbol{x}(2,3,-1)+\boldsymbol{y}(1,-2,0)/(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2\} = \boldsymbol{vect}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ où $\boldsymbol{u} = (2,3,-1)$ et $\boldsymbol{v} = (1,-2,0)$ donc F est un sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \big((2,3,-1),(1,-2,0)\big)$.

Remarque importante

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de $\boldsymbol{k}$ équations à $\boldsymbol{n}$ inconnues est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. On peut d'ailleurs toujours décrire un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ à l'aide d'un tel système d'équations.

Présentons un exemple précis.

Considérons l'ensemble F défini par :

F= $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3/\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}=0 \; \boldsymbol{et} \; 2\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0\}$

Montrons que F est un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs que nous aurons à démontrer.

L'ensemble F est en fait l'ensemble des solutions du système de deux équations à 3 inconnues suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}=0 \\ 2\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0 \end{cases}$$

Résolvons ce système. On a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+3\boldsymbol{z}=0 \\ 2\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}=-3\boldsymbol{z} \\ 2\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}=-13\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y}=5\boldsymbol{z} \end{cases}.$$

Finalement on a : F= $\{(13\boldsymbol{z}, 5\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})/\in \mathbb{R}\} = \{\boldsymbol{z}(-13,5,4)/\in \mathbb{R}\}$.

Donc $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{vect}(\boldsymbol{u})$ où $\boldsymbol{u} = (-13,5,4)$.

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont une famille génératrice est la famille $(\boldsymbol{u})$ constituée du vecteur$\vec{\boldsymbol{u}}$.

SEQUENCE 48

Intersection de sous-espaces vectoriels

Objectif

Déterminer l'intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel

Démonstration

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels, il est evident que $\mathbf{0} \in$ F et $\mathbf{0} \in \boldsymbol{G}$ donc $\mathbf{0} \in \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$.
- Soient $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in (\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G})^{\mathbf{2}}$ et $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{K}^{\mathbf{2}}$.
  Donc $\boldsymbol{\lambda_x} + \boldsymbol{\mu y} \in$ F et $\boldsymbol{\lambda_x} + \boldsymbol{\mu y} \in \boldsymbol{G}$ d'où $\boldsymbol{\lambda_x} + \boldsymbol{\mu y} \in \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$.
  $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ est stable par combinaisons linéaires.

Il s'ensuit que $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Présentons un exemple permettant de déterminer un sous-espace vectoriel $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ sachant que F et G sont des sous-espaces vectoriels.

Exemple

On considère les ensembles suivants :

F= $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} / \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{z} = \mathbf{0}\}$ et $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{vect}\big((\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1}), (-\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})\big)$.

Il est évident que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ et que G aussi , puisqu'il est l'ensemble de combinaisons linéaires des vecteurs $(\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$ et , $(-\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$.

Déterminons l'intersection $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$.

On sait que G $= \boldsymbol{vect}\big((\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1}), (-\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})\big)$ donc soit $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G}$, on a

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1}) + \boldsymbol{\mu}(-\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ pour $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.

Donc $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})$, on aura , en portant ces valeurs dans l'expression de F, $\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu} + \mathbf{2}(-\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{2}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{2}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \Leftrightarrow -\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ d'où $\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\lambda}$.

Sachant que $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})$, et puisque $\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\lambda}$ alors $\boldsymbol{x} = (\mathbf{3}\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}, -\mathbf{2}\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{3}, -\mathbf{1}, -\mathbf{2})$.

Comme $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ alors $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G} = \boldsymbol{vect}(\mathbf{3}, -\mathbf{1}, -\mathbf{2})$.

Il s'ensuit que $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ est un sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\boldsymbol{u})$ constituée du vecteur $\boldsymbol{u} = (\mathbf{3}, -\mathbf{1}, -\mathbf{2})$.

SEQUENCE 49

Applications linéaires

Objectif

Définir une application linéaire

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels.

Une application linéaire de E dans F est une application $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1. $\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E}^2, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.
2. $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Théorème

Une application $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ est linéaire si et seulement si : $\forall(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{K}^2, \forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E}^2$, on a :

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{y})=\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.

Démonstration

Supposons que $\boldsymbol{f}$ vérifie les conditions de la définition ci-dessus, alors on a :

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{y})$ Par application de la condition 1.

$=\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ par application de la condition 2.

Réciproquement, $\forall(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E}^2$, on a :

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{y})=\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.

. Pour $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\mu}=\mathbf{1}$, on a donc : $\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E}^2$, , $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.

. Pour $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}$, on a : : $\forall \in \boldsymbol{E}$, : $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{x})=\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

donc $\boldsymbol{f}$ est une application linéaire.

Exemple

Soit $\boldsymbol{f}$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{f}\big((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\big)=(\mathbf{2} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}+\mathbf{2} \boldsymbol{z})$.

Montrons que $\boldsymbol{f}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Posons $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ et $\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et soit $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^2$.

Calculons $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{v})$. On a ;

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}'))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{x}', \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{y}+\boldsymbol{u} \boldsymbol{y}', \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{z}+\boldsymbol{u} \boldsymbol{z}') \\
&=(\mathbf{2} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{u} \boldsymbol{x})-(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{y}+\boldsymbol{u} \boldsymbol{y}')+(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{z}+\boldsymbol{u} \boldsymbol{z}'), \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{x}'+\mathbf{2}(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{z}+\boldsymbol{u} \boldsymbol{z}')) \\
&=(\mathbf{2} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{y}+\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{z})+(\mathbf{2} \boldsymbol{u} \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{u} \boldsymbol{y}'+\boldsymbol{u} \boldsymbol{z}'),(\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{x}+\mathbf{2} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{z})+(\boldsymbol{u} \boldsymbol{x}'+\mathbf{2} \boldsymbol{u} \boldsymbol{z})) \\
&=(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{2} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})+\boldsymbol{\mu}(\mathbf{2} \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{z}'), \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}+\mathbf{2} \boldsymbol{z})+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}'+\mathbf{2} \boldsymbol{z}')) \\
&=\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{2} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}+\mathbf{2} \boldsymbol{z})+\boldsymbol{\mu}(\mathbf{2} \boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{z}'), \boldsymbol{x}'+\mathbf{2} \boldsymbol{z}') \\
&=\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \boldsymbol{z}')=\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

Donc $\boldsymbol{f}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque

On note $\mathcal{L}$(E,F) l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ l'ensemble des application linéaires de E dans E.

SEQUENCE 50

Applications particulières

Objectif

Définir des applications particulières

Définition

- *Une application linéaire $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow F$ est aussi appelée morphisme de E dans F. Donc un morphisme de E dans F appartient à $\mathcal{L}(\boldsymbol{E})$.*
- *Une application linéaire $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow E$ est aussi appelée endomorphisme de l'espace vectoriel E. Donc un endomorphisme de E appartient à $\mathcal{L}(\boldsymbol{E})$.*
- *Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme.*
- *Un endomorphisme bijectif est un automorphisme.*
  L'ensemble des automorphismes d'une espace vectoriel E est noté GLE.

Théorème 1

Si E et F sont deux espaces vectoriel K, alors $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Démonstration

Si on considère l'ensemble $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ des applications linéaires de E dans E, on peut vérifier aisément que la somme de deux applications linéaires est une application linéaire, que l'élément neutre est l'application nulle et que l'opposé d'une application linéaire est toujours défini. De plus, les produits par des constantes d'applications linéaires sont linéaires et les relations de distributivité effectives. Donc $\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ munie des opérations usuelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Théorème 2

Soient $(\boldsymbol{E}, +, \ .)$ et $(\boldsymbol{F}, +, \ .)$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$.

On a nécessairement : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{O_E}) = \boldsymbol{O_F}$.

Démonstration

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{O_E}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{O}.\boldsymbol{O_E}) = \boldsymbol{O}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{O_E}) = \boldsymbol{O_F}$.

SEQUENCE 51

Noyau et image d'une application linéaire

Objectif

Définir le noyau et l'image d'une application linéaire

Définition

Soient $(\boldsymbol{E},+,\ .)$ *et* $(\boldsymbol{F},+,\ .)$ *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$.

Soit $\boldsymbol{f}$ *une application linéaire de E dans F.*

On appelle noyau de $\boldsymbol{f}$*, l'ensemble des éléments* $\boldsymbol{x}$ *de E tel que* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0_F}$.

Il est noté $\boldsymbol{kerf}$.

Ainsi : $\boldsymbol{kerf} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}/\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0_F}\} = \boldsymbol{f^{-1}}(\{\boldsymbol{0}\})$.

On appelle image de $\boldsymbol{f}$ *et on note* $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f})$*, l'ensemble des images des éléments de E par* $\boldsymbol{f}$.

Ainsi : $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}\} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{E})$ *ou encore*

$$\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}/\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}.$$

Proposition

Si $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow$F est une application linéaire, alors l'image d'un sous-espace vectoriel E est toujours un sous-espace vectoriel de F et l'image réciproque de tout sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Corollaire

Soient $(\boldsymbol{E},+,\ .)$ et $(\boldsymbol{F},+,\ .)$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Soit $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow$ F une application linéaire.

Alors, $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{f})$ est un sous-espace vectoriel de E, et $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f})$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration

Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{G}))^{\boldsymbol{2}}$.

Comme $\boldsymbol{f}$ est une application linéaire,

$\boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{\lambda y} = \boldsymbol{\lambda f}(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\mu f}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda z} + \boldsymbol{\mu w}) \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{G})$ puisque $\boldsymbol{\lambda z} + \boldsymbol{\mu w} \in \boldsymbol{G}$.

L'image de G est donc stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de G.

De même, soit H un sous-espace vectoriel de F et soit $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{f^{-1}}(\boldsymbol{H})$,

alors $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}$ donc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda z} + \boldsymbol{\mu w}) = \boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{\mu y} \in \boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{\lambda z} + \boldsymbol{\mu w} \in \boldsymbol{f^{-1}}(\boldsymbol{H})$.

SEQUENCE 52

Noyau et image d'une application linéaire

Objectif

Déterminer le noyau et l'image des applications particulières

Théorème

Soient $(\boldsymbol{E},+,\ .)$ et $(\boldsymbol{F},+,\ .)$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Et soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

- $\boldsymbol{f}$ est injective si et seulement si $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{f}) = \{\mathbf{0}\}$.
- $\boldsymbol{f}$ est surjective si et seulement si $\boldsymbol{I}\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}$.
- $\boldsymbol{f}$ est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{f}) = \{\mathbf{0}\}$ et $\boldsymbol{I}\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}$.

Exemple

On considère l'application $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ défini par :

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}, -\boldsymbol{y})$.

1. Déterminons $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{f})$ et $\boldsymbol{I}\mathbf{m}(\mathbf{f})$.

D'abord, on vérifie que $\boldsymbol{f}$ est une application linéaire.

Déterminons ensuite $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{f})$. On sait que $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$.

Soit $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{ker}(\boldsymbol{f}) \Leftrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\mathbf{0},\mathbf{0}).$$

Donc $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{f}) = \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$.

Et par application du théorème ci-dessus, comme $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{f}) = \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$ alors $\boldsymbol{f}$ est une application injective.

Déterminons maintenant $\boldsymbol{I}\mathbf{m}(\mathbf{f})$.

Soit $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ et supposons que $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{I}\mathbf{m}(\mathbf{f})$.

On a : $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{I}\mathbf{m}(\mathbf{f}) \Leftrightarrow \exists(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}/\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

Or $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}-\mathbf{2}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\mathbf{3}\boldsymbol{c} = \mathbf{0} \end{cases}$.

Donc, si $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\mathbf{3}\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, le système d'inconnues $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ admet un couple solution qui est $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$, ce qu'on peut interpréter par :$\exists(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ /\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$.

Finalement $\boldsymbol{I}\mathbf{m}(\mathbf{f}) = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}/\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\mathbf{3}\boldsymbol{r} = \mathbf{0}\}$.

$\boldsymbol{f}$ est-elle injective ?

Elle serait surjective si $\boldsymbol{Im}(\mathbf{f}) = \mathbb{R}^3$, on constate que, $(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, par exemple, n'est pas dans $\boldsymbol{Im}(\mathbf{f}) \neq \mathbb{R}^3$ et $\boldsymbol{f}$ n'est pas sujective.

Théorème

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ et $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ une base de E.

Alors $\boldsymbol{Im}(\mathbf{f}) = \mathbf{vect}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}), \dots, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_n}))$.

Exemple

On considère l'application linéaire $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y}, -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.

Déterminons $\boldsymbol{Im}(\mathbf{f})$ en utilisant le théorème 3.

On sait que dans $\mathbb{R}^2$, la base canonique est constituée des deux vecteurs $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ et $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

D'après le théorème 3, $\boldsymbol{Im}(\mathbf{f})$ est engendré par $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ et $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Or, $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$ et $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$.

On obtient donc : $\boldsymbol{Im}(\mathbf{f}) = \boldsymbol{vect}(= (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{2}), (-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}))$.

SEQUENCE 53

Matrice d'une application linéaire

Objectif

Définir la matrice d'une application linéaire

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$, $\boldsymbol{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ une base de E et $\boldsymbol{\mathcal{B}'} = (\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n})$ une base de F (on suppose que E et F possèdent des bases constituées d'un nombre fini de vecteurs).
La matrice représentative de $\boldsymbol{f}$ dans les base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$ est la matrice de la famille $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}), \dots, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_n}))$dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$.
On note : $\boldsymbol{Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}(\boldsymbol{f})$.
Exemple
On considère l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \mathbf{5}\boldsymbol{z})$.

Déterminons la matrice de $\boldsymbol{f}$ dans les bases canoniques.

On sait que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est formée des vecteurs $\boldsymbol{e_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\boldsymbol{e_2} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$, et $\boldsymbol{e_3} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ alors que la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est constituée des vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$ et $\boldsymbol{\varepsilon_2} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Calculons les images des vecteurs $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ et $\boldsymbol{e_3}$ par $\boldsymbol{f}$.

On a : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = (\mathbf{4}, -\mathbf{2})$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) = (-\mathbf{3}, \mathbf{1})$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_3}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{01}) = (\mathbf{1}, -\mathbf{5})$.

Exprimons $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1})$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2})$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_3})$ dans la base canonique $\mathbb{R}^2$. On a :

$\boldsymbol{f(e_1) = (4,-2) = 4(1,0) - 2(0,1) = 4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2}$ **.**

$\boldsymbol{f(e_2) = (-3,1) = -3(1,0) + 1.(0,1) = -3\varepsilon_1 + 1\varepsilon_2}$

$\boldsymbol{f(e_3) = (1,-5) = 1(1,0) - 5(0,1) = 1\varepsilon_1 - 5\varepsilon_2}$ **.**

Les coefficients obtenus constituent les composantes de la matrice cherchée.

On a : $\boldsymbol{Mat_{BC}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}}$ où BC = bases canoniques.

Remarque

On peut représenter une application linéaire par une matrice dans des bases autres que les bases canoniques des espaces vectoriels concernés.

SEQUENCE 54

Exemple de détermination de la matrice d'une application linéaire

Objectif

Déterminer la matrice d'une application linéaire

Exemple

On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par

$\boldsymbol{f(x,y) = (x+y, 2x+3y, x-y)}$.

Soit $\boldsymbol{e = (e_1, e_2)}$ une base de $\mathbb{R}^2$ où $\boldsymbol{e_1 = (1,1)}$ et $\boldsymbol{e_2 = (1,-1)}$ et soit $\boldsymbol{v = (v_1, v_2, v_3)}$ une base de $\mathbb{R}^3$ où $\boldsymbol{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0)}$ **et** $\boldsymbol{v_3 = (1,1,1)}$.

Déterminons la matrice représentative de $\boldsymbol{f}$ dans les bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{v}$.

- On vérifie aisément que $\boldsymbol{e = (e_1, e_2)}$ est une base . De même pour $\boldsymbol{v = (v_1, v_2, v_3)}$.
- Afin de déterminer la matrice demandée, il faut chercher à déterminer les coefficients qui vont constituer la matrice. Pour cela, commençons par calculer $\boldsymbol{f(e_1)}$ **et** $\boldsymbol{f(e_2)}$.

  On a : $\boldsymbol{f(e_1) = f(1,1) = (2,5,0)}$ et $\boldsymbol{f(e_2) = f(1,-1) = (0,-1,2)}$.

  Exprimons $\boldsymbol{f(e_1)}$ **et** $\boldsymbol{f(e_2)}$ dans la base $\boldsymbol{v}$.

  Comme $\boldsymbol{f(e_1) = (2,5,0)}$, pour l'exprimer dans la base $\boldsymbol{v}$, on posera :

  $\boldsymbol{f(e_1) = av_1 + bv_2 + cv_3}$ où $\boldsymbol{a, b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont des réels.

  $\Leftrightarrow \boldsymbol{(2,5,0) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a+b+c=2} \\ \boldsymbol{b+c=5} \\ \boldsymbol{c=0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a=-3} \\ \boldsymbol{b=5} \\ \boldsymbol{c=0} \end{cases}$.

  Il s'ensuit que $\boldsymbol{f(e_1) = -3v_1 + 5v_2 + 0v_3}(1)$.

  Procédons de la même façon pour déterminer les coefficients de l'image du vecteur $\boldsymbol{e_2}$.

  $\boldsymbol{f(e_2) = (0,-1,2)}$. Exprimons $\boldsymbol{f(e_2)}$ dans la base $\boldsymbol{v}$

  On posera : $\boldsymbol{f(e_2) = av_1 + bv_2 + cv_3}$ où $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$.

  $\boldsymbol{f(e_1) = av_1 + bv_2 + cv_3} \Leftrightarrow = \boldsymbol{(0,-1,2) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1)}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a+b+c=0} \\ \boldsymbol{b+c=-1} \\ \boldsymbol{c=2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a=1} \\ \boldsymbol{b=-3} \\ \boldsymbol{c=2} \end{cases}$.

Il s'ensuit que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2}) = \mathbf{1}.\boldsymbol{v_1} - \mathbf{3}\boldsymbol{v_2} + \mathbf{2}\boldsymbol{v_3}$.(2)

Prenant en compte les coefficients de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1})$ **et** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2})$ obtenus aux égalités (1) et (2), nous obtenons donc : $\boldsymbol{Mat_{e,v}}(\boldsymbol{f}) = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

C'est la matrice représentative de $\boldsymbol{f}$ dans les bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{v}$. La première colonne est constituée des coefficients de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1})$ et la deuxième des coefficients de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_2})$.

Théorème

Soit $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$.

Soit $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$. Notons $\times = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées $\boldsymbol{x}$ dans

La base $\boldsymbol{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ de E, et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées

l'image de $\times$ par $\boldsymbol{f}$ dans une autre base $\boldsymbol{\mathcal{B}}' = (\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n})$, alors on a :

$\boldsymbol{F}(\times) = \boldsymbol{M} \times$ où M est la matrice représentant $\boldsymbol{f}$ dans les bases $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$.

SEQUENCE 55

Définition des matrices

Objectif

Définir une matrice, matrice nulle et opposée d'une matrice

Définition d'une matrice et somme

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K}$ *désignant pour nous soit* $\mathbb{R}$ ***soit*** $\mathbb{C}$*,* $\boldsymbol{n}$ ***et*** $\boldsymbol{p}$ *étant des entiers naturels non nuls), un tableau rectangulaire (à n lignes et p colonnes) contenant np éléments de* $\mathbb{K}$*. On note un tel objet* $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{m_{ij}})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

ou de facon complète :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{m_{11}} & \mathbf{m_{12}} & \dots & \mathbf{m_{1p}} \\ \mathbf{m_{21}} & \mathbf{m_{22}} & \dots & \mathbf{m_{2p}} \\ & \vdots & & \\ \mathbf{m_{n1}} & \mathbf{m_{n2}} & \dots & \mathbf{m_{np}} \end{pmatrix}$$

De manière général, $\boldsymbol{m_{ij}}$ *est le terme de la matrice* $\boldsymbol{M}$ *qui se trouve à l'intersection de la* $i^{ème}$ *ligne et de* $j^{ième}$ *colonne.*

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ *est noté* $\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K})$

Exemples

1. Nous avons vu que l'application linéaire $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ définie par

$\boldsymbol{f(x,y,z) = (4x - 3y + z, -2x + y - 5z)}$ a pour matrice représentetive
$\boldsymbol{Mat(f)} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$
Cette matrice est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes donc $\boldsymbol{Mat\ (f)} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{2,3}}(\mathbb{R})$.

2. Soit les matrices :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{et\ B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

A et B sont des matrices carrées car elles comportent les memes nombres de lignes et de colonnes.
$\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_3}(\mathbb{R}) \quad \boldsymbol{et} \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_2}(\mathbb{R})$.

Matrice nulle

On appelle matrice nulle (que l'on note $\mathbf{0}_{n,p}$ *parfois), toute matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.*

Exemple

Les matrices $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{ou}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{ou}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{ou}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ sont des matrices nulles.

Opposé d'une matrice

L'opposé d'une matrice $\boldsymbol{A}$ *pour l'opération somme est noté* $\boldsymbol{-A}$ *, il s'agit de la matrice obtenue en prenant les opposés de tous les termes de la matrice .*

Exemple

Si $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes.

Sa matrice opposée est $\boldsymbol{-M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Il va de soit que la somme de deux matrices opposées donne la matrice nulle.

SEQUENCE 56

Calcul matriciel : somme de matrices
Objectif
Calculer la somme des matrices
Somme de matrices
Soient A et B deux matrices dans $\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K})$.
La somme des matrices $\boldsymbol{A\ et\ B}$ est la matrice $\boldsymbol{A + B = C\ ou\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}}$.

Exemple

Soit les matrices $\boldsymbol{M\ et\ N\ de\ \mathcal{M}_{3,2}}(\mathbb{R})$ définies par :

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Déterminons la somme $\boldsymbol{P}$ des matrices $\boldsymbol{M\ et\ N}$. On a :

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{2-1} & \mathbf{-1+2} \\ \mathbf{3+2} & \mathbf{1-1} \\ \mathbf{-4+4} & \mathbf{2-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}$$

Donc la matrice $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ est la somme des matrices $\boldsymbol{M\ et\ N}$

Théorème

$(\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K}); +)$ est un groupe commutatif

Démonstration

Les propriétés des matrices découlent des propriétés de la somme des réels puisque la somme des coefficients se fait terme à terme.

Les différentes propriétés de l'addition (associativité, commutativité, élément neutre et élément symétrique) sont évidentes.

Donc $(\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K}); +)$ est un groupe commutatif.

Remarque

L'addition des matrices ne peut s'effectuer que dans l'ensemble considéré. Il n'est pas possible de faire la somme de 2 matrices ayant des lignes différentes ou des colonnes différentes.

Ainsi, si $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{et}\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, on ne peut pas effectuer leur somme car $\boldsymbol{A} \in (\boldsymbol{\mathcal{M}_{2,3}}(\mathbb{R})$. Par contre , si les matrices ont le meme nombre de lignes et le meme nombre de colonne, on peut effectivement calculer leur somme.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

On obtient $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4-1} & \mathbf{2-1} & \mathbf{3+2} \\ \mathbf{-1+2} & \mathbf{-2+1} & \mathbf{-1-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ ou

$\boldsymbol{A} \in (\boldsymbol{\mathcal{M}_{2,3}}(\mathbb{R})\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{B} \in (\boldsymbol{\mathcal{M}_{2,3}}(\mathbb{R})$.

Ainsi il faut souligner que chaque ensemble $(\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K})$ constitue un groupe , séparément les uns des autres.

SEQUENCE 57

Calcul matriciel : produit de matrices

Objectif

Définir et calculer le produit des matrices

Produit des matrices

Produit d'une matrice par un réel

Définition

Le produit d'une matrice $\boldsymbol{A}$ *par un réel* $\boldsymbol{\lambda}$ *est la matrice notée* $\boldsymbol{\lambda A}$ *,obtenue à partir de* $\boldsymbol{A}$ *en multipliant chacun de ses coefficients par* $\boldsymbol{\lambda}$*. Ainsi , soit :*

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m_{11}} & \boldsymbol{m_{12}} & \dots & \boldsymbol{m_{1p}} \\ \boldsymbol{m_{21}} & \boldsymbol{m_{22}} & \dots & \boldsymbol{m_{2p}} \\ & \vdots & & \\ \boldsymbol{m_{n1}} & \boldsymbol{m_{n2}} & \dots & \boldsymbol{m_{np}} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{et\ \lambda} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{on\ a}:$$

$$\boldsymbol{\lambda M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda m_{11}} & \boldsymbol{\lambda m_{12}} & \dots & \boldsymbol{\lambda m_{1p}} \\ \boldsymbol{\lambda m_{21}} & \boldsymbol{\lambda m_{22}} & \dots & \boldsymbol{\lambda m_{2p}} \\ & \vdots & & \\ \boldsymbol{\lambda m_{n1}} & \boldsymbol{\lambda m_{n2}} & \dots & \boldsymbol{\lambda m_{np}} \end{pmatrix}$$

Propriétés

P1 : le produit par un réel est distributif par rapport à l'addition des matrices :

$\forall\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}\ , \forall\ \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K}), \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\lambda A} + \boldsymbol{\lambda B}$.

P2 : $\forall\ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K})\ ,\ \ \boldsymbol{1}.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

P3 : $\forall(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{K}^{\boldsymbol{2}}, \forall\ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K}), \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu}\ \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\lambda\mu})\boldsymbol{A}$

Théorème

$\left(\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K}), , +, .\right)$est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Produit de matrices

Définition

Soit $A \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K})\boldsymbol{et\ B} \in\ \boldsymbol{\mathcal{M}_{p,q}}(\mathbb{K})$*, alors le produit des deux matrices* $\boldsymbol{A\ et\ B}$ *est la matrice* $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K})\ \boldsymbol{ou}\ \forall\ \boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{n}\}, \boldsymbol{c_{ij}} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{a_{ik}b_{kj}}$

Exemples

1. Considérons les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \ \boldsymbol{et} \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que $\in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$. On peut déjà déterminer l'ensemble auquel appartient le produit $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$. En fait, $\times \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$.

Calculons donc ce produit . On a : $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a :

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1 \times -1) + (-2 \times 2) + (1 \times 1) & (-1 \times 0) + (-2 \times 1) + (1 \times 0) \\ (4 \times -1) + (1 \times 2) + (3 \times 1) & (4 \times 0) + (1 \times 1) + (3 \times 0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - 2 + 1 & 0 - 2 + 0 \\ -4 + 2 + 3 & 0 + 1 + 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calculons le produit $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ sachant que:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \ \boldsymbol{et} \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1 \times 0) + (1 \times 1) + (0 \times 0) & (1 \times 1) + (1 \times 0) + (0 \times -1) & (1 \times 1) + (1 \times -1) + (0 \times 0) \\ (-1 \times 0) + (0 \times 1) + (1 \times 0) & (-1 \times 1) + (0 \times 0) + (1 \times -1) & (-1 \times 1) + (0 \times -1) + (1 \times -1 \\ (1 \times 0) + (-1 \times 1) + (-1 \times 0) & (1 \times 1) + (-1 \times 0) + (-1 \times -1) & (1 \times 1) + (-1 \times -1) + (-1 \times (\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

SEQUENCE 58

Matrice identité

Objectif

Définir la matrice identité

Définition

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre $\boldsymbol{n}$. On appelle matrice identité et on note $\boldsymbol{I_n}$, la matrice dont les seuls termes non nuls sont les coefficients $\boldsymbol{m_{ij}}$ $\boldsymbol{ou}$ $\boldsymbol{i = j}$ $\boldsymbol{avec}$ $\boldsymbol{i} \in \{1, \dots, n\}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{j} \in \{1, \dots, n\}$

Ainsi $\boldsymbol{I_n} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & . & . \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & . & . \\ : & : & : & \vdots & \mathbf{0} & : \\ . & . & . & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Exemple

Dans $\boldsymbol{M_{2,}}(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$est la matrice identité.

On note :$\boldsymbol{I_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

De même, dans $\boldsymbol{M_3}(\mathbb{R}), \boldsymbol{I_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ est la matrice identité.

Remarque

La matrice identité est un élément neutre pour le produit des matrices : $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_n}, \boldsymbol{p}(\mathbb{k})$,

$$\boldsymbol{I_n A} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{I_p} = \boldsymbol{A}.$$

Théorème

L'ensemble $(\boldsymbol{M_{n,p}}(\mathbb{k}), +, \times)$ est un anneau

Démonstration

On sait $\left(\boldsymbol{M_{n,p}}(\mathbb{k}), +\right)$ est un groupe commutatif

De plus,on sait qu'il existe un élément neutre pour le produit des matrices

Car $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_{n,p}}(\mathbb{k})$, il existe $\boldsymbol{I_{n,}} \in \boldsymbol{M_p}(\mathbb{k})$, telque $\boldsymbol{I_n A} = \boldsymbol{AI_p} = \boldsymbol{A}$.

On vérifie aussi que :

- La loi $\times$ est associative pour dans $\boldsymbol{M_p}(\mathbb{k})$.
- En effet, $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_{n,p}}(\mathbb{k}), \forall \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M_{p,q}}(\mathbb{k})\ \forall \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{M_{q,r}}(\mathbb{k}), \boldsymbol{On\ a}$:
$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$
- La loi $\times$ est distributive par rapport à l'addition dans l'ensemble des matrices car $\forall\ \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{M_{n,p}}(\mathbb{k}), \boldsymbol{on\ a}$: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$
  De Même, on : $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$.
  Il s'ensuit donc que $\left(\boldsymbol{M_p}(\mathbb{k}), +, \times\right)$ est un anneau.

Théorème

Le produit d'une matrice par une matrice nulle (de taille compatible), à gauche comme à droite, est toujours nul.

Démonstration

Soit $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_{n,p}}(\mathbb{k})$ et $\boldsymbol{0_{n,}p}$ la matrice nulle.

$\boldsymbol{0_{n,}p}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

On sait que si $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ alors $\boldsymbol{C_{ij}} = \sum_{k=1}^{+} \boldsymbol{a_{ik}}\, \boldsymbol{b_{kj}}$ or si B=$\mathbf{0}_{n,}\boldsymbol{p}$
Alors on a : $\boldsymbol{C_{ij}} = \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{a_{ik}}.\mathbf{0}_{kij} = \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{i} \in \{\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{n}\}\ \boldsymbol{et} \forall \boldsymbol{j} \in \{\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{p}\}$.
Et puis que $\boldsymbol{Cij} = \mathbf{0}\ \forall\ \boldsymbol{i}, \forall \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{alors}\ \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{O}_{n,p} = \mathbf{0}_{n,p}$
Exemple
Calculons le produit $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$
On a : $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}_{2,2}(\mathbb{R})$et $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}_{2,3}(\mathbb{k})$.
Le produit des deux matrice sera une matrice appartenant à $\boldsymbol{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
On a donc :
$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{3} \times \mathbf{0} & \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{3} \times \mathbf{0} & \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{3} \times \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} \times \mathbf{0} + \mathbf{1} \times \mathbf{0} & -\mathbf{1} \times \mathbf{0} + \mathbf{1} \times \mathbf{0} & -\mathbf{1} \times \mathbf{0} + \mathbf{1} \times \mathbf{0} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

SEQUENCE 59

Transposée d'une matrice

Objectif

Définir la transposée d'une matrice.

Définition
Soit A la matrice de $\boldsymbol{M}_{n,p}(\mathbb{k})$.
La transposée de la matrice A est la matrice $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M}_{p,n}(\mathbb{k})$ $\boldsymbol{o}$ù
$\boldsymbol{m_{ji}} = \boldsymbol{a_{ij}}$ *sachant que les* $\boldsymbol{m_{ji}}$ *sont les coefficient de la matrice M et* $\boldsymbol{a_{ij}}$ *ceux de la matrice A.*
La transposée de la matrice A se note $\boldsymbol{t_A}$.

Exemple
Considérons la matrice A $=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$
On a donc : $\boldsymbol{t_A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

On constate que les lignes de $\boldsymbol{A}$ sont les colonnes de $\boldsymbol{t_A}$ et les colonnes de A sont les lignes de $\boldsymbol{t_{A.}}$

Propriétés

La transposition des matrices vérifie les propriétés suivantes :

1. $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{t_A})} = \boldsymbol{A}$.

2. $\boldsymbol{t}_{(A+B)} = \boldsymbol{t}_{A+}\, \boldsymbol{t}_{B.}$
3. $\boldsymbol{t}_{(\lambda_A)} = \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{t}_{A.}$
4. $\forall \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{m}}(\mathbb{k}), \boldsymbol{t}_{(AC)} = \boldsymbol{t}_{C.}\boldsymbol{t}_{A.}$

Exemple

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

   On a : $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ et on constate que $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{A}})}$=A.

2. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

   Calculons A.B. On a :

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

   Et $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})}$=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

   Or $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ *et*

   $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{B}.}\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

   On vérifie bien que $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})} = \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{B}} \times \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{A}.}$

SEQUENCE 60

Matrices symétriques et antisymétriques

Objectif

Définir des matrices symétriques et antisymétriques.

Définition de la matrice symétrique et de la matrice antisymétrique

Une matrice $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{K})$ *est dite symétrique si* $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$ *c'est-à-dire si* $\forall\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \{\mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{n}\}, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ji}}$

Une matrice est dite antisymétrique si $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{A}} = -\boldsymbol{A}$

Exemple

1. considérons la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

déterminons $\boldsymbol{t_A}$ .On a : $\boldsymbol{t_A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ et on constate $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{t_A}$ donc $\boldsymbol{A}$ est une matrice symétrique.

2. Soit la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

   Déterminons $\boldsymbol{t_A}$. On a : $\boldsymbol{t_A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{or}\ \boldsymbol{t_A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

   Donc $\boldsymbol{t_A} = \boldsymbol{-A}$

   La matrice $\boldsymbol{A}$ est donc antisymétrique.

SEQUENCE 61

Inversion de matrice

Objectif

Définir l'inverse d'une matrice.

Définition

Une matrice carrée A ∈ $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{k})$ est inversible s'il existe une matrice B∈ $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{k})$telle que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I_n}$.

La matrice B est alors notée $\boldsymbol{A^{-1}}$ et on l'appelle matrice inverse de la matrice A.

L'ensemble des matrices inversible d'ordre n se note $\boldsymbol{GL_n}(\mathbb{k})$.

Remarque

1. La notion d'invisibilité des matrices n'a de sens que pour les matrices carrées.
2. L'inverse d'une matrice, quand il existe, est unique.
3. L'inverse de la matrice $\boldsymbol{I_n}$ est $\boldsymbol{I_n}$ elle-même.
4. Toute matrice inversible est encore dite matrice régulière

   Et lorsqu'une matrice n'a pas d'inverse, elle est dite irrégulière ou singulière.

   Pour Trouver l'inverse d'une matrice donnée, on peut utiliser la définition pour trouver les coefficients de la matrice cherchée. Cependant, ce procédé est très rudimentaire.

   On va en donner un exemple pour la matrice carrée d'ordre 2.

   Considérons donc la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ et déterminons la matrice inverse$\boldsymbol{A^{-1}}$.

   Supposons que $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$.

   Elle est l'inverse de A si on a : $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{I_2}$. Or

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & 2z+t \\ 3x+2Y & 3z+2t \end{pmatrix} \text{ et } A.A^{-1} = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y+2y=0 \\ 2z+t=0 \\ 3z+t=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y+2y=0 \\ t=-2z \\ 3z-4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 3x+2(1-2x)=0 \\ z=-1 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=-2 \\ y=1-2x \\ t=2 \\ z=-1 \end{cases} \quad d'où \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=-1 \\ t=2 \end{cases}$$

d'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

On vérifie que :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (2\times 2)+(1\times -3) & (2\times -1)+(2\times 1) \\ (3\times 2)+(2\times -3) & (3\times 1)+2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Il faut savoir que d'autres méthodes de calcul d'inverse de matrices, plus efficaces, existent, mais elles seront étudiées plus tard car nécessitant d'autres notions.

Propriétés

P1. Si A est inversible, alors A^{-1} aussi et on a :$(A^{-1})^{-1} = A$.

P2. Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{k})$, inversibles alors le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

P3. Si $A, B \in M_n(\mathbb{k})$ vérifient $AB = I$ alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre

SEQUENCE 62

Déterminant d'une matrice

Objectif

Calculer le déterminant d'une matrice

Définition

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de M la constante :
  $\det(M) = ad - bc$
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de M la constante :
  $\det(M) = aei + bfg + adh - afh - bdi - ceg$
  On le note :
  $$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + adh - afh - bdi - ceg$$

Exemple

1. Considérons la matrice carrée $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$.

   Déterminons le déterminant de $\boldsymbol{A}$.On a :$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-4} \end{vmatrix} = (\mathbf{2} \times (\mathbf{-4})) - ((\mathbf{-1}) \times \mathbf{1})$

   Donc $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{-8} + \mathbf{1} = \mathbf{-7}$

2. Soit la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Déterminons $\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$. On a :

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = (\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times \mathbf{3}) + (\mathbf{2} \times (\mathbf{-1}) \times (\mathbf{-1})) + (\mathbf{0} \times \mathbf{0} \times (\mathbf{-2})) - (\mathbf{1} \times (\mathbf{-1}) \times (\mathbf{-2})) - (\mathbf{2} \times \mathbf{0} \times \mathbf{3}) - (\mathbf{0} \times \mathbf{1} \times (\mathbf{-1}))$$

Donc $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3} + \mathbf{2} + \mathbf{0} - \mathbf{2} - \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{5} - \mathbf{2} = \mathbf{3}$

On a alors $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3}$

Ce calcul s'obtient plus facilement lorsqu'on utilise la notation des matrices carrées d'ordre 2 pour calculer le déterminant de la matrice carrée d'ordre 3.

Ainsi on pose :

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix} - \boldsymbol{b} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix} + \boldsymbol{c} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{ei} - \boldsymbol{fh}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{di} - \boldsymbol{fg}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{dh} - \boldsymbol{eg})$$

Ce qui donne le résultat exprimé ci-haut.

Théorème

Une matrice $\boldsymbol{M}$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Cette propriété est fondamentale quand on travaille dans l'ensemble des matrices. En effet , elle constitue la condition essentielle permettant de justifier de l'inversibilité des matrices.

SEQUENCE 63

Inverse d'une matrice et déterminant

Objectif

Calculer l'inverse d'une matrice

N B : Nous admettons ce théorème pour les matrices inversibles d'ordre 2.
Théorème

Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

Si $\mathbf{det}(A) = ad - bc \neq 0$ alors la matrice est inversible et on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Si $\mathbf{det}(A) = ad - bc = 0$, alors la matrice est singulière.

Ce théorème constitue un outil de détermination rapide et efficace de la matrice inverse d'une matrice donnée.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2

Déterminons la matrice inverse

Comme $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $alors$ $\mathbf{det}(A) = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (5 \times 2) - ((-3) \times (-1)) = 10 - 3 = 7$

On a donc $\mathbf{det}(A) = 7 \neq 0$ donc la matrice A est bien inversible et on détermine son inverse en utilisant le théorème ci-haut énoncé.On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 \\ 1/7 & 5/7 \end{pmatrix}$$

Faisons la vérification en calculant $A.A^{-1}$

On a : $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 \\ 1/7 & 5/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 - 3/7 & 15/7 - 15/7 \\ -2/7 + 2/7 & -3/7 + 10/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/7 & 0 \\ 0 & 7/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On vérifie bien que $A.A^{-1} = I_2$ $donc$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 3/7 \\ 1/7 & 5/7 \end{pmatrix}$

Leçons de la compétence de base 3 du troisième trimestre

Leçon : géométrie de l'espace

SEQUENCE 64

Orientation de l'espace

Objectif

Orienter l'espace

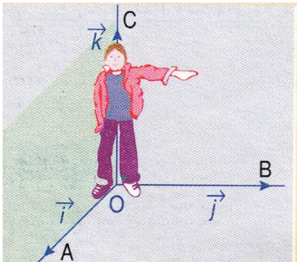
Règle du bonhomme d'Ampère

Définition

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace de l'espace.

Notons $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$.

Imaginons un personnage appelé bonhomme d'Ampère placé le long de la droite (OC), les pieds en O, la tête du côté de C en regardant vers A.



Lorsque B est à gauche du bonhomme d'Ampère, on dit que le repère $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$.

- *Orienter l'espace, c'est distinguer deux types de repère : les repères directs et ceux qui ne le sont pas. Ces derniers sont appelés des repères indirects.*
- *On dit que la base* $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ *est direct pour indiquer que pour tout point O, le repère* $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ *est direct.*
- *Lorsque* $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ *est un repère orthonormé direct, alors et cela se vérifie aisément avec un bonhomme d'Ampère que les repères* $(O, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{i}})$ *et* $(O, \vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$ *sont aussi directs.*
- *Par contre, les repères* $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{j}})$, $(O, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ *et* $(O, \vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{i}})$ *sont indirects.*

Remarques

- Permuter deux vecteurs d'une base change son orientation : les bases $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ et
  $(\vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ sont de sens contraires.
- Permuter de façon circulaire les trois vecteurs d'une base ne change pas son orientation : les bases $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$, $(\vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{i}})$ ***et*** $(\vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$ sont de même sens.
- Remplacer un vecteur d'une base par son opposé change son orientation : les bases $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ *et* $(-\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ sont de sens contraires alors que les bases $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ *et*
  $(-\vec{\boldsymbol{i}}, -\vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ sont de même sens.

SEQUENCE 65

Orientation d'un plan de l'espace et produit vectoriel

Objectif

Orienter un plan de l'espace et définir le produit vectoriel

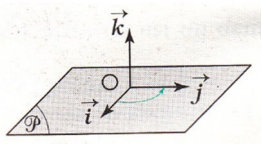
Plan orienté

L'espace (E) *étant orienté, on peut définir une orientation de tout plan de* (E).

(P) est un plan de l'espace (E), de repère $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$ *et* $\vec{\boldsymbol{k}}$ *un vecteur normal à (P).*

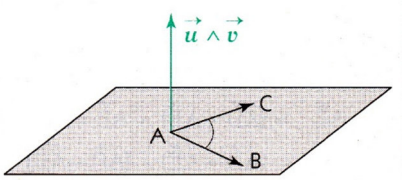
On convient que $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$ *est un repère direct de (P) si* $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ *est un repère direct*

de (E).
Un plan est donc orienté par le choix d'un de ses vecteurs normaux.



Produit vectoriel de deux vecteurs
Définition
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace orienté, A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ainsi défini :

- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;*
- *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,*
  le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (direction) ;
  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe (sens) ;
  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \widehat{BAC}$ (norme).



$\vec{u} \wedge \vec{v}$ se lit : « $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$ ».

Remarques

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ et $\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont deux vecteurs orthogonaux et unitaires, alors* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ *est une base orthonormée directe* .

Exemple

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant une base orthonormée directe, on a : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$.

SEQUENCE 66

Propriétés du produit vectoriel
Objectif
Utiliser les propriétés du produit vectoriel

Propriétés

1) *Pour tous vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ *si et seulement si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*
2) *Pour tous vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$, *pour tout nombre réel k, on a :*
   - $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$;
   - $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$;
   - $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$;
   - $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormée directe

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *étant une base orthonormée directe, considérons les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de coordonnées respectives* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Les propriétés précédentes permettent d'écrire :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$

$= (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$.

Propriété

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *étant une base orthonormée directe, considérons les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de coordonnées respectives* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *sont :* $\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$.

Remarque

La notation à l'aide des déterminants permet une mémorisation plus aisée :

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées : $\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$.

Exemples

1) On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées : $\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right)$ c'est-à-dire que $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Remarque

Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, on peut démontrer que

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

SEQUENCE 67

Les applications du produit vectoriel

Objectif

Utiliser le produit vectoriel pour déterminer l'équation d'un plan

N B : L'espace (E) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Equation d'un plan déterminé par trois points

Vérifions que les points A(–1 , **1**, 3) ; B(2, 1, 0) et C(4, –1, 5) définissent un plan dont on déterminera une équation.

En effet $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\right)$ c'est-à-dire que

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ -21 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et définissent un plan (ABC) dont un vecteur normal est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -6 \\ -21 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $-6x - 21y - 6z + d = 0$ où d est un nombre réel à déterminer.

Or le point A(–1 , **1**, 3) appartient au plan (ABC) c'est-à-dire que

$-6 \times (-1) - \mathbf{21} \times 1 - 6 \times 3 + d = 0 \Rightarrow d = 33$.

Une équation du plan (ABC) est $-6x - 21y - 6z + 33 = 0$

ou $2x + 7y + 2z - 11 = 0$.

Méthode

Pour trouver une équation d'un plan passant par trois points donnés A, B et C, il suffit de déterminer les coordonnées (a, b, c) du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}}$ normal au plan (ABC). Une

équation du plan (ABC) est alors $ax + by + cz + d = 0$ où d est un nombre réel à déterminer.

On trouve le nombre réel d en écrivant par exemple A appartient à (ABC).

SEQUENCE 68

Les applications du produit vectoriel

Objectif

Utiliser le produit vectoriel pour déterminer la position relative de deux plans

Position relative de deux plans

On considère le plan (P) d'équation $x + 4y + 2z - 1 = 0$ et le plan (P') passant par A(-1 , $\mathbf{0}$, 1) et de vecteur normal $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{1}\\ -\mathbf{3}\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.
2) Vérifier que A est un point de (P) et déterminer une représentation paramétrique de la droite (D), intersection de (P) et (P').

Solution

1) On sait que le plan (P) d'équation $x + 4y + 2z - 1 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{4}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix}$ et le plan (P') a pour vecteur normal $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{1}\\ -\mathbf{3}\end{pmatrix}$.

(P) est perpendiculaire à (P') si et seulement si $\vec{\boldsymbol{n}}.\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Ainsi, $2 \times 1 + 1 \times 4 + (-\ 3) \times 2 = 0$ donc, les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2) Vérifions que A(-1 , $\mathbf{0}$, 1) est un point de (P). En effet, $-1 + 4 \times 0 + 2 \times 1 - 1 = 0$ donc A appartient à (P).
   Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et (P').
   En effet, le vecteur $\vec{\boldsymbol{n}} \wedge \vec{\boldsymbol{u}}$ normal à $\vec{\boldsymbol{n}}$ et à $\vec{\boldsymbol{u}}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & -\mathbf{3}\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}\mathbf{2} & -\mathbf{3}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{4} & \mathbf{1}\end{vmatrix}\right)$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix}-\mathbf{14}\\ \mathbf{7}\\ -\mathbf{7}\end{pmatrix}$.

   $\vec{\boldsymbol{n}} \wedge \vec{\boldsymbol{u}}$ est un vecteur directeur de la droite (D) intersection de (P) et (P').

Une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Méthode

Pour étudier la position relative de deux plans (P) et (P'), on peut déterminer deux vecteurs $\vec{n}$ et à $\vec{n'}$ respectivement normaux à (P) et à (P').

- Si le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{n'}$ est égal au vecteur nul, alors les plans (P) et (P') sont parallèles.
- Si le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{n'}$ est différent du vecteur nul, alors les plans (P) et (P') sont sécants suivant une droite dont un vecteur directeur est $\vec{n} \wedge \vec{n'}$.
  Si de plus, le produit scalaire $\vec{n} . \vec{n'} = 0$, (P) et (P') sont perpendiculaires.

SEQUENCE 69

Les applications du produit vectoriel

Objectif

Utiliser le produit vectoriel pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan

Distance d'un point à une droite, à un plan

(D) est une droite de repère (A, $\vec{u}$), M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur (D). Démontrer que : MH $= \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Application 1

On donne les points A(0 , **3**, – 1) ; B(1 , **4**, 0) et M(1 , –**1**, 1).

1) Calculer la distance du point M à la droite (AB).
2) (P) est un plan de repère (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$), M un point de l'espace et K son projeté orthogonal sur (P). Démontrer que : MK $= \frac{|\overrightarrow{MA} . (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.
3) On donne les points C(– 2 , **2**, 0). Calculer la distance du point M au plan (ABC).

Solution

1) En effet, $\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{u}$
   $= \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{u}$.

   Or $\overrightarrow{HA}$ *et* $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que $\overrightarrow{HA} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

   Donc $\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}$.

   De plus $\overrightarrow{MH}$ *et* $\vec{u}$ étant orthogonaux, $\|\overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}\| = MH \times \|\vec{u}\|$.

   On en déduit que MH $= \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

La distance de M à la droite (AB) est d $= \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$ normal à $\vec{n}$ et à $\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix}4 & 1\\-2 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-2 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 1\\4 & 1\end{vmatrix}\right)$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix}6\\-1\\-5\end{pmatrix}$.

On en déduit que d $= \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{186}}{\sqrt{3}}$.

2) En effet, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$; donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -2\\1 & -1\end{vmatrix}\right)$ c'est à dire $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et les points A, B et C définissent un plan.

La distance de M au plan (ABC) est d' $= \frac{|\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$.

Or $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$; donc d' $= \frac{|-2-12-2|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{8}{7}\sqrt{14}$.

Remarque

Lorsque le plan (P) est donné par son équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, on peut remplacer dans le raisonnement précédent $\vec{u} \wedge \vec{v}$ par $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tous deux normaux à (P).

On retrouve donc MK $= \frac{|ax_0+b\,y_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

SEQUENCE 70

Les applications du produit vectoriel

Objectif

Utiliser le produit vectoriel pour déterminer l'aire d'un triangle ou l'aire d'un parallélogramme

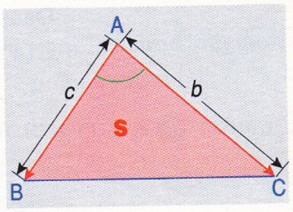
Aire d'un triangle, aire d'un parallélogramme

– ABC est un triangle.

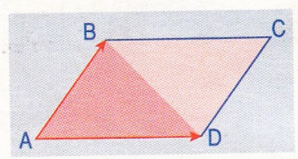
Notons AB $= c$ et AC $= b$. Si S est l'aire de ce triangle , on a établi en classe de Première que S $= \frac{1}{2}\, bc\sin\widehat{BAC}$.

On remarque que $bc\sin\widehat{\boldsymbol{BAC}} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\| \times \sin\widehat{\boldsymbol{BAC}} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\|$.

Donc $S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\|$.



– ABCD est un parallélogramme.
  L'aire du parallélogramme ABCD est le double du triangle ABD.
  Donc aire(ABCD) $= \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\|$



SEQUENCE 71

Projections

Objectif

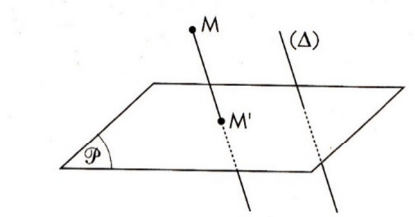
Définir une projection et utiliser ses propriétés

Définition 1

– *(P) est un plan de l'espace* (E) *et (D) une droite non parallèle à (P).*

On appelle projection sur (P) parallèlement à (D)l'application p de l'espace (E) *dans lui-même qui à tout point M associe M', point intersection de (P) avec la parallèle à (D) passant par M.*

M' est appelé le point projeté de M sur le plan (P) parallèlement à la droite (D).



On a : $p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\mathcal{P}) \\ (MM') \,//\, (\Delta) \end{cases}$.

On a $p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{P}) \\ (\boldsymbol{MM'}) \,//\, (\boldsymbol{D}) \end{cases}$.

Remarque

Si (D) ⊥ (P), p est la projection orthogonale sur (P) et M' est le projeté orthogonal de M sur (P).

Propriété

p est une projection sur un plan (P) parallèlement à une droite (D).

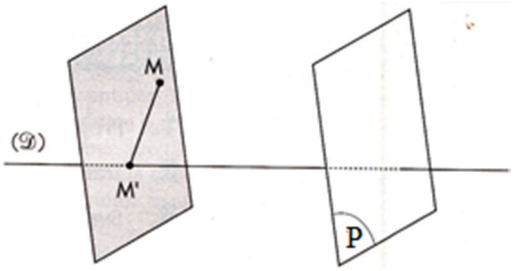
- *L'image de l'espace* (E) *par p est (P).*
- *L'ensemble des antécédents par p d'un point M' de (P) est la parallèle à (D) passant par M'.*
- *L'ensemble des points invariants par p est (P).*

Définition 2

- *(D) est une droite de l'espace* (E) *et (P) un plan non parallèle à (D).*

On appelle projection sur (D) parallèlement à (P), l'application q de l'espace (E) *dans lui-même qui à tout point M associe M', point intersection de (D) avec la parallèle à (P) passant par M.*

M' est appelé le point projeté de M sur la droite (D) parallèlement au plan (P).



On a : $q(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\mathcal{D}) \\ (MM') \,//\, (\Pi) \end{cases}$.

On a $p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{D}) \\ (\boldsymbol{MM'}) \,//\, (\boldsymbol{P}) \end{cases}$.

Remarque

Si (P) ⊥ (D), q est la projection orthogonale sur (D) et M' est le projeté orthogonal de M sur (D).

Propriété

q est une projection sur une droite (D) parallèlement à un plan (P).

- *L'image de l'espace* (E) *par q est (D).*
- *L'ensemble des antécédents par q d'un point M' de (D) est le plan parallèle à (P) passant par M'.*
- *L'ensemble des points invariants par p est (D).*

SEQUENCE 72

Utilisation des propriétés des projections

Objectif

Utiliser les propriétés des projections pour démontrer la conservation du coefficient de colinéarité

Conservation du coefficient de colinéarité

Propriété

A, B et C étant trois points de l'espace (E) *d'images respectives A', B' et C'par une projection, s'il existe un nombre réel k tel que* $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = k.\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ *alors on a :* $\overrightarrow{\boldsymbol{A'C'}} = k.\overrightarrow{\boldsymbol{A'B'}}$.

Remarques

A, B, C, D et I étant des points de l'espace (E) d'images respectives A', B', C', D' et I' par une projection ,

- si I est le milieu de $[\boldsymbol{AB}]$, alors I' est le milieu de $[\boldsymbol{A'B'}]$;
- si ABCD est un parallélogramme, alors A'B'C'D' est un parallélogramme.

Conséquence

Toute projection de l'espace est une application affine.

Remarques

Toute projection de l'espace (E) admet une application linéaire associée appelée projection vectorielle.

- Si p est la projection sur un plan de vecteurs directeurs $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$, parallèlement à une droite de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{w}}$ alors l'application linéaire associée est l'application $\boldsymbol{\varphi}$ du plan dans le plan telle que $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{u}}$; $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{v}}$; $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$.
- Si q est la projection sur une droite de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}$, parallèlement à un plan de vecteurs directeurs $\vec{\boldsymbol{v}}$ ***et*** $\vec{\boldsymbol{w}}$ alors l'application linéaire associée est l'application $\boldsymbol{\gamma}$ du plan dans le plan telle que $\boldsymbol{\gamma}(\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{u}}$;$\boldsymbol{\gamma}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$; $\boldsymbol{\gamma}(\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$.

SEQUENCE 73

Utilisations des projections pour déterminer l'image d'une droite, d'un plan

Objectif

Déterminer l'image d'une droite ou d'un plan par une projection

Image d'une droite, d'un plan

Propriétés

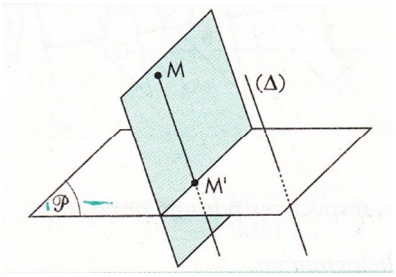
1) *p est une projection, (AB) une droite, A' et B' les images respectives de A et B par p.*
   - *Si A' ≠ B', l'image de (AB) par p est la droite (A'B').*
   - *Si A' = B', l'image de (AB) par p est le singleton* $\{\boldsymbol{A}'\}$.

Remarque

- L'image d'un segment $[\boldsymbol{AB}]$ est le segment $[\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}']$ou le singleton $\{\boldsymbol{A}\}$.
- L'image d'une demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B').

2) *P est une projection, (AB) et (CD) deux droites parallèles.*
   Si l'image par p est une droite (A'B'), alors l'image par p de la droite (CD) est une droite (C'D') parallèle à (A'B').

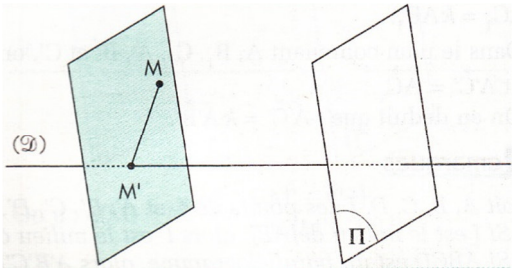
3) *p étant une projection sur un plan (P) parallèlement à une droite (D), l'image par p d'un plan parallèle à (D) est la droite d'intersection de ce plan avec (P).*



Remarque

L'image par p d'un plan non parallèle à (D) est le plan (P).

4) *p étant une projection sur une droite (D) parallèlement à un plan (P), l'image par q d'un plan parallèle à (P) est la droite d'intersection de ce plan avec (P).*



Remarque

L'image par q d'un plan non parallèle à (P) est la droite (D).

SEQUENCE 74

Expression analytique d'une projection

Objectif

Donner l'expression analytique d'une projection

NB : on ne donne l'expression analytique d'une projection que dans les cas particuliers où le plan (ou la droite) de projection et la direction de projection sont parallèles aux plans ou axes du repère $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$.

Propriétés

1) *L'espace étant muni d'un repère* $(O, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$, l'expression analytique de la projection sur le plan (P) d'équation z = c parallèlement à une droite (D) de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{k}}$ est : $\begin{cases} \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y'} = \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z'} = \boldsymbol{c} \end{cases}$

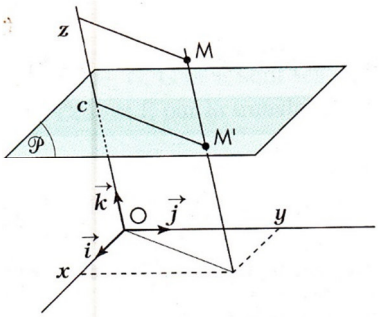
Démonstration

p est la projection sur un plan (P) d'équation $z = c$, parallèlement à une droite de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{k}}$.

Soit M, un point de l'espace (E) de coordonnées $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$ et M'son image par p de coordonnées $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \\ \boldsymbol{z'} \end{pmatrix}$.

On a : M' $\in$ (P) $\Leftrightarrow z' = c$;

(MM') // (D) $\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x'} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{z'} - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \end{cases}$



2) *L'espace étant muni d'un repère* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, *l'expression analytique de la projection sur la droite (D) de système d'équations* $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ *parallèlement à un plan (P) de vecteurs directeurs* $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ *est :* $\begin{cases} x' = a \\ y' = b \\ z' = z \end{cases}$

Exercice d'entrainement de la compétence de base 1 du troisième trimestre

Exercice 1

Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \longmapsto cosx \times \boldsymbol{sin^3} x$ sur $I = \mathbb{R}$;

b) $f : x \longmapsto \frac{x+1}{(x^2+2x)^4}$ sur $I =]0\,;+\infty[$;

c) $f : x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $I =]-1\,;1[$;

d) $f : x \longmapsto -cos(2x+\pi)$

e) $f : x \longmapsto : x \longmapsto \boldsymbol{sin^3 x} \times \boldsymbol{cos^2 x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Démontrer que : $\forall\, x \in [1\,;+\infty[$, $lnx \leq x+1$.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

c) $\int_0^1 (t^3 + 2t + 3)\,dt$

d) $\int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{2x}{x^2-1})\,dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (cosx\ e^{sinx})\,dx$

f) $\int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}}\,dt.$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tcost\,dt.$

h) $\int_0^{\pi} sinte^t\,dt$.

i) $\int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{\ln t}{t}\,dt$.

j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\boldsymbol{cos^3x}\ sinx + 3\,\boldsymbol{sin^3x})dx.$

k) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\boldsymbol{cos^2x} - 2\,\boldsymbol{sin^4x})dx$

l) $\int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}$dt.

Exercice 4

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\boldsymbol{\imath}};\vec{\boldsymbol{\jmath}}$) d'unité graphique 1cm, on donne la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \mathbf{3 - x \text{ si } x < 0} \\ \mathbf{2x + 3 \text{ si } 0 \leq x < 1} \\ \mathbf{x^2 + 3x + 1 \text{ si } x \geq 1} \end{cases}$

a) Justifier que la fonction f est continue sur ℝ.
b) Tracer la courbe (C) représentative de f dans le repère (O ; $\vec{\boldsymbol{\imath}};\vec{\boldsymbol{\jmath}}$).
c) Calculer la valeur exacte de l'aire en $\boldsymbol{cm^2}$ du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -4$ et $x = 1$.

Exercice 5

On donne la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x + 1 + 3\boldsymbol{e^{-x}}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\boldsymbol{\imath}};\vec{\boldsymbol{\jmath}}$) du plan d'unité graphique 2cm.

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Dresser le tableau de variation de f sur ℝ.
c) Tracer la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x + 1$.
d) Soit a un réel strictement positif. Calculer en cm² l'aire $A(a)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$. L'aire $A(a)$ admet – elle une limite quand a tend vers $+\infty$? Si oui, calculer cette limite.

Exercice 6

a) Résoudre sur ℝ l'équation différentielle (E) : $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 0}$.
b) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction g définie par $\boldsymbol{g(x) = ax + b}$ soit solution de l'équation différentielle (E') : $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = -4x}$.
c) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f-g$ est solution de (E).
d) En déduire la solution f sur ℝ de (E') telle que $\boldsymbol{f(0) = 2}$ et $\boldsymbol{f'(0) = -2}$.

Exercice 7

Partie A

On considère l'équation différentielle $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{y' - 2y = xe^x}$

1) a) Montrer que la fonction $\boldsymbol{g}$ definie sur $\mathbb{R}$ par :$\boldsymbol{g(x) = (ax + b)e^x}$ est solution de $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si, pour tout $\boldsymbol{x}$ réel, $\boldsymbol{-ax + a - b = x}$.
   b) Déterminer a et b.
2) Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_0})$: $\boldsymbol{y' - 2y = 0}$;
3) Montrer qu'une fonction $\boldsymbol{f}$ definie sur $\mathbb{R}$ est solution de $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $\boldsymbol{f - g}$ est solution de $(\boldsymbol{E_0})$. En déduire l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E})$.
4) Déterminer la solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$ qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit $\boldsymbol{h}$ definie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{h(x) = 2e^x - x - 2}$.

1) Calculer la limite de $\boldsymbol{h}$en $+\infty$ et en $-\infty$;
2) Étudier le sens de variation de $\boldsymbol{h}$ et dresser son tableau de variation ;
3) a) Montrer que l'équation $\boldsymbol{h(x) = 0}$a exactement deux solutions réelles ;
   b) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions ;
   c) L'autre solution est appelée $\boldsymbol{\alpha}$. Montrer que $\boldsymbol{-1,6 < \alpha < -1,5}$;
   d) Déduire de ce qui précède le signe de $\boldsymbol{h}$.

Partie C

On considère la fonction $\boldsymbol{\varphi}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{\varphi(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x}$

1) Déterminer la limite de $\boldsymbol{\varphi}$ en $+\infty$ et en $-\infty$;
2) Calculer $\boldsymbol{\varphi'(x)}$ et montrer que $\boldsymbol{\varphi'}$ est du signe de $\boldsymbol{h}$ sur $\mathbb{R}$;
3) En déduire le tableau de variation de $\boldsymbol{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$;
4) Montrer que $\boldsymbol{\varphi(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}}$ et en déduire un encadrement de $\boldsymbol{\varphi(\alpha)}$;
5) Construire $(\boldsymbol{C_\varphi})$ dans un repère orthonormé.

Exercices types de la compétence de base 1 du troisième trimestre et corrigés

Enoncé 1

Calculer :

3) $\boldsymbol{\int_0^1 x^2 dx}$
4) $\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\, dt}$
5) $\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2 x dx}$
6) $\boldsymbol{\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |sinx| dx}$
7) $\boldsymbol{\int_1^2 lnx}\, dx$
8) $\boldsymbol{\int_{-1}^0 \frac{t}{\sqrt{2t+3}}}dt$

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 x \sin x + 3\sin^3 x)dx.$

10) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos^2 x - 2\sin^4 x)dx$

Solution

Calculons :

1) $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\, dt = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1-\cos 2x}{2})dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$

$= \frac{1}{2}[t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}.$

4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2$

5) $\int_1^2 \ln x dx.$

Posons $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = 1$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$. Comme f' et g sont continues sur [1 ; 2], $\int_1^2 fg'(x)\ dx = [\ln x \times x]_1^2 - \int_1^2 gf'(x)\ dx$

$= 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times x\ dx$

$= 2\ln 2 - [x]_1^2$

$= 2\ln 2 - 1$

6) $\int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}}dt.$

Posons $u = 2t + 3$; on a : $du = 2dt$ donc $dt = \frac{1}{2}du.$

De plus, si $t = -1$, $u = 1$ et si $t = 0$, $u = 3$.

On en déduit que $\int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}}dt = \int_1^3 \frac{u-3}{2\sqrt{u}} \times \frac{1}{2}du$

$= \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}}\right) du$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 6\sqrt{u}\right]_1^3$

$= \frac{4}{3} - \sqrt{3}$

7) On sait que pour tout x réel, $\cos^3 x \sin x + 3\sin^3 x = \sin x(\cos^3 x + 3\sin^2 x)$

$= \sin x(\cos^3 x + 3(1 - \cos^2 x)).$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 x \sin x + 3\sin^3 x)dx = \left[\frac{-\cos^4 x}{4} + \cos^3 x - 3\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{9}{4}$$

8) En effet, pour tout $\boldsymbol{x}$ élément de $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{cos^2x} = \frac{1-cos2x}{2}$

$$\boldsymbol{sin^4x} = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3\right) \quad .$$

Ainsi, pour tout $\boldsymbol{x}$ réel, $\boldsymbol{cos^2x} - 2\boldsymbol{sin^4x} = \frac{-1}{4}\cos 4\boldsymbol{x} + \frac{3}{2}\boldsymbol{cos2x} - \frac{1}{4}$

11) $$\int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\boldsymbol{cos^2x} - 2\boldsymbol{sin^4x})dx = \int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{-1}{4}\cos 4\boldsymbol{x} + \frac{3}{2}\boldsymbol{cos2x} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left[\frac{-\boldsymbol{sin4x}}{16} + \frac{3}{4}\boldsymbol{sin2x} - \frac{x}{4}\right]_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}$$

Enoncé 2

L'unité graphique est 2cm sur chaque axe.

Calculer en $\boldsymbol{cm^2}$ l'aire de l'ensemble D des points M(x ; y) tels que :

$\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq$ y $\leq$ *cos x.*

Solution

L'unité graphique est 2cm sur chaque axe.

Calculons en $\boldsymbol{cm^2}$ l'aire de l'ensemble D des points M(x ; y) tels que :

$\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq$ y $\leq$ *cos x.*

On sait que la fonction cosinus est continue et positive sur $[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.

On a : $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{cosx\ dx} = [\mathbf{sin}\ \boldsymbol{x}]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$

L'unité d'aire étant 2 cm × 2cm = 4 $\boldsymbol{cm^2}$.

L'aire de l'ensemble D cherchée est : 2 × 4 $\boldsymbol{cm^2}$ = **8** $\boldsymbol{cm^2}$.

Enoncé 3

Un corps est lâché, avec une vitesse initiale nulle à l'instant $\boldsymbol{t_0} = 0$, d'une hauteur h = 1000 m et est soumis à l'accélération de la pesanteur g = 9,8 m. $\boldsymbol{s^{-2}}$.

1) Déterminer la distance que ce corps aura parcourue après 5 secondes de chute :
2) Déterminer l'instant T (en secondes) où ce corps touche le sol.

Solution

Un corps est lâché, avec une vitesse initiale nulle à l'instant $\boldsymbol{t_0} = 0$, d'une hauteur h = 1000 m et est soumis à l'accélération de la pesanteur g = 9,8 m. $\boldsymbol{s^{-2}}$.

1) Déterminons la distance que ce corps aura parcourue après 5 secondes de chute :

$$d = \int_0^5 [gt]dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}gt^2\right]_0^5$$
$$= \frac{9{,}8 \times 25}{2}$$
$$= 122{,}5\text{m}$$

2) Déterminons l'instant T (en secondes) où ce corps touche le sol.

On a $\int_0^T [gt]dt = 1000 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}gt^2\right]_0^T = 1000$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}gT^2 = 1000$$
$$\Leftrightarrow \text{T} = 14{,}3\text{s}$$

Enoncé 4

Démontrer que : $\forall\ x \in [1\ ;+\infty[,\ lnx \leq x + 1.$

Solution

Démontrons que : $\forall\ x \in [1\ ;+\infty[,\ lnx \leq x + 1.$

En effet, $\forall$ t $\in [1\ ;+\infty[, \frac{1}{t} \leq 1$; donc $\int_1^x \frac{1}{t}dt \leq \int_1^x dt$

c'est-à-dire que $lnx \leq x - 1$ sur $[1\ ;+\infty[$.

Enoncé 5

c) Déterminer deux réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \frac{1}{t^2-t-2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}$.

d) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}$dt.

Solution

a) Déterminons deux réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \frac{1}{t^2-t-2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}$.

En effet $\forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, $\frac{1}{t^2-t-2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2} \Longrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

b) Calculons $\int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}$dt.

En effet la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2-t-2}$ est continue sur $[0; 1]$ et

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}\text{dt} = \int_0^1 \left(-\frac{1}{3(t+1)} + \frac{1}{3(t-2)}\right)dt$$
$$= \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right|\right]_0^1$$
$$= -\frac{2}{3}\ln 2.$$

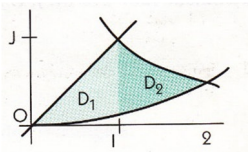
Enoncé 6

Calculer l'aire du domaine D délimité par les courbes représentatives des fonctions

$f(x) = x$; $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \frac{x^2}{8}$.

Solution

Calculons l'aire du domaine D délimité par les courbes représentatives des fonctions $f(x) = x$; $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \frac{x^2}{8}$.



Le domaine D peut être partagé en deux domaines $\boldsymbol{D_1}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{D_2}$. On a :

$$\boldsymbol{D_1} = \int_0^1 \left(\boldsymbol{x} - \frac{x^2}{8}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{24}\right]_0^1 = \frac{11}{24}$$

$$\boldsymbol{D_2} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right) dx = \left[\boldsymbol{lnx} - \frac{x^3}{24}\right]_1^2 = ln2 - \frac{7}{24}.$$

Finalement, D $= \boldsymbol{D_1} + \boldsymbol{D_2} = \boldsymbol{D_1}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{D_2} = \frac{11}{24} + ln2 - \frac{7}{24}$

D $= ln2 + \frac{1}{6}$

Enoncé 7

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - \boldsymbol{4y} = \boldsymbol{0}$.

Solution

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - \boldsymbol{4y} = \boldsymbol{0}$.

En effet, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - \boldsymbol{4y} = \boldsymbol{0}$ sont les fonctions :

$x \longmapsto A\,\boldsymbol{e^{2x}} + B\,\boldsymbol{e^{-2x}} (\boldsymbol{A} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{B} \in \mathbb{R})$.

Enoncé 8

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 16\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

Solution

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 16\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

En effet, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 16\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ sont les fonctions :

$x \longmapsto \boldsymbol{Acos4x} + \boldsymbol{Bsin4x} (\boldsymbol{A} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{B} \in \mathbb{R})$.

Enoncé 9

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $2y'' - 6y' - 8y = 0$
2) $y'' + 4y' + 4y = 0$
3) $y'' - 4y' + 5y = 0$ puis déterminer la fonction g solution de $y'' - 4y' + 5y = 0$ telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

Solution

1) $2y'' - 6y' - 8y = 0$

Une équation caractéristique de $2y'' - 6y' - 8y = 0$ est : $\boldsymbol{r^2 - 6r - 8 = 0}$

Soit $\boldsymbol{r^2 - 3r - 4 = 0}$. On obtient deux racines réelles – 1 et 4.

Une solution de l'équation différentielle $2y'' - 6y' - 8y = 0$ est $y = A\boldsymbol{e^{-x}} + \boldsymbol{Be^{4x}}$ *où* $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux reels.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

Une équation caractéristique de $y'' + 4y' + 4y = 0$ est : $\boldsymbol{r^2 + 4r + 4 = 0}$

On obtient $(r + 2)(r + 2) = 0$ donc une racine réelle -2.

Une solution de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$ est $y = \boldsymbol{e^{-2x}}(A + Bx)$ où $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux réels.

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$

Une équation caractéristique de $y'' - 4y' + 5y = 0$ est : $\boldsymbol{r^2 - 4r + 5 = 0}$

On obtient donc deux racines complexes $r = 2 + i$ *et* $\boldsymbol{\bar{r} = 2 - i}$.

Une solution de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = 0$ est $y = \boldsymbol{e^{2x}}(A\cos x + B\sin x)$

où A et B étant deux réels.

Déterminons la solution g de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = 0$ telle que $g(0) = 0$ *et* $g'(0) = 1$.

En effet une solution de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = 0$ est $y = \boldsymbol{e^{2x}}(A\cos x + B\sin x)$ *où* A et B étant deux réels.

Posons $g(x) = \boldsymbol{e^{2x}}(A\cos x + B\sin x)$ *où* A et B étant deux réels.

Calculons $g'(x)$:

$g'(x) = 2\boldsymbol{e^{2x}}(A\cos x + B\sin x) + \boldsymbol{e^{2x}}(-A\sin x + B\cos x)$.

Puis résolvons le système d'inconnues A et B : $\begin{cases} \boldsymbol{g(0) = 0 = e^0 A} \\ \boldsymbol{g'(0) = 1 = 2e^0 A + e^0 B} \end{cases}$

On trouve A = 0 et B = 1 ; la fonction cherchée g est : $g(x) = \boldsymbol{e^{2x}sinx}$.

Enoncé 10

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = cosx$

a) Trouver deux reels A et B tels que la fonction h définie sur ℝ par
$h(x) = Acosx + Bsinx$ soit une solution de (E).

b) Soit g, une solution de (E).
Montrons que $g - h = \boldsymbol{g_1}$ est une solution de l'équation différentielle
$(\mathbf{E_0})$: $y'' + 2y' + y = 0$.

c) Résoudre $(\mathbf{E_0})$. En déduire une solution de (E).

Solution

Résolvons l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = cosx$.

a) Trouvons deux réels A et B tels que la fonction h définie sur ℝ par
$h(x) = Acosx + Bsinx$ soit une solution de (E).
En effet, $h'(x) = -Asinx + Bcosx$ et $h''(x) = -Acosx - Bsinx$.
h est solution de (E) si et seulement si $h''(x) + 2h'(x) + h(x) = cosx$ c'est-à-dire que
$-Acosx - Bsinx + 2(-Asinx + Bcosx) + Acosx + Bsinx = cosx$.
$2Bcosx - 2Asinx = cosx$. Donc $\begin{cases} \mathbf{2B = 1} \\ \mathbf{-2A = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{B = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{A = 0} \end{cases}$
$h(x) = \boldsymbol{\frac{1}{2}sinx}$.

b) Soit g, une solution de (E).
Montrons que $g - h = \boldsymbol{g_1}$ est une solution de l'équation différentielle
$(\mathbf{E_0})$: $y'' + 2y' + y = 0$.
En effet $(g - h)' = g' - h'$ et $(g - h)'' = g'' - h''$.
Ainsi, $g'' - h'' + 2g' - 2h' + g - h = g'' + 2g' + g - (h'' + 2h' + h) = cosx - cosx = 0$ (car g et h sont les solutions de (E)).
$\boldsymbol{g_1}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E_0})$: $y'' + 2y' + y = 0$.

Réciproquement, montrons que si $\boldsymbol{g_1}$ est une solution de l'équation différentielle
$(\mathbf{E_0})$: $y'' + 2y' + y = 0$ alors $g = \boldsymbol{g_1} + h$ est une solution de (E) : $y'' + 2y' + y = cosx$.

En effet $(\boldsymbol{g_1} + h)' = \boldsymbol{g_1} + h'$ et $(\boldsymbol{g_1} + h)'' = \boldsymbol{g_1}'' + h''$ et

$(\boldsymbol{g_1} + h)'' + 2(\boldsymbol{g_1} + h)' + (\boldsymbol{g_1} + h) = \boldsymbol{g_1}'' + 2\boldsymbol{g_1}' + \boldsymbol{g_1} + h'' + 2h' + h' = cosx$

C'est-à-dire que $\boldsymbol{g_1}'' + 2\boldsymbol{g_1}' + \boldsymbol{g_1} = 0$.

$\boldsymbol{g_1}$ est alors solution de $(\mathbf{E_0})$.

c) Résolvons $(\mathbf{E_0})$: l'équation caractéristique de $(\mathbf{E_0})$ est : $\boldsymbol{r^2 + 2r + 1 = 0}$
c'est-à-dire $(r + 1)(r + 1) = 0$.

r = – 1. Une solution de $(\mathbf{E_0})$ est de la forme : $x \longmapsto \boldsymbol{e}^{-x}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Bx})$.

Une solution générale de (E) est de la forme : $x \longmapsto \boldsymbol{e}^{-x}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Bx})+\frac{1}{2}sinx$.

Exercices d'entrainement de la compétence de Base 2 du troisième trimestre

Exercice 1

Soit $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) \in \mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{par}$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{2x_1}+\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_3})$$

1. Montrer que $\boldsymbol{u}$ est une application linéaire
2. Déterminer $\boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{u})$

Exercice 2

Soit $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, -\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2y}+\boldsymbol{2z})$

On appelle $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\boldsymbol{\beta'} = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\boldsymbol{f}$ est une application linéaire
2. Donner une base et la dimension de $\boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{f})$ et une base et la dimension de $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f})$

Exercice 3

On considère l'application $\boldsymbol{h} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{3x}+\boldsymbol{2y})$$

1. Montrer que $\boldsymbol{h}$ est une application linéaire.
2. Montrer que $\boldsymbol{h}$ n'est ni injective , ni surjective
3. Donner une base de son noyau et une base de son image

Exercice 4

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire de : $\mathbb{R}^3$ dans : $\mathbb{R}^2$ telle que : $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}), \boldsymbol{f}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{f}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$
2. Exprimer $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ et déterminer son noyau et son image

Exercice 5

Soit $\boldsymbol{u_1} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{2}), \boldsymbol{u_2} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1})$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{u_3} = (-\mathbf{1}, -\mathbf{5}, -\mathbf{7})$

Soit $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Vect}(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3})$ $\boldsymbol{et\ soit}$ $\boldsymbol{F} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \mathbf{0}\}$

1. Donner une base de $\boldsymbol{E}$
2. Montrer que $\boldsymbol{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
3. Donner une base de $\boldsymbol{F}$
4. Donner une base de $\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{F}$

Exercice 6

Soit $\boldsymbol{u_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), \boldsymbol{u_2} = (\mathbf{2}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1})$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{u_3} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1})$

Soient $\boldsymbol{E} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \mathbf{0}\}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Vect}(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2})$

1. Montrer que $\boldsymbol{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de .
2. La famille $(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3})$ est-elle libre ? Est-ce que $\boldsymbol{u_3} \in \boldsymbol{F}$?
3. Est-ce que $\boldsymbol{u_3} \in \boldsymbol{E}$
4. Donner une base de $\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{F}$
5. Soit $\boldsymbol{u_4} = (-\mathbf{1}, \mathbf{7}, \mathbf{5})$ .Est ce que $\boldsymbol{u_4} \in \boldsymbol{E}$? Est-ce que $\boldsymbol{u_4} \in \boldsymbol{F}$?

Exercice 7

1. Est-ce que le sous ensemble $\boldsymbol{E} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{y} = \mathbf{2}\boldsymbol{x}\}$ muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R} - \boldsymbol{espace\ vectoriel}$?
2. Est-ce que le sous-ensemble $\boldsymbol{F} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{y}^2 = \mathbf{2}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} = \mathbf{0}\}$ de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8

Soit $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Vect}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{a} = (\mathbf{2}, -\mathbf{1}, -\mathbf{1}), \boldsymbol{b} = (-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}), \boldsymbol{c} = (\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{7}), \boldsymbol{d} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$

1. Est-ce que $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ est une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ est une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Déterminons une ou plusieurs équations caractérisant $\boldsymbol{E}$

Exercice 9

Soient $\boldsymbol{a} = (\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}), \boldsymbol{b} = (\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{6}, \mathbf{1})$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{c} = (\mathbf{6}, -\mathbf{3}, \mathbf{8}, \mathbf{5})$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$

Soient $\boldsymbol{E} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{R}^4 / -\mathbf{7}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} + \mathbf{5}\boldsymbol{t} = \mathbf{0}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Vect}\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

1. Montrer que $\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{F}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$
2. Donner une base de $\boldsymbol{E}$ et une base de $\boldsymbol{F}$

Exercice 10

Soient

$\boldsymbol{P_1} = \boldsymbol{X}^3 + \boldsymbol{X}^2 + \boldsymbol{X} + \mathbf{1}, \boldsymbol{P_2} = \boldsymbol{X}^3 + \mathbf{2}\boldsymbol{X}^2 + \mathbf{3}\boldsymbol{X} + \mathbf{4}, \boldsymbol{P_3} = \mathbf{3}\boldsymbol{X}^3 + \boldsymbol{X}^2 + \mathbf{4}\boldsymbol{X} + \mathbf{2}\ \ \boldsymbol{et}$
$\boldsymbol{P_4} = \mathbf{10}\boldsymbol{X}^3 + \mathbf{4}\boldsymbol{X}^2 + \mathbf{13}\boldsymbol{X} + \mathbf{7}$ quatre polynomes de $\mathbb{R}_3[\boldsymbol{X}]$

La famille $(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P_3}, \boldsymbol{P_4})$ est-elle libre ?

Exercice 11

Soit $\boldsymbol{E}$ l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle $\boldsymbol{y^2 + xy' - x^2y = 0}$

Montrer que $\boldsymbol{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions.

Exercice 12

Soit $\boldsymbol{E}$ un espace-vectoriel de dimension $\boldsymbol{3\ et\ B = (e_1, e_2, e_3)}$ une base de . On considère $\boldsymbol{f}$, l'endomorphisme de $\boldsymbol{E}$ dont la matrice dans la base $\boldsymbol{B}$ est : $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Exercice 13

Montrer que $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \left\{\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{-b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}\right\}$ est un corps non-commutatif, appelé corps des quaternions

Exercice 14

Soit : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Soit $\boldsymbol{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Supposons que $\boldsymbol{M_{f,C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

1. Exprimer $\boldsymbol{f}$ par son expression algébrique.
2. Ecrire la matrice de $\boldsymbol{f}$ dans la base $\boldsymbol{B} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right)$

Exercice 15

Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\ \ \boldsymbol{et}\ \ \boldsymbol{g}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, les applications linéaires canoniquement associées à ces matrices.

Donner la matrice de $\boldsymbol{f \circ g}\ \ \boldsymbol{et}\ \ \boldsymbol{g \circ f}$ ainsi que leurs expressions analytiques.

Exercice 16

Dans une maternité, on a relevé, pour chacune des vingt naissances d'une journée l'âge $\boldsymbol{x}$ de la mère et le poids $\boldsymbol{y}$ du nouveau né. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

$\boldsymbol{x}$	22	18	20	20	16	22	26	22	18	22	18	26	20	26	18	18	22	26	22	20

y	3,2	2,8	3,2	3,6	2,8	2,8	3	2,8	3	3	3,4	3,6	3,2	3	3	3,4	2,8	2,6	3	3,2

1) Présenter ces données dans un tableau à double entrée.

2) Déterminer les séries marginales associées aux caractères x *et* y.

3) Représenter par des points pondérés le nuage des points associés à cette série double.

Exercice 17

Lors d'une enquête portant sur 100 familles, on a relevé le nombre x d'enfants de chaque famille et le nombre y de pièces de leur habitation.

Les résultats sont présentés dans le tableau à double entrée ci-dessous.

x_i \ y_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	3	2	2	0	0	0	0	0
2	3	3	6	7	3	1	0	0	0
3	1	1	4	7	7	5	4	2	0
4	0	2	3	5	4	5	6	5	3

1) Représenter à l'aide de deux tableaux les séries marginales associées aux caractères x *et* y.

2) Déterminer les moyennes arithmétiques respectives de ces séries marginales

3) Représenter par des points pondérés le nuage associé à cette série double ; placer son point moyen.

Exercice 18

Soit la série statistique définie par :

x	3	4	5	8	10	13	14	15
y	35	40	35	65	65	85	90	105

1) Représenter le nuage de points.

2) Déterminer une équation de la droite (D) de régression de x *en* y. construire (D).

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double.

Y'a-t-il une bonne corrélation linéaire ?

Exercice 19

Le tableau suivant donne le poids $\boldsymbol{y}$ en kg d'un nourrisson, $\boldsymbol{x}$ jours après sa naissance.

x_i	5	7	10	14	18	22	26
y_j	3,61	3,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12

1) Représenter le nuage de points associé à cette série.

2) Déterminer une équation de la droite de régression de $\boldsymbol{y\ en\ x}$ et représenter cette droite sur le graphique précédent.

3) Donner une estimation du poids du nourrisson 30 jours après la naissance.

Exercice 20

On a noté, pour huit personnes, l'intensité du travail fourni ($\boldsymbol{x_i}$), exprimée en kilojoules par minute, et la fréquence cardiaque ($\boldsymbol{y_i}$), c'est-à-dire le nombre de battements par minute.

x_i	9,6	12,8	18,4	31,2	36,8	47,2	49,6	56,8
y_i	70	86	90	104	120	128	144	154

1) Représenter le nuage de points de cette série statistique double.

2) Dresser un tableau pour calculer les moyennes $\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{et}\ \bar{\boldsymbol{y}}$ et les écart-types $\boldsymbol{\partial_X\ et\ \partial_Y}$ des séries en $\boldsymbol{x}$ et en $\boldsymbol{y}$, et la covariance $\boldsymbol{cov}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ en $\boldsymbol{x\ et\ y}$.

3) Déterminer les droites de régression et les tracer.

4) Estimer la fréquence cardiaque lorsque l'intensité du travail fourni est 65kj/mn. Estimer l'intensité du travail fourni lorsque la fréquence cardiaque est de 100 battements par minute.

Exercices d'entrainement de la compétence de base 3 du troisième trimestre

Exercice 1

Dans l'espace $\boldsymbol{\varepsilon}$, muni d'un repère orthonormal direct $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$, on donne les points $\mathbf{A}(\mathbf{3};\ -\mathbf{2};\ \mathbf{5})$, $\mathbf{B}(\mathbf{3};\ \mathbf{2};\ \mathbf{4})$, $\mathbf{C}(\mathbf{1};\ \mathbf{3};\ \mathbf{4})$.

Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 2

L'espace $\boldsymbol{\varepsilon}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$. On considère les trois points A, B, C de coordonnées : $\mathbf{A}(-\mathbf{2}; \mathbf{1}; \mathbf{3})$, $\mathbf{B}(\mathbf{1};\ -\mathbf{1};\ \mathbf{0})$, $\mathbf{C}(\mathbf{0};\ \mathbf{0};\ -\mathbf{2})$.

1) Déterminer une équation du plan (ABC).

2) Calculer les coordonnées du point d'intersection de ce plan et de la droite passant par l'origine du repère et dont un vecteur directeur est $\vec{u}$, $(1;\ -1;\ 1)$.

Exercice 3

L'espace ε est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$,.

Soit A, B, C les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}, \overrightarrow{OB} = \vec{\jmath}, \overrightarrow{OC} = \vec{k}$.

1) Dertminer l'ensemble des points M tels que :
$\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB'} \wedge \overrightarrow{MC'}\|$.
2) Dertminer l'ensemble des points M tels que :
$\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB'} \wedge \overrightarrow{MC'}\| = \|\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}\|$.

Exercice 4

Dans l'espace ε, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les points $A\left(\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right)$ et $f(0;\ 1;\ 0)$.

1) Soit $M(x;\ y;\ z)$ un point de l'espace.

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$.

Determiner le point M_o tel que $\overrightarrow{M_oA} \wedge \overrightarrow{M_oB} = \overrightarrow{M_oF}$.

2) Determiner l'ensemble des points M du plan $(O, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tels que :

$\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MF}\|$.

En interprétant $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\|$ comme une aire, monter que ces points M sont à égale distance du point F et de la droite (AB). En déduire une solution géométrique.

3) Résoudre les mêmes questions qu'en 2) en remplaçant le plan $(O, \vec{\jmath}, \vec{k})$ par le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath},)$.

EVALUATION

Exercice 1

1) a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' = e^{-3x}$.
   a) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = \frac{10}{9}$ et $y'(0) = \frac{5}{3}$.
   b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$ telle que $y(-2) = 1$.
   c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.
   d) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = 0$
2) Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \boldsymbol{e^{3x}}$?

Exercice 2

Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x d'une population.

Age $\boldsymbol{x_i}$	36	42	48	54	60	66
Tension $\boldsymbol{y_i}$	11,8	14	12,6	15	15,5	15 ,1

1) Représenter le nuage de points associé à cette série.

2) Déterminer une équation de la droite de régression de $\boldsymbol{y\ en\ x}$ et une équation de la droite de régression de $\boldsymbol{x\ en\ y}$. tracer ces deux droites.

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.

4) Une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela vous parait-il normal ?

Exercice 3

Soit $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) \in \mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{par}$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{2x_1} + \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_3})$$

1) Montrer que $\boldsymbol{u}$ est une application linéaire
2) Déterminer $\boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{u})$

Difficultés rencontrées liées à la résolution de l'exercice :

- ……
  ……
  ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

Conseils et orientation de l'enseignant :

- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……
- ……

Evaluation de la compétence

Table des matières

Avant – Propos 1

Equipe éditoriale 2

PREFACE 3

INTRODUCTION 5

OBJECTIFS TERMINAL D'INTEGRATION 7

Fiche de programmation horaire du premier trimestre 8

FICHE DE PROGRESSION DU 1er TRIMESTRE 9

Les modules d'intégration de Mathématiques de la classe de Terminale S premier trimestre 10

Compétence de Base 1 10

Compétence de Base 2 13

Compétence de Base 3 15

PARTIE DESTINEE A L'ELEVE 16

FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES DESTINEES A L'ELEVE 16

LECONS DES COMPETENCES DE BASE 1 17

- **LIMITES ET CONTINUITE** 17

COMPETENCES DE BASE 2 49

- **EQUATIONS LINEAIRES** 49
- **ARITHMETIQUE** 56
- **LES NOMBRES COMPLEXES** 67

Cas particuliers 75

Compétence de Base 3 75

- **CALCULS BARYCENTRIQUES** 75

Lignes de niveau de l'application : $M \longmapsto MAMB$ 81

EXERCICE D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 1 DU PREMIER TRIMESTRE 81

EXERCICES TYPES DE LA COMPETENCE DE BASE 1 DU PREMIER TRIMESTRE ET SOLUTIONS 83

EXERCICE D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 2 DU PREMIER TRIMESTRE 93

EXERCICES TYPES DE LA COMPETENCE DE BASE 2 DU PREMIER TRIMESTRE ET SOLUTIONS 97

EXERCICES D'ENTRAINEMENT DE LA COMPETENCE DE BASE 3 PREMIER TRIMESTRE 113

EXERCICES TYPES DE LA COMPETENCE DE BASE 3 DU PREMIER TRIMESTRE ET SOLUTIONS 116

EVALUATION 119

Deuxième trimestre 122

Programmation horaire du 2e trimestre 122
FICHE DE PROGRESSION 123
Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Terminale S Deuxième trimestre 124
Compétence de Base 1 124
Compétence de Base 2 126
Compétence de Base 3 128
PARTIE DESTINEE A L'ELEVE 131
FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES DESTINEES A L'ELEVE 131
..... 131
Les leçons de la compétence de Base 1 du deuxième trimestre 132
Leçon : Fonction logarithme 132
Equations et inéquations faisant intervenir ln 134
Inéquations faisant intervenir ln 136
Dérivée et primitives de ln 142
Le logarithme de base a 144
Leçon : Fonction exponentielle népérienne 146
Primitives de la fonction u'(x) eux 151
Etude de la fonction fa : 152
Etude de la fonction $fa : x \longmapsto ax$ 152
Etude de la fonction fa : 153
Leçon : Suites numériques 154
Limite, convergence et divergence d'une suite numérique 155
Calculer la limite d'une suite et définir une suite convergente ou une suite divergente 155
Etudier le sens de variation d'une suite numérique 157
Déterminer la limite d'une suite numérique et calculer l'image d'une suite par une fonction 161
Image d'une suite par une fonction 162
Leçons de la compétence de base 2 du deuxième trimestre 163
Leçon : Structures de groupes et de sous-groupes 163
Leçon : Dénombrement et probabilité 173
Leçons de la compétence de base 3 du deuxième trimestre 178
Leçon : Transformations du plan et applications affines 178
Exercice d'entrainement de la compétence de base 1 du deuxième trimestre 199
Exercices types de la compétence de base 1 du deuxième trimestre et corrigés 206
Exercices de la compétence de base 2 du deuxième trimestre 214
Exercices types de la compétence de base 2 du deuxième trimestre et corrigés 219
Exercices d'entrainement de la compétence de base 3 du deuxième trimestre 228

Exercices types de la compétence de base 3 du deuxième trimestre et corrigés ...234
EVALUATION 243
Programmation horaire du 3e trimestre.....247
FICHE DE PROGRESSION 248
Les modules d'intégration en mathématiques en classe de Terminale D Troisième trimestre 249
PARTIE DESTINEE A L'ELEVE 253
FICHES DE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES 253
Leçons de la compétence de base 1 du troisième trimestre 254
Leçon : intégration 254
Leçon : Equations différentielles 272
Leçons de la compétence de base 2 du troisième trimestre 284
Leçon : statistiques.....284
Leçon : espace vectoriel.....295
Leçons de la compétence de base 3 du troisième trimestre 322
Leçon : géométrie de l'espace 322
Exercice d'entrainement de la compétence de base 1 du troisième trimestre.....335
Exercices types de la compétence de base 1 du troisième trimestre et corrigés....337
Exercices d'entrainement de la compétence de Base 2 du troisième trimestre 344
Exercices d'entrainement de la compétence de base 3 du troisième trimestre.....348
EVALUATION 349

4

EDUNOTE

Portail Integré de Réussite Scolaire

Inscrivez-vous sur www.edunote.org

TECHNIDEV
Institut des Technologies Innovantes pour le Développement

©Technidev2021